ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

TROISIÈME SÉRIE

TOME LXX — ANNÉE 1953

(89e VOLUME DE LA COLLECTION)

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55

1953

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

ΑΜΙ Ο ΘΕΟΣ ΤΕ ΩΝΕΙΤΡΕΙ

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

TROISIÈME SÉRIE

TOME SOIXANTE-DIXIÈME — ANNÉE 1953

(89e VOLUME DE LA COLLECTION)

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

—

1953

Copyright by Gauthier-Villars, 1953.
Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

ADMINISTRATION :

Directeur : M. Paul MONTEL,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Trésorier : Mlle P. GAUTHIER-VILLARS.

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

NOUVELLES APPLICATIONS DU CALCUL FONCTIONNEL A LA MÉCANIQUE

PAR M. HENRI PAILLOUX.

Dans un précédent Mémoire (1) nous avons montré qu'il était possible de modifier la méthode employée par Lagrange pour l'étude des systèmes matériels à n paramètres, de façon à mettre en équations les problèmes de Statique ou de Dynamique de systèmes matériels dans lesquels il est nécessaire d'introduire des fonctions-paramètres pour représenter toute forme possible. Dans un dernier chapitre nous proposions un procédé d'approximation pour l'étude de l'équilibre des poutres droites : à partir des équations rigoureuses de l'Élasticité, et grâce à une approximation que l'on peut améliorer, nous avons établi des équations assez voisines de celles de la Résistance des matériaux classique.

Nous nous proposons ici d'appliquer une méthode analogue aux plaques, membranes ou coques, et de donner les équations correspondantes de Statique, de Dynamique, ou celles des vibrations périodiques.

L'étude est faite d'abord en axes rectangulaires, ce qui donne des équations relativement simples. Comme application nous étudions la Statique des plaques planes chargées dans l'approximation du second ordre. Rapportant ensuite l'espace à un système de coordonnées curvilignes quelconques, les méthodes du Calcul tensoriel permettent d'évaluer le potentiel de forme d'un corps vibrant à trois dimensions. On considère d'abord le cas d'une coque de révolution dans

(1) *Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 69, 1952, p. 213-257.

l'approximation du premier ordre. Cette approximation probablement faible se justifie par des calculs relativement abordables qui permettent d'étudier le problème de la vibration des cloches. La mise en équations de ce même problème dans le cas d'une approximation du second ordre est donnée, ainsi que l'énoncé des problèmes de Mathématiques à résoudre pour le système différentiel obtenu. Nous terminons l'étude du mouvement des coques par les équations générales en variables quelconques, puis nous particularisons en supposant d'abord que l'on a affaire à un système triple orthogonal de coordonnées, puis, que la surface moyenne de la coque est rapportée à ses lignes de courbures.

L'application de la méthode générale des fonctions-paramètres est faite à l'Hydrodynamique pour retrouver les équations des fluides parfaits en variables quelconques de Lagrange, et étudier en particulier l'écoulement adiabatique, permanent ou non, d'un fluide parfait dans une conduite de section faible et presque constante.

En Résistance des matériaux on rencontre des problèmes assez difficiles à propos d'assemblages de poutres constituant des systèmes fortement hyperstatiques. L'idée fréquemment utilisée consiste à remplacer cet assemblage de poutres par une membrane, ce qui permet d'introduire la continuité et la dérivabilité (quoique, au point de vue calcul numérique, certains ingénieurs préfèrent utiliser des équations aux différences finies, mais nous n'abordons pas ici le point de vue pratique, nous nous bornons aux mises en équations). Nous considérons une membrure de pont à contour rectangulaire rigide dans laquelle il existe des tirants verticaux articulés ou encastrés dans les deux poutres horizontales, et nous recherchons le déplacement en un point quelconque. Même problème pour une grille verticale formée d'un cadre relativement rigide et de deux systèmes de barres, horizontales et verticales, encastrées à chaque nœud. Après l'étude des petites déformations d'un plan, nous étudions le cas de la grille horizontale (par exemple, l'ensemble des poutres en béton d'un plancher), les deux systèmes de barres étant orthogonaux ou non. Il est très intéressant de constater que ces problèmes de Résistance de matériaux peuvent se traiter, suivant l'idée de Lagrange, en séparant la recherche des déformations géométriques de celle des tensions ou réactions. Il s'introduit une grosse simplification de calcul. La connaissance des déformations permet de connaître la répartition des efforts.

Nous terminons par la recherche de la forme optima des colonnes de révolution pour résister au flambement.

1. Statique et Dynamique des membranes rigides en axes rectangulaires. — Soit Σ une portion de membrane rigide, ou coque, limitée par un contour Γ. Cette membrane possède en chaque point une épaisseur ε variant peu et lentement autour de chaque point. Par définition, la surface moyenne est équidistante des deux faces de la coque supposées très voisines. Rapportons la

surface moyenne à trois axes rectangulaires $Oxyz$, et soit $z = z(x, y)$ l'équation de la surface. Nous désignons par p, q, r, s, t les dérivées partielles premières et secondes de la fonction z. Les coordonnées X, Y, Z d'un point P de la coque peuvent s'exprimer en fonction de trois paramètres qui sont les coordonnées rectangulaires x, y de la projection de P sur le plan xOy, et ζ cote relative de P par rapport à la surface moyenne. Autrement dit, les coordonnées de P ont la valeur suivante :

$$\text{(1)} \qquad X = x, \qquad Y = y, \qquad Z = z(x, y) + \zeta.$$

ζ varie entre $\pm h(x, y)$ qui dépend de l'épaisseur de la surface au point P et de l'angle α que fait la normale à la surface moyenne avec l'axe des z. Nous avons

$$\varepsilon = 2h\cos\alpha, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

de sorte que

$$\text{(2)} \qquad 2h = \varepsilon\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

$h(x, y)$ est donc une quantité connue, que nous utiliserons constamment.

Soient u, v, w les composantes rectangulaires du déplacement du point P sous l'action de charges que nous préciserons ultérieurement. Nous admettons, comme nous l'avons fait dans le cas des poutres, que les fonctions u, v, w sont régulières en ζ, et qu'on peut, avec une approximation suffisante, les développer par la formule de Taylor, en se bornant aux termes du premier degré en ζ :

$$u = u_1 + \zeta u_2, \qquad v = v_1 + \zeta v_2, \qquad w = w_1 + \zeta w_2.$$

u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 sont des fonctions de x et y, mais elles ne dépendent pas de ζ. Cette hypothèse sur u, v, w revient à supposer que leurs dérivées premières en ζ varient peu au voisinage de la surface moyenne. En fait, un développement limité de Taylor, dans le cas où l'accroissement des variables n'est pas infiniment petit, est satisfaisant si les dernières dérivées conservées sont presque constantes dans l'intervalle considéré. Ce fait peut ne pas se produire pour certaines dérivées d'ordre moindre, ou pour les dérivées d'ordre supérieur à celui où l'on arrête le développement.

Pour pouvoir effectuer certaines dérivations, résolvons les formules (1) par rapport à x, y, ζ, et calculons leurs différentielles :

$$dx = dX, \qquad dy = dY, \qquad d\zeta = dZ - p\,dX - q\,dY.$$

Le potentiel de forme d'un corps élastique étant donné par la formule

$$\text{(3)} \qquad 2\varpi = \iiint_T [\lambda e^2 + 2\mu(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) + 4\mu(g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)]\,dX\,dY\,dZ,$$

nous constatons que c'est une fonctionnelle des u_i, v_i. Pour la déterminer, nous avons besoin du jacobien suivant :

$$\frac{D(x, y, \zeta)}{D(X, Y, Z)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & -q & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

dont l'inverse, qui vaut l'unité, intervient dans l'intégrale précédente. Évaluons d'autre part les coefficients de la déformation. Ils ont la valeur suivante :

$$(4) \qquad \begin{cases} e_i = A_i + \zeta B_i, & e = A + \zeta B, \\ 2g_i = C_i + \zeta D_i, & A = A_1 + A_2 + A_3, \qquad B = B_1 + B_2 + B_3, \end{cases}$$

où nous avons posé, pour abréger les calculs,

$$(5) \qquad \begin{cases} A_1 = \dfrac{\partial u_1}{\partial x} - p u_2, & A_2 = \dfrac{\partial v_1}{\partial y} - q v_2, & A_3 = w_2; \\ B_1 = \dfrac{\partial u_2}{\partial x}, & B_2 = \dfrac{\partial v_2}{\partial y}, & B_3 = 0; \\ C_1 = \dfrac{\partial w_1}{dy} + v_2 - q w_2, & C_2 = \dfrac{\partial w_1}{\partial x} + u_2 - p w_2, & C_3 = \dfrac{\partial v_1}{\partial x} + \dfrac{\partial u_1}{\partial y} - p v_2 - q u_2; \\ D_1 = \dfrac{\partial w_2}{\partial y}, & D_2 = \dfrac{\partial w_2}{\partial x}, & D_3 = \dfrac{\partial v_2}{\partial x} + \dfrac{\partial u_2}{\partial y}. \end{cases}$$

Le potentiel de forme prend alors la valeur suivante :

$$\begin{aligned} 2\varpi &= \iiint [\lambda(A + \zeta B)^2 + 2\mu\Sigma(A_i + \zeta B_i)^2 + \mu\Sigma(C_i + \zeta D_i)^2]\, dx\, dy\, d\zeta \\ &= \iiint [(\lambda A^2 + 2\mu\Sigma A_i^2 + \mu\Sigma C_i^2) + 2\zeta(\lambda AB + 2\mu\Sigma A_i B_i + \mu\Sigma C_i D_i) \\ &\qquad + \zeta^2(\lambda B^2 + 2\mu\Sigma B_i^2 + \mu\Sigma D_i^2)]\, dx\, dy\, d\zeta. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant effectuer l'intégration en ζ, ce qui donne

$$2\varpi = \iint_\Sigma \left[2h(\lambda A^2 + 2\mu\Sigma A_i^2 + \mu\Sigma C_i^2) + \frac{2h^3}{3}(\lambda B^2 + 2\mu\Sigma B_i^2 + \mu\Sigma D_i^2) \right] dx\, dy.$$

Tenant compte de la signification des symboles, nous voyons que le potentiel de forme est une fonctionnelle des u_i, v_i. Il se présente comme une intégrale de surface portant sur un polynome en u_i, v_i et leurs dérivées premières en x et y. Comme le calcul des variations fournit directement la dérivée fonctionnelle de l'intégrale

$$\iint_\Sigma F(u, u'_x, u'_y)\, dx\, dy$$

sous la forme

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u'_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u'_y},$$

nous saurons calculer les dérivées partielles fonctionnelles du potentiel de forme en appliquant les formules de dérivation des fonctions composées.

Après avoir remarqué que l'on a

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 2h\left(\lambda A\frac{\partial A}{\partial u} + 2\mu\Sigma A_i\frac{\partial A_i}{\partial u} + \mu\Sigma C_i\frac{\partial C_i}{\partial u}\right) + \frac{2h^2}{3}\left(\lambda B\frac{\partial B}{\partial u} + 2\mu\Sigma B_i\frac{\partial B_i}{\partial u} + \mu\Sigma D_i\frac{\partial D_i}{\partial u}\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial u'_x} = 2h\left(\lambda A\frac{\partial A}{\partial u'_x} + \dots\right) + \frac{2h^2}{3}\left(\lambda B\frac{\partial B}{\partial u'_x} + \dots\right), \qquad \frac{\partial F}{\partial u'_y} = \dots,$$

nous trouvons de cette manière le tableau suivant :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\varpi}{\partial u_1} = -\frac{\partial}{\partial x}[2h(\lambda A + 2\mu A_1)] - \frac{\partial}{\partial y}(2\mu h C_3),\\
&\frac{\partial\varpi}{\partial v_1} = -\frac{\partial}{\partial x}(2\mu h C_3) - \frac{\partial}{\partial y}[2h(\lambda A + 2\mu A_2)],\\
&\frac{\partial\varpi}{\partial w_1} = -\frac{\partial}{\partial x}(2\mu h C_2) - \frac{\partial}{\partial y}(2\mu h C_1),\\
&\frac{\partial\varpi}{\partial u_2} = 2h[\mu C_2 - p(\lambda A + 2\mu A_1) - \mu q C_3]\\
&\qquad - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2h^3}{3}(\lambda B + 2\mu B_1)\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2h^3}{3}\mu D_3\right),\\
&\frac{\partial\varpi}{\partial v_2} = 2h[\mu C_1 - \mu p C_3 - q(\lambda A + 2\mu A_2)]\\
&\qquad - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2h^3}{3}\mu D_3\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{2h^3}{3}(\lambda B + 2\mu B_2)\right],\\
&\frac{\partial\varpi}{\partial w_2} = 2h(\lambda A + 2\mu A_3 - \mu q C_1 - \mu p C_2) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2h^3}{3}\mu D_2\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2h^3}{3}\mu D_1\right).
\end{aligned}\right.$$

Pour évaluer le travail des forces extérieures agissant sur la coque, nous distinguons les forces massiques, ou de volume, et les forces de surface agissant sur l'une ou l'autre des faces de la coque.

Soient $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ les composantes de la force massique par unité de volume; ce sont des fonctions données de X, Y, Z. Nous avons donc, par exemple,

$$\mathfrak{X}(X, Y, Z) = \mathfrak{X}(x, y, z+\zeta) = \mathfrak{X} + \zeta\mathfrak{X}'_z,$$

$\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{X}'_z$ étant, dans ce qui suit, calculés au point de coordonnées x, y, z et non X, Y, Z. Le travail virtuel des forces massiques a donc la valeur suivante :

$$\Sigma\iiint(\mathfrak{X} + \zeta\mathfrak{X}'_z)(\delta u_1 + \zeta\delta v_1)\,dx\,dy\,d\zeta,$$

la sommation étant entendue pour les trois composantes. Nous pouvons effectuer l'intégration en ζ,

$$\Sigma\iint_\Sigma\left(2h\mathfrak{X}\,\delta u_1 + \frac{2h^3}{3}\mathfrak{X}'_z\,\delta u_2\right)dx\,dy.$$

Pour connaître le travail des forces de surface, désignons par X^+, Y^+, Z^+ et X^-, Y^-, Z^-, les composantes des forces agissant sur l'unité d'aire des faces de cotes respectives $z+h$ et $z-h$.

L'élément d'aire de la surface décrite par le point de coordonnées $x, y, z+h$, étant

$$\sqrt{1+(p+h'_x)^2+(q+h'_y)^2}\,dx\,dy \sim \sqrt{1+p^2+q^2}\left(1+\frac{ph'_x+qh'_y}{1+p^2+q^2}\right)dx\,dy,$$

le travail virtuel des forces précédentes a pour expression

$$\sum \iint \left\{\left[(X^+ + X^-)+(X^+ - X^-)\frac{ph'_x+qh'_y}{1+p^2+q^2}\right]\delta u_1 + h(X^+ - X^-)\,\delta u_2\right\}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy.$$

Calculons encore la force vive de la coque,

$$2T = \sum \iiint \rho(\dot u_1 + \zeta \dot u_2)^2\,dx\,dy\,d\zeta = \sum \iint_\Sigma \rho\left[2h\dot u_1^2 + \frac{2h^3}{3}\dot u_2\right]dx\,dy.$$

Ses dérivées partielles fonctionnelles par rapport aux fonctions-paramètres sont nulles, et ses dérivées par rapport à leurs dérivées par rapport au temps ont la valeur suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot u_1} = 2\rho h \dot u_1, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot u_2} = \frac{2\rho h^3}{3}\dot u_2.$$

Nous avons enfin les six équations du mouvement, dans le cas le plus général. Elles sont du type suivant :

$$(7)\quad \begin{cases} 2\rho h \ddot u_1 = -\dfrac{\partial \varpi}{\partial u_1} + 2hX + (X^+ + X^-)\sqrt{1+p^2+q^2} + (X^+ - X^-)\dfrac{ph'_x+qh'_y}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \\ 2\rho \dfrac{h^3}{3}\ddot u_2 = -\dfrac{\partial \varpi}{\partial u_2} + \dfrac{2h^3}{3}X'_z + h(X^+ - X^-)\sqrt{1+p^2+q^2}. \end{cases}$$

L'approximation faite est dite du second ordre, car nous avons arrêté les développements de Taylor du déplacement aux termes du premier ordre. Une approximation moins bonne, mais meilleure que dans le cas des poutres droites, est celle que l'on obtient en prenant le déplacement du point P réduit aux seuls termes u_1, v_1, w_1. Comme les calculs sont beaucoup plus simples, nous les donnons à titre d'indication. Dans ce cas, toutes les quantités B_i et D_i sont nulles, et nous avons

$$A_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \qquad A_2 = \frac{\partial v_1}{\partial y}, \qquad A_3 = 0;$$

$$C_1 = \frac{\partial w_1}{\partial y}, \qquad C_2 = \frac{\partial w_1}{\partial x}, \qquad C_3 = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y},$$

avec trois dérivées fonctionnelles seulement, $\frac{\partial \varpi}{\partial u_1}, \frac{\partial \varpi}{\partial v_1}, \frac{\partial \varpi}{\partial w_1}$, dont la valeur est toujours donnée par le tableau (6).

Le travail virtuel des forces extérieures comprend les termes suivants :

$$\delta\tilde\omega = \sum \iint_\Sigma \left[2hX + (X^- + X^-)\sqrt{1+p^2+q^2} + (X^+ - X^-)\frac{ph'_x+qh'_y}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right]\delta u_1\,dx\,dy,$$

d'où les trois équations simplifiées du mouvement :

$$
(8)\quad
\begin{cases}
2\rho h\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left\{2h\left[\lambda\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+\dfrac{\partial v_1}{\partial y}\right)+2\mu\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right]\right\}+\dfrac{\partial}{\partial y}\left[2\mu h\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x}+\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right]\\
\qquad +2h\mathfrak{X}+(X^+ + X^-)\sqrt{1+p^2+q^2}+(X^+ - X^-)\dfrac{ph'_x+qh'_y}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\\
2\rho h\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[2\mu h\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x}+\dfrac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right]+\dfrac{\partial}{\partial y}\left\{2h\left[\lambda\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+\dfrac{\partial v_1}{\partial y}\right)+2\mu\dfrac{\partial v_1}{\partial y}\right]\right\}\\
\qquad +2h\mathfrak{Y}+(Y^+ + Y^-)\sqrt{1+p^2+q^2}+(Y^+ - Y^-)\dfrac{ph'_x+qh'_y}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\\
2\rho h\dfrac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(2\mu h\dfrac{\partial w_1}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(2\mu h\dfrac{\partial w_1}{\partial y}\right)+2h\mathfrak{Z}\\
\qquad +(Z^+ + Z^-)\sqrt{1+p^2+q^2}+(Z^+ - Z^-)\dfrac{ph'_x+qh_y}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.
\end{cases}
$$

2. Statique des plaques planes chargées. — Considérons une plaque plane, homogène et d'épaisseur constante, située dans le plan horizontal, l'axe des z étant vertical ascendant. Elle supporte à sa partie supérieure une charge unitaire X, Y, Z. Nous allons écrire les équations du mouvement en nous contentant, pour commencer, de l'approximation d'ordre un. En supprimant l'indice, nous avons

$$
(8')\quad
\begin{cases}
\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\lambda\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)+2\mu\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]+\dfrac{\partial}{\partial y}\mu\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)+\dfrac{X}{\varepsilon},\\
\rho\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\mu\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\lambda\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)+2\mu\dfrac{\partial v}{\partial y}\right]+\dfrac{Y}{\varepsilon},\\
\rho\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\mu\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial}{\partial y}\mu\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{Z}{\varepsilon}
\end{cases}
$$

(X, Y, Z, peuvent aussi désigner les composantes de la force extérieure globale qui agit sur l'élément d'aire $dx\,dy$ de la plaque, qu'il s'agisse de forces massiques ou de forces de surface). Les équations sont celles de l'élasticité à trois dimensions avec une force moyenne répartie dans toute l'épaisseur, le déplacement étant supposé indépendant de z. Le système précédent peut être considéré comme satisfaisant.

Avec l'approximation du second ordre, nous conservons les notations antérieures qui se simplifient :

$$
\begin{array}{lll}
A_1=\dfrac{\partial u_1}{\partial x}, & A_2=\dfrac{\partial v_1}{\partial y}, & A_3=w_2;\\
B_1=\dfrac{\partial u_2}{\partial x}, & B_2=\dfrac{\partial v_2}{\partial y}, & B_3=0;\\
C_1=\dfrac{\partial w_1}{\partial y}+v_2, & C_2=\dfrac{\partial w_1}{\partial x}+u_2, & C_3=\dfrac{\partial v_1}{\partial x}+\dfrac{\partial u_1}{\partial y};\\
D_1=\dfrac{\partial w_2}{\partial y}, & D_2=\dfrac{\partial w_2}{\partial x}, & D_3=\dfrac{\partial v_2}{\partial x}+\dfrac{\partial u_2}{\partial y}.
\end{array}
$$

On obtient alors les équations de la statique des plaques planes chargées :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(\lambda A + 2\mu A_1) + \mu\frac{\partial C_3}{\partial y} + \mathfrak{X} + \frac{X^+ + X^-}{\varepsilon} &= 0,\\
\mu\frac{\partial C_3}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda A + 2\mu A_2) + \mathfrak{Y} + \frac{Y^+ Y^-}{\varepsilon} &= 0,\\
\mu\left(\frac{\partial C_2}{\partial x} + \frac{\partial C_1}{\partial y}\right) + \mathfrak{Z} + \frac{Z^+ + Z^-}{\varepsilon} &= 0,\\
-\mu C_2 + \frac{\varepsilon^2}{12}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\lambda B + 2\mu B_1) + \mu\frac{\partial D_3}{\partial y}\right] + \frac{\varepsilon^2}{12}\mathfrak{X}'_z + \frac{X^+ - X^-}{2} &= 0,\\
-\mu C_1 + \frac{\varepsilon^2}{12}\left[\mu\frac{\partial D_3}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda B + 2\mu B_2)\right] + \frac{\varepsilon^2}{12}\mathfrak{Y}'_z + \frac{Y^+ - Y^-}{2} &= 0,\\
-(\lambda A + 2\mu A_3) + \mu\frac{\varepsilon^2}{12}\left(\frac{\partial D_2}{\partial x} + \frac{\partial D_1}{\partial y}\right) + \frac{\varepsilon^2}{12}\mathfrak{Z}'_z + \frac{Z^+ - Z^-}{2} &= 0.
\end{aligned}$$

Formons enfin le système d'équations en u_i, v_i :

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned}
(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) + \mu\Delta u_1 + \lambda\frac{\partial w_2}{\partial x} &= 0,\\
(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) + \mu\Delta v_1 + \lambda\frac{\partial w_2}{\partial y} &= 0,\\
\mu\varepsilon\left(\Delta w_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\right) &= p,\\
\mu\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + u_2\right) - \frac{\varepsilon^2}{12}\left[(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\right) + \mu\Delta u_2\right] &= 0,\\
\mu\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + v_2\right) - \frac{\varepsilon^2}{12}\left[(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\right) + \mu\Delta v_2\right] &= 0,\\
\lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + w_2\right) + 2\mu w_2 - \mu\frac{\varepsilon^2}{12}\Delta w_2 &= -p.
\end{aligned}\right.$$

Nous nous sommes bornés à l'écrire pour le cas fréquent où l'on néglige les forces massiques dues à la pesanteur, mais où l'on tient compte d'une pression verticale unitaire p sur la face supérieure. Le symbole Δ désigne le laplacien à deux termes, en x et y. On peut remarquer que les première, deuxième et sixième équations ne contiennent que les trois fonctions inconnues u_1, v_1 w_2, tandis que les troisième, quatrième et cinquième équations ne contiennent que u_2, v_2, w_1.

Le calcul symbolique permet, en un sens, de résoudre de tels systèmes. Nous allons écrire successivement l'équation qui fournit v_1 quand u_1 et w_2 sont connus, l'équation qui donne u_1 quand w_2 est connu, et enfin l'équation à laquelle satisfait w_2. Pour n'avoir que des calculs algébriques d'élimination, désignons par X, Y les deux opérateurs différentiels $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}$. Grâce à ces nouvelles notations, le système en u_1, v_1, w_2 prend l'aspect suivant :

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned}
[(\lambda+\mu)X^2 + \mu\Delta]u_1 + (\lambda+\mu)XY v_1 + \lambda X w_2 &= 0,\\
(\lambda+\mu)XY u_1 + [(\lambda+\mu)Y^2 + \mu\Delta]v_1 + \lambda Y w_2 &= 0,\\
\lambda X u_1 + \lambda Y v_1 + \left(\lambda + 2\mu - \mu\frac{\varepsilon^2}{12}\Delta\right)w_2 &= -p.
\end{aligned}\right.$$

La première équation du système (10) donne v_1. Nous la considérons comme une équation du premier degré en v_1 et nous la résolvons comme telle, mais en prenant soin de ne jamais diviser par un opérateur différentiel, pour pouvoir interpréter plus simplement les résultats :

$$(\lambda+\mu)\,XY\,v_1 = -[(\lambda+\mu)\,X^2+\mu\Delta]\,u_1 - \lambda X\,w_2. \tag{11}$$

Portons la valeur de v_1 ainsi trouvée dans la deuxième équation du système (10), ou plus exactement, éliminons v_1 entre la première et la seconde équation, sans introduire de dénominateurs, comme s'il s'agissait d'équations linéaires. Nous formons ainsi l'équation en u_1 :

$$(\lambda+2\mu)\,\Delta^2 u_1 = -\lambda X\,\Delta w_2.$$

ou encore, $\mathcal{H}_1$ étant une fonction harmonique arbitraire,

$$(\lambda+2\mu)\,\Delta u_1 = -\lambda X\,w_2 + \mathcal{H}_1. \tag{12}$$

Si l'on porte cette valeur de u_1 dans la valeur de v_1 obtenue précédemment on trouve une autre valeur de u_1, que l'on aurait pu obtenir directement par la méthode d'élimination appliquée aux deux premières équations en u_1 et v_1 :

$$(\lambda+2\mu)\,\Delta^2 v_1 = -\lambda Y\,\Delta w_2.$$

ou encore

$$(\lambda+2\mu)\,\Delta v_1 = -\lambda Y\,w_2 + \mathcal{K}_1 \qquad (\Delta\mathcal{K}_1 = 0).$$

Mais ce procédé serait défectueux, car il semble introduire un arbitraire trop grand (fonctions arbitraires d'intégration) qu'on réduit d'ailleurs par un recours au système proposé.

Dans les relations qui donnent symboliquement u_1 et v_1, multiplions par X et Y respectivement, nous trouvons

$$(\lambda+2\mu)\,\Delta\,(Xu_1+Yv_1) = -\lambda\Delta w_2 + X\mathcal{H}_1 + Y\mathcal{K}_1.$$

Or, la même combinaison linéaire formée à partir des deux premières équations du système (10) donne

$$(\lambda+2\mu)\,\Delta\,(Xu_1+Yv_1) + \lambda\Delta w_2 = 0.$$

Par comparaison, nous constatons que la fonction harmonique $\mathcal{K}_1$ n'est pas arbitraire, comme nous l'avions annoncé, il est nécessaire que l'on ait

$$X\mathcal{H}_1 + Y\mathcal{K}_1 = 0.$$

Nous avons donc

$$(\lambda+2\mu)\,(Xu_1+Yv_1) + \lambda w_2 = \mathcal{L}_2 \qquad (\Delta\mathcal{L}_2 = 0).$$

Partant alors de la combinaison linéaire correcte entre u_1 et v_1, nous transportons dans la troisième relation du système (10) :

$$\mu\left[4(\lambda+\mu) - (\lambda+2\mu)\,\frac{\varepsilon^2}{12}\,\Delta\right] w_2 = -(\lambda+2\mu)\,p - \lambda\mathcal{L}_2. \tag{13}$$

Tirant, théoriquement, w_2 de cette équation, les équations (12) et (11) donnent u_1 et v_1. Bien entendu, il s'introduit un nombre important de fonctions arbitraires qui sont à déterminer grâce à des conditions aux limites dont nous n'entreprenons pas l'étude.

D'une manière analogue on écrit le système différentiel en u_2, v_2, w_1 :

$$(14)\quad \begin{cases} \left\{\mu - \frac{\varepsilon^2}{12}[(\lambda+\mu)X^2+\mu\Delta]\right\}u_2 - \frac{\varepsilon^2}{12}XY\,v_2 + \mu_1 X\,w_1 = 0, \\ -\frac{\varepsilon^2}{12}(\lambda+\mu)XY\,u_2 + \left\{\mu - \frac{\varepsilon^2}{12}[(\lambda+\mu)Y^2+\mu\Delta]\right\}v_2 + \mu Y\,w_1 = 0, \\ Xu_2 + Yv_2 + \Delta w_1 = \frac{p}{\mu\varepsilon}. \end{cases}$$

On forme comme précédemment les équations en v_2 et u_2 :

$$\frac{\varepsilon^2}{12}XY\,v_2 = \left\{\mu - \frac{\varepsilon^2}{12}[(\lambda+\mu)X^2+\mu\Delta]\right\}u_2 + \mu X\,w_1 = 0,$$

$$\left[\mu - \frac{\varepsilon^2}{12}(\lambda+2\mu)\Delta + \frac{\varepsilon^2}{144}(\lambda+2\mu)\Delta^2\right]u_2 = -\mu X\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{12}\Delta\right)w_1.$$

Si maintenant dans le système (14) nous multiplions la première équation par X, la seconde par Y, et que nous ajoutons membre à membre, nous formons la combinaison suivante :

$$\left[\mu - \frac{\varepsilon^2}{12}(\lambda+2\mu)\Delta\right](Xu_2+Yv_2) + \mu\Delta\,w_1 = 0,$$

qui permet l'élimination de u_2 et v_2 de la troisième équation du système (14) :

$$\frac{\varepsilon^2}{12}(\lambda+2\mu)\Delta^2 w_1 = \left[-\mu + \frac{\varepsilon^2}{12}(\lambda+2\mu)\Delta\right]\frac{p}{\mu\varepsilon}.$$

C'est une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre.

3. Vibration des plaques planes. — En mesurant, si c'est nécessaire, la déviation de chaque point à partir de la position d'équilibre sous l'action de charges données, nous pouvons supposer que ces dernières sont nulles, puisque le système différentiel est linéaire par rapport aux déplacements et par rapport aux charges. Les équations (7) permettent la mise en équations du problème de dynamique. Nous avons trois couples de relations telles que les suivantes :

$$\rho\varepsilon\frac{\partial^2 u_1}{\partial t_2} + \frac{\partial\varpi}{\partial u_1} = 0, \qquad \rho\frac{\varepsilon^3}{12}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \frac{\partial\varpi}{\partial u_2} = 0.$$

Les valeurs des dérivées du potentiel de forme sont les mêmes que dans le cas de la Statique. Nous pouvons écrire immédiatement les six équations du mou-

vement de la plaque, en l'absence de forces extérieures, avec l'approximation du second ordre :

$$\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)+\mu\Delta u_1+\lambda\frac{\partial w_2}{\partial x}=0,$$

$$\rho\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)+\mu\Delta v_1+\lambda\frac{\partial w_2}{\partial y}=0,$$

$$\rho\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}+\mu\left(\Delta w_1+\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)=0,$$

$$\rho\frac{\varepsilon^2}{12}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}+\mu\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}+u_2\right)-\frac{\varepsilon^2}{12}\left[(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)+\mu\Delta u_2\right]=0,$$

$$\rho\frac{\varepsilon^2}{12}\frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2}+\mu\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}+v_2\right)-\frac{\varepsilon^2}{12}\left[(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)+\mu\Delta v_2\right]=0,$$

$$\rho\frac{\varepsilon^2}{12}\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}+\lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)+(\lambda+2\mu)w_2-\mu\frac{\varepsilon^2}{12}\Delta w_2=0.$$

Comme précédemment, ce système se décompose en deux systèmes partiels où les fonctions inconnues sont, d'une part u_1, v_1, w_2, et d'autre part u_2, v_2, w_1.

Bornons-nous à une étude rapide des vibrations propres, celles pour lesquelles

$$u_1=\mathfrak{U}_1 e^{i\omega t},\qquad u_2=\mathfrak{U}_2 e^{i\omega t},\qquad \ldots,$$

ω étant une constante que nous déterminerons ultérieurement. Les six nouvelles fonctions inconnues sont solutions des deux systèmes suivants :

$$\begin{cases}[-\rho\omega^2+(\lambda+\mu)X^2+\mu\Delta]u_1+(\lambda+\mu)XY v_1+\lambda X w_2=0,\\ (\lambda+\mu)XY u_1+[-\rho\omega^2+(\lambda+\mu)Y^2+\mu\Delta]v_1+\lambda Y w_2=0,\\ \lambda(Xu_1+Yv_1)+\left[(\lambda+2\mu)-\dfrac{\varepsilon^2}{12}(\rho\omega^2+\mu\Delta)\right]w_2=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left\{\mu-\dfrac{\varepsilon^2}{12}[(\lambda+\mu)X^2+\rho\omega^2+\mu\Delta]\right\}u_2-\dfrac{\varepsilon^2}{12}(\lambda+\mu)XY v_2+\mu X w_1=0,\\ -\dfrac{\varepsilon^2}{12}(\lambda+\mu)XY u_2+\left\{\mu-\dfrac{\varepsilon^2}{12}[(\lambda+\mu)Y^2+\rho\omega^2+\mu\Delta]\right\}v_2+\mu Y w_1=0,\\ \mu(Xu_2+Yv_2)+(\mu\Delta-\rho\omega^2)w_1=0.\end{cases}$$

La résolution symbolique de ces deux systèmes s'opère comme dans les cas précédents. Nous donnons seulement les équations auxquelles satisfont w_1 et w_2

$$\left\{\rho\omega^2\left[-(\lambda+2\mu)+\frac{\varepsilon^2}{12}\rho\omega^2\right]+(\lambda+\mu)\left[4\mu-\frac{\varepsilon^2}{12}\rho\omega^2\right]\Delta-\frac{\varepsilon^2}{12}\mu(\lambda+2\mu)\Delta^2\right\}w_1=0,$$

$$\left[-\mu\rho\omega^2+\frac{\varepsilon^2}{12}\rho^2\omega^4\Delta-\frac{\varepsilon^2}{12}\mu(\lambda+2\mu)\Delta^2\right]w_2=0.$$

Les systèmes d'équations étant linéaires et homogènes, en tenant compte de conditions sur les frontières, on trouve la seule solution identiquement nulle, sauf si la constante ω prend des valeurs bien déterminées. Nous n'abordons pas l'étude de ce dernier problème.

4. Le potentiel de forme en variables quelconques. — On parvient de différentes manières au potentiel de forme calculé en variables quelconques, suivant les principes de base adoptés. On peut relire à ce sujet le chapitre X des *Tenseurs en Mécanique et en Élasticité* de Léon Brillouin plus spécialement consacré à l'Élasticité. Nous nous proposons ici de parvenir au but en partant de formules usuelles et en leur donnant un caractère tensoriel, en nous réservant de reprendre ailleurs la notion d'énergie en Mécanique.

On sait que le double de l'énergie nécessaire pour produire une déformation de composantes rectangulaires u, v, w s'exprime ainsi

$$2\varpi = \iiint [\lambda (e_1 + e_2 + e_3)^2 + 2\mu (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) + 4\mu (g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)]\, dx\, dy\, dz,$$

avec les coefficients suivants de la déformation :

$$e_1 = u'_x, \qquad 2g_1 = w'_y + v'_z, \qquad \ldots,$$

λ et μ sont les coefficients de Lamé. Les notations données ci-dessus pour les coefficients de la déformation ne sont vraiment commodes qu'en axes rectangulaires, car elles ne font pas apparaître le caractère tensoriel de l'ensemble de ces coefficients. En surlignant les quantités évaluées en axes rectangulaires, nous posons

$$e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i},$$

de sorte que la correspondance entre les anciennes notations et les suivantes se fait ainsi :

$$\bar{e}_{11} = 2e_1, \qquad \bar{e}_{23} = 2g_1, \qquad \ldots.$$

En axes rectangulaires nous pouvons écrire le potentiel de forme de la manière suivante :

$$2\varpi = \iiint \left[\frac{\lambda}{4}\left(\overline{e_{11}}^2 + \overline{e_{22}}^2 + \overline{e_{33}}^2\right) + \frac{\mu}{2}\left(\overline{e_{11}}^2 + \overline{e_{22}}^2 + \overline{e_{33}}^2\right) + \mu\left(\overline{e_{23}}^2 + \overline{e_{31}}^2 + \overline{e_{12}}^2\right)\right] dx\, dy\, dz$$

La notation ci-dessus est mauvaise car le caractère tensoriel de diverses grandeurs apparaît mal. On sait qu'en axes rectangulaires λ et μ, au point de vue dimensionnel, sont le quotient d'une force par une surface. Un produit tel que $\lambda\, dx\, dy\, dz$ est homogène au produit d'une force par une longueur, c'est-à-dire, à un travail. Or, un travail est un scalaire, donc strictement invariant, comme toute énergie. Il est donc nécessaire que le crochet qui figure dans ϖ soit aussi un invariant. Comme il s'agit pour l'instant d'axes rectangulaires, la distinction entre covariance et contravariance n'est pas essentielle, et nous pouvons encore écrire

$$2\varpi = \iiint \left[\frac{\lambda}{4}\left(\bar{e}_1^1 + \bar{e}_2^2 + \bar{e}_3^3\right)^2 + \frac{\mu}{2}\left(\overline{e_1^1}^2 + \overline{e_2^2}^2 + \overline{e_3^3}^2\right) + \mu\left(\overline{e_2^3}^2 + \overline{e_3^1}^2 + \overline{e_1^2}^2\right)\right] dx\, dy\, dz.$$

Pour parvenir à un résultat d'écriture plus simple, introduisons les scalaires suivants :

$$\bar{e}_i^i = \bar{e}_1^1 + \bar{e}_2^2 + \bar{e}_3^3,$$
$$\bar{e}_i^k \bar{e}_k^i = \left(\bar{e}_1^{1\,2} + \bar{e}_2^{2\,2} + \bar{e}_3^{3\,2}\right) + 2\left(\bar{e}_2^{3\,2} + \bar{e}_3^{1\,2} + \bar{e}_1^{2\,2}\right).$$

Nous avons alors, toujours en axes rectangulaires,

$$2\varpi = \iiint \left(\frac{\lambda}{4}\bar{e}_i^{i\,2} + \frac{\mu}{2}\bar{e}_i^k \bar{e}_k^i\right) d\tau, \qquad d\tau = dx\,dy\,dz.$$

Nous ne ferons pas dans la suite la transformation tensorielle sur λ et μ qui sont des densités scalaires, puisque nous avons remarqué que leur produit par l'élément de volume $dx\,dy\,dz$, capacité scalaire, est un scalaire. Nous ne ferons le changement nécessaire que sur l'élément de volume, et non sur λ et μ dont nous conserverons la valeur en axes rectangulaires.

Nous avons alors en axes quelconques la valeur suivante du potentiel de forme

$$2\varpi = \iiint \left[\frac{\lambda}{4}(e_i^i)^2 + \frac{\mu}{2}e_i^k e_k^i\right] d\tau, \qquad d\tau = \frac{D(x, y, z)}{D(x^1, x^2, x^3)}\,dx^1\,dx^2\,dx^3.$$

Notons que $d\tau$ est l'élément de volume $dx\,dy\,dz$ et non la capacité scalaire $dx^1\,dx^2\,dx^3$.

Pour avoir une évaluation définitive du potentiel de forme, il nous reste à calculer les sommes contractées e_i^i et $e_i^k e_k^i$. Si nous nous reportons à la définition des $\overline{e_{ij}}$, nous pouvons, en axes rectangulaires, introduire des dérivations covariantes, identiques aux dérivations ordinaires :

$$\bar{e}_{ij} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}^i} = \frac{D\bar{u}_i}{D\bar{x}^j} + \frac{D\bar{u}_j}{D\bar{x}^i}.$$

Les expressions écrites ont un caractère tensoriel correct qui permet tous les changements d'axes. Nous avons en particulier

$$e_{ij} = \frac{Du_i}{Dx^j} + \frac{Du_j}{Dx^i}. \tag{14}$$

C'est la formule (X.44) de L. Brillouin. Si nous introduisons les composantes g^{jk} du tenseur métrique fondamental, nous pouvons obtenir les composantes mixtes de la déformation

$$e_i^k = g^{jk} e_{ij} = g^{jk}\frac{Du_i}{Dx^j} + g^{jk}\frac{Du_j}{Dx^i}.$$

Dans le second terme faisons pénétrer g^{jk} sous la dérivation; nous savons qu'il se comporte comme une constante : On voit ainsi apparaître les composantes contravariantes du déplacement. Employons-les systématiquement pour calculer les composantes mixtes de la déformation

$$e_i^k = g^{jk} g_{ih}\frac{Du^h}{Dx^j} + \frac{Du^k}{Dx^i}.$$

De ces formules nous déduisons en particulier la dilatation

$$e_i^j = g^{jh} g_{ih} \frac{Du^h}{Dx^j} + \frac{Du^i}{Dx^i} = 2 \frac{Du^i}{Dx^i}.$$

Nous avons de même le second invariant,

$$e_i^k e_k^i = \left(g^{jk} g_{ih} \frac{Du^h}{Dx^j} + \frac{Du^k}{Dx^i} \right) \left(g^{\alpha i} g_{k\beta} \frac{Du^\beta}{Dx^\alpha} + \frac{Du^i}{Dx^k} \right)$$
$$= g^{jk} g_{ih} g^{\alpha i} g_{k\beta} \frac{Du^h}{Dx^j} \frac{Du^\beta}{Dx^\alpha} + g^{jk} g_{ih} \frac{Du^h}{Dx^j} \frac{Du^i}{Dx^k} + g^{\alpha i} g_{k\beta} \frac{Du^\beta}{Dx^\alpha} \frac{Du^k}{Dx^i} + \frac{Du^k}{Dx^i} \frac{Du^i}{Dx^k}.$$

On constate que le premier et le quatrième termes sont identiques. On fait la même constatation sur le deuxième et le troisième, après avoir remplacé les indices muets j, k, i, h par α, i, k, β. Nous parvenons à la valeur suivante :

$$(15) \quad 2\varpi = \iiint \left[\lambda \left(\frac{Du^i}{Dx^i} \right)^2 + \mu \left(g^{jk} g_{ih} \frac{Du^h}{Dx^j} \frac{Du^i}{Dx^k} + \frac{Du^k}{Dx^i} \frac{Du^i}{Dx^k} \right) \right] \frac{D(x, y, z)}{D(x^1, x^2, x^3)} dx^1 dx^2 dx^3.$$

qui fournit la valeur cherchée du potentiel de forme. Ultérieurement, nous aurons à préciser le tenseur métrique fondamental dont la connaissance permet de calculer les dérivées covariantes.

5. Vibrations des surfaces de révolution. — Considérons une surface de révolution autour de Oz, limitée soit à deux parallèles, soit à un seul parallèle, la surface rencontrant alors l'axe de révolution. Pour étudier les vibrations de la coque ainsi définie, nous supposons qu'elle est d'épaisseur constante et qu'il n'existe pas de forces extérieures. Nous employons le même raisonnement qu'au paragraphe 1 pour mettre le problème en équations, après avoir, au préalable, obtenu le potentiel de forme en coordonnées semi-polaires grâce aux résultats du paragraphe précédent. Ce dernier résultat peut-être obtenu à la suite d'un changement de variables et de composantes dans la valeur du potentiel de forme de l'espace euclidien à trois dimensions rectangulaires.

En coordonnées semi-polaires le carré de l'élément linéaire euclidien a pour expression

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \qquad (x^1 = r,\ x^2 = \theta,\ x^3 = z).$$

d'où le tableau des g_{ik} et celui des g^{ik} :

$$\| g_{ik} \| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \| g^{ik} \| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

On en déduit les symboles de Christoffel. Ils sont tous nuls, sauf

$$\Gamma_{12,2} = \Gamma_{21,2} = r, \qquad \Gamma_{22,1} = -r,$$
$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^1_{22} = -r,$$

On en déduit le tableau des dérivées covariantes des composantes contravariantes $\mathcal{U}^i$ du déplacement :

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{D\mathcal{U}^1}{Dx^1}=\dfrac{\partial\mathcal{U}^1}{\partial r}, & \dfrac{D\mathcal{U}^1}{Dx^2}=\dfrac{\partial\mathcal{U}^1}{\partial\theta}-r\mathcal{U}^2, & \dfrac{D\mathcal{U}^1}{Dx^3}=\dfrac{\partial\mathcal{U}^1}{\partial z}, \\
\dfrac{D\mathcal{U}^2}{Dx^1}=\dfrac{\partial\mathcal{U}^2}{\partial r}+\dfrac{\mathcal{U}^2}{r}, & \dfrac{D\mathcal{U}^2}{Dx^2}=\dfrac{\partial\mathcal{U}^2}{\partial\theta}+\dfrac{\mathcal{U}^1}{r}, & \dfrac{D\mathcal{U}^2}{Dx^3}=\dfrac{\partial\mathcal{U}^2}{\partial z}, \\
\dfrac{D\mathcal{U}^3}{Dx^1}=\dfrac{\partial\mathcal{U}^3}{\partial r}, & \dfrac{D\mathcal{U}^3}{Dx^2}=\dfrac{\partial\mathcal{U}^3}{\partial\theta}, & \dfrac{D\mathcal{U}^3}{Dx^3}=\dfrac{\partial\mathcal{U}^3}{\partial z}.
\end{array}$$

La formule (15) nous permet d'évaluer le potentiel de forme. Utilisant le jacobien

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)}=r,$$

nous trouvons

$$2\varpi=\iiint\Big\{\lambda\Big[\frac{\partial\mathcal{U}^1}{\partial r}+\frac{\partial\mathcal{U}^2}{\partial\theta}+\frac{\mathcal{U}^1}{r}+\frac{\partial\mathcal{U}^3}{\partial z}\Big]^2+2\mu\Big[\Big(\frac{\partial\mathcal{U}^1}{\partial r}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\mathcal{U}^2}{\partial\theta}+\frac{\mathcal{U}^1}{r}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\mathcal{U}^3}{\partial z}\Big)^2\Big]$$
$$+\mu\Big[\Big(r\frac{\partial\mathcal{U}^2}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\mathcal{U}^1}{\partial\theta}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\mathcal{U}^1}{\partial z}+\frac{\partial\mathcal{U}^3}{\partial r}\Big)^2+\Big(r\frac{\partial\mathcal{U}^2}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial\mathcal{U}^3}{\partial\theta}\Big)^2\Big]\Big\}r\,dr\,d\theta\,dz,$$

après avoir regroupé des termes, comme pour les coordonnées rectangulaires.

Désignons maintenant par R, Θ, Z, les coordonnées semi-polaires d'un point de la coque dont nous voulons étudier les vibrations. Prenons r, θ, coordonnées polaires de la projection du point considéré de la coque sur le plan xOy, comme paramètres sur la surface moyenne de la coque, et soit ζ la cote relative du point de la coque par rapport à la surface moyenne. r, θ, ζ sont donc trois paramètres pouvant servir à fixer la position d'un point de la coque. Entre R, Θ, Z et r, θ, ζ, nous avons les relations suivantes :

$$R=r,\qquad \Theta=\theta,\qquad Z=z+\zeta.$$

$z=z(r)$ est l'ordonnée sur la surface moyenne. Le paramètre ζ varie entre $+$ et $-h(r)$, h étant lié à l'épaisseur de la surface par la relation

$$2h=\varepsilon\sqrt{1+z'^2}.$$

Les accents désignent ici les dérivations par rapport à r, quand il s'agit de fonctions dépendant uniquement de r.

Dans une *approximation du premier ordre*, assez médiocre, mais sans doute meilleure que dans le cas analogue des poutres, nous admettons que $\mathcal{U}^1$, $\mathcal{U}^2$, $\mathcal{U}^3$ ne dépendent pas de ζ. Les trois dérivées en z sont donc nulles dans la région de l'espace qui nous intéresse. Nous avons alors le potentiel de forme particulier suivant :

$$2\varpi=\varepsilon\iint\Big\{\lambda\Big[\frac{\partial\mathcal{U}^1}{\partial r}+\frac{\partial\mathcal{U}^2}{\partial\theta}+\frac{\mathcal{U}^1}{r}\Big]^2+2\mu\Big[\Big(\frac{\partial\mathcal{U}^1}{\partial r}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\mathcal{U}^2}{\partial\theta}+\frac{\mathcal{U}^1}{r}\Big)^2\Big]$$
$$+\mu\Big[\Big(r\frac{\partial\mathcal{U}^2}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\mathcal{U}^1}{\partial\theta}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\mathcal{U}^3}{\partial r}\Big)^2+\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial\mathcal{U}^3}{\partial\theta}\Big)^2\Big]\Big\}r\sqrt{1+z'^2}\,dr\,d\theta,$$

que l'on obtient après avoir effectué l'intégration en ζ. Nous pouvons maintenant écrire les dérivées fonctionnelles du potentiel de forme

$$\frac{\partial\varpi}{\partial\mathcal{U}^1}=\frac{\lambda\varkappa}{r}\left(\frac{\partial\mathcal{U}^1}{\partial r}+\frac{\partial\mathcal{U}^2}{\partial\theta}+\frac{\mathcal{U}^1}{r}\right)+\frac{2\mu\varkappa}{r}\left(\frac{\partial\mathcal{U}^2}{\partial\theta}+\frac{\mathcal{U}^1}{r}\right)$$
$$-\frac{\partial}{\partial r}\varkappa\left[\lambda\left(\frac{\partial\mathcal{U}^1}{\partial r}+\frac{\partial\mathcal{U}^2}{\partial\theta}+\frac{\mathcal{U}^1}{r}\right)+2\mu\frac{\partial\mathcal{U}^1}{\partial r}\right]-\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\mu\varkappa}{r}\left(r\frac{\partial\mathcal{U}^2}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\mathcal{U}^1}{\partial\theta}\right)\right],$$
$$\frac{\partial\varpi}{\partial\mathcal{U}^2}=-\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\mu\varkappa}{r}\left(r\frac{\partial\mathcal{U}^2}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\mathcal{U}^1}{\partial\theta}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial\theta}\varkappa\left[\lambda\left(\frac{\partial\mathcal{U}^1}{\partial r}+\frac{\partial\mathcal{U}^2}{\partial\theta}+\frac{\mathcal{U}^1}{r}\right)+2\mu\left(\frac{\partial\mathcal{U}^2}{\partial\theta}+\frac{\mathcal{U}^1}{r}\right)\right],$$
$$\frac{\partial\varpi}{\partial\mathcal{U}^3}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu\varkappa\frac{\partial\mathcal{U}^3}{\partial r}\right)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\mu\varkappa}{r^2}\frac{\partial\mathcal{U}^3}{\partial\theta}\right),\qquad\varkappa=\varepsilon r\sqrt{1+z'^2}.$$

Les composantes contravariantes de la vitesse d'un point de la coque sont $\frac{\partial\mathcal{U}^i}{\partial t}$, et par suite, le carré scalaire de la vitesse vaut

$$\left(\frac{\partial\mathcal{U}^1}{\partial t}\right)^2+r^2\left(\frac{\partial\mathcal{U}^2}{dt}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{U}^3}{\partial t}\right)^2.$$

Nous pouvons alors évaluer la force vive de la coque sous forme d'intégrale triple, puis nous effectuons l'intégration en ζ, ce qui nous conduit au résultat suivant :

$$2\,\mathrm{T}=\iint\rho\left[\left(\frac{\partial\mathcal{U}^1}{\partial t}\right)^2+r^2\left(\frac{\partial\mathcal{U}^2}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{U}^3}{\partial t}\right)^2\right]2h\,r\,dr\,d\theta,$$

où ρ représente la densité cubique de la coque, que nous supposons constante. $\mathcal{U}^1$, $\mathcal{U}^2$, $\mathcal{U}^3$ sont alors solution du système différentiel suivant :

$$(16)\qquad\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\rho\varkappa\dfrac{\partial\mathcal{U}^1}{\partial t}\right)+\dfrac{\partial\varpi}{\partial\mathcal{U}^1}=0,\qquad\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\rho\varkappa r^2\dfrac{\partial\mathcal{U}^2}{\partial t}\right)+\dfrac{\partial\varpi}{\partial\mathcal{U}^2}=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\rho\varkappa\dfrac{\partial\mathcal{U}^3}{\partial t}\right)+\dfrac{\partial\varpi}{\partial\mathcal{U}^3}=0,\end{cases}$$

où les dérivées du potentiel de forme ont les valeurs précédemment calculées.

Admettons maintenant que la vibration de la surface de révolution ait lieu de sorte que le mouvement soit périodique :

$$\mathcal{U}^k(r,0,t)=\mathcal{V}^k(r,0)\,e^{i\omega t}\qquad(\omega=\text{const.}).$$

Les fonctions $\mathcal{V}^k$ satisfont alors au système différentiel suivant :

$$(17)\qquad\begin{cases}\rho\omega^2 r\sqrt{1+z'^2}\,\mathcal{V}^1-\lambda\sqrt{1+z'^2}\left(\dfrac{\partial\mathcal{V}^1}{\partial r}+\dfrac{\partial\mathcal{V}^2}{\partial\theta}+\dfrac{\mathcal{V}^1}{r}\right)-2\mu\sqrt{1+z'^2}\left(\dfrac{\partial\mathcal{V}^2}{\partial\theta}+\dfrac{\mathcal{V}^1}{r}\right)\\ \quad+\dfrac{\partial}{\partial r}\left\{r\sqrt{1+z'^2}\left[\lambda\left(\dfrac{\partial\mathcal{V}^1}{\partial r}+\dfrac{\partial\mathcal{V}^2}{\partial\theta}+\dfrac{\mathcal{V}^1}{r}\right)+2\mu\dfrac{\partial\mathcal{V}^1}{\partial r}\right]\right\}\\ \qquad\qquad+\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left[\mu\sqrt{1+z'^2}\left(r\dfrac{\partial\mathcal{V}^2}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\mathcal{V}^1}{\partial\theta}\right)\right]=0,\\ \rho\omega^2 r^3\sqrt{1+z'^2}\,\mathcal{V}^2+\dfrac{\partial}{\partial r}\left[\mu r^2\sqrt{1+z'^2}\left(r\dfrac{\partial\mathcal{V}^2}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\mathcal{V}^1}{\partial\theta}\right)\right]\\ \quad-\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left\{r\sqrt{1+z'^2}\left[\lambda\left(\dfrac{\partial\mathcal{V}^1}{\partial r}+\dfrac{\partial\mathcal{V}^2}{\partial\theta}+\dfrac{\mathcal{V}^1}{r}\right)+2\mu\left(\dfrac{\partial\mathcal{V}^2}{\partial\theta}+\dfrac{\mathcal{V}^1}{r}\right)\right]\right\}=0,\\ \qquad\dfrac{1}{r\sqrt{1+z'^2}}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\sqrt{1+z'^2}\dfrac{\partial\mathcal{V}^3}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\mathcal{V}^3}{\partial\theta^2}+\dfrac{\rho\omega^2}{\mu}\mathcal{V}^3=0.\end{cases}$$

On constate la disparition de l'épaisseur ε des équations, ce qui ne semble pas conforme à l'expérience, mais il se pourrait peut être que pour des épaisseurs très faibles ce résultat puisse être considéré comme acceptable. Dans le système précédent les deux premières équations forment un système à deux inconnues $\mathcal{V}^1$ et $\mathcal{V}^2$, tandis que la troisième équation ne renferme que la seule inconnue $\mathcal{V}^3$.

Comme application des équations précédentes, proposons-nous de trouver la période fondamentale d'une cloche dont le sommet et le plan tangent en ce point sont maintenus fixes.

Ce problème est différent de celui où l'on étudie les vibrations d'une cloche sonnant à la volée, qui oscille autour d'un axe horizontal fixe encastré dans la cloche, sous l'action de la pesanteur. Il est vraisemblable que les résultats quantitatifs sont différents.

Nous admettons, dans le problème proposé, que la vibration a lieu dans le plan méridien de chaque point, $\mathcal{V}^2 = 0$, et que la répartition des déplacements soit de révolution; $\mathcal{V}^1$ et $\mathcal{V}^3$ sont des fonctions de r seul, indépendantes de θ. Le système différentiel ci-dessus se simplifie, et se réduit aux deux équations suivantes :

$$\rho\omega^2 r\mathcal{V}^1 - \lambda\left(\frac{d\mathcal{V}^1}{dr} + \frac{\mathcal{V}^1}{r}\right) - \mu\frac{\mathcal{V}^1}{r} + \frac{1}{\sqrt{1+z'^2}}\frac{d}{dr}\left\{r\sqrt{1+z'^2}\left[\lambda\left(\frac{d\mathcal{V}^1}{dr} + \frac{\mathcal{V}^1}{r}\right) + 2\mu\frac{d\mathcal{V}^1}{dr}\right]\right\} = 0,$$

$$\frac{1}{r\sqrt{1+z'^2}}\frac{d}{dr}\left(r\sqrt{1+z'^2}\frac{d\mathcal{V}^3}{dr}\right) + \frac{\rho\omega^2}{\mu}\mathcal{V}^3 = 0,$$

ou, après avoir ordonné,

$$\frac{d^2\mathcal{V}^1}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{z'z''}{1+z'^2}\right)\frac{d\mathcal{V}^1}{dr} + \frac{\mathcal{V}^1}{\lambda+2\mu}\left[\rho\omega^2 - \frac{\lambda+\mu}{r^2} + \frac{\lambda z'z''}{r(1+z'^2)}\right] = 0, \tag{18}$$

$$\frac{d^2\mathcal{V}^3}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{z'z''}{1+z'^2}\right)\frac{d\mathcal{V}^3}{dr} + \frac{\rho\omega^2}{\mu}\mathcal{V}^3 = 0. \tag{19}$$

Le problème de Mathématiques que nous avons à résoudre actuellement se pose ainsi : Pour chacune des équations précédentes déterminer une constante ω de manière que chacune de ces équations possède une solution qui satisfasse à des conditions aux limites que nous allons énoncer. Il est à présumer que les deux nombres ω que l'on détermine ainsi sont en général différents (il s'agit bien entendu du plus petit nombre que l'on puisse ainsi déterminer, car les conditions aux limites donnent une infinité de nombres ω, le plus petit de chaque série correspond à la période fondamentale). Une cloche peut être considérée comme bien construite si les deux périodes fondamentales, correspondant à chacune des équations différentielles sont égales.

La cloche étant parfaitement encastrée en son sommet, cela entraîne la fixité du sommet $\mathcal{V}^1 = \mathcal{V}^3 = 0$ pour $r = 0$, ainsi que la fixité de la tangente à la

méridienne $\frac{d\mathcal{V}^3}{dr} = 0$. D'autre part, au bord libre de la cloche les tensions internes doivent être nulles. Comme la déformation est de révolution il suffit d'écrire cette condition lorsque $\theta = 0$, r ayant sa valeur maximum. Nous allons calculer les tensions internes en partant des composantes contravariantes du déplacement, $\mathcal{U}^1$, $\mathcal{U}^2$, $\mathcal{U}^3$, en passant ensuite par les composantes suivant les axes qui s'introduisent normalement dans l'étude des coordonnées semi-polaires, $\mathcal{U}^1$, $r\mathcal{U}^2$, $\mathcal{U}^3$, puis par les composantes rectangulaires

$$(\mathcal{V}^1 \cos\theta - r\mathcal{V}^2 \sin\theta)\, e^{i\omega t}, \quad (\mathcal{V}^1 \sin\theta + \mathcal{V}^2 \cos\theta)\, e^{i\omega t}, \quad \mathcal{V}^3 e^{i\omega t}.$$

Or $\mathcal{V}^1$ et $\mathcal{V}^3$ sont des fonctions de r, et $\mathcal{V}^2 = 0$. Utilisant les différentielles suivantes :

$$dr = \cos\theta\, dx + \sin\theta\, dy, \qquad r\, d\theta = -\sin\theta\, dx + \cos\theta\, dy,$$

il nous est possible d'obtenir les coefficients de la déformation. On en déduit le tenseur des efforts, et en particulier

$$N_1 = \left[\lambda\left(\frac{d\mathcal{V}^1}{dr} + \frac{\mathcal{V}^1}{r}\right) + 2\mu\left(\frac{d\mathcal{V}^1}{dr}\cos^2\theta + \frac{\mathcal{V}^1}{r}\sin^2\theta\right)\right] e^{i\omega t},$$

$$T_3 = 2\mu\left(\frac{d\mathcal{V}^1}{dr} - \frac{\mathcal{V}^1}{r}\right)\sin\theta\cos\theta\, e^{i\omega t},$$

$$T_2 = \mu\frac{d\mathcal{V}^3}{dr}\cos\theta\, e^{i\omega t}.$$

Ces quantités permettent de calculer les composantes de la tension en un point où r est maximum et θ nul :

$$N_1 = \left[(\lambda + 2\mu)\frac{d\mathcal{V}^1}{dr} + \lambda\frac{\mathcal{V}^1}{r}\right] e^{i\omega t}, \qquad T_3 = 0, \qquad T_2 = \mu\frac{d\mathcal{V}^3}{dr} e^{i\omega t}.$$

Les expressions ci-dessus sont nulles et nous obtenons ainsi les conditions aux limites cherchées. En résumé, pour l'équation (18), nous recherchons un nombre ω tel qu'il existe une solution pour laquelle

$$\mathcal{V}^1(0) = 0; \qquad (\lambda + 2\mu)\frac{d\mathcal{V}^1}{dr} + \lambda\frac{\mathcal{V}^1}{r} = 0 \qquad \text{pour} \quad r_{\max},$$

tandis que pour l'équation (19) nous recherchons une solution satisfaisant aux conditions aux limites suivantes :

$$\mathcal{V}^3(0) = 0; \qquad \frac{d\mathcal{V}^3}{dr} = 0 \qquad \text{pour} \quad r = 0 \quad \text{et} \quad r_{\max}.$$

Les deux équations (18) et (19) se ramènent à l'équation de Bessel lorsque

$$z = \int \sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^{2k} - 1}\, dr,$$

a et k étant des constantes. $k=0$ correspond au cône de révolution. Pour toutes ces coques, l'arc de la méridienne est br^{k+1} ($b=$ const.).

Recherchons maintenant des solutions du système (17) qui soient de la forme suivante :

$$(20)\qquad \mathcal{V}^1=\varphi(r)\,e^{ni\theta},\qquad \mathcal{V}^2=i\chi(r)\,e^{ni\theta},\qquad \mathcal{V}^3=\psi(r)\,e^{ni\theta},$$

n étant un entier assurant la périodicité du déplacement sur la surface de révolution. Admettant, ce que nous allons bientôt établir, qu'il existe des fonctions réelles φ, χ, ψ telles que les fonctions $\mathcal{V}^1, \mathcal{V}^2, \mathcal{V}^3$ qu'on en déduit par les formules précédentes soient solutions du problème général des vibrations d'une surface de révolution, on peut trouver des solutions réelles à partir de $\mathcal{V}^1, \mathcal{V}^2, \mathcal{V}^3$ de la manière suivante. Le remplacement de i en $-i$ dans les formules (20) fournit une deuxième solution complexe $\overline{\mathcal{V}}^1, \overline{\mathcal{V}}^2, \overline{\mathcal{V}}^3$. Comme le système proposé est linéaire, on peut former les combinaisons

$$\frac{1}{2}(\mathcal{V}^1+\overline{\mathcal{V}}^1),\quad \frac{1}{2}(\mathcal{V}^2+\overline{\mathcal{V}}^2),\quad \frac{1}{2}(\mathcal{V}^3+\overline{\mathcal{V}}^3),$$

$$\frac{1}{2i}(\mathcal{V}^1-\overline{\mathcal{V}}^1),\quad \frac{1}{2i}(\mathcal{V}^2-\overline{\mathcal{V}}^2),\quad \frac{1}{2i}(\mathcal{V}^3-\overline{\mathcal{V}}^3),$$

qui sont réelles, et satisfont encore aux équations du problème.

Transportant les valeurs des $\mathcal{V}^k$ dans le système (17), on constate que φ et χ sont solution du système différentiel réel

$$\frac{1}{\sqrt{1+z'^2}}\frac{d}{dr}\left\{r\sqrt{1+z'^2}\left[\lambda(\varphi'-n\chi)+(\lambda+2\mu)\frac{\varphi}{r}\right]\right\}$$
$$-n\mu\left(r\chi'+\frac{n\varphi}{r}\right)-\lambda\varphi'+(\lambda+2\mu)\left(n\chi-\frac{\varphi}{r}\right)+\rho\omega^2 r\varphi=0,$$

$$\frac{\mu}{\sqrt{1+z'^2}}\frac{d}{dr}\left[r^2\sqrt{1+z'^2}\left(r\chi'+\frac{n\varphi}{r}\right)\right]+nr\left[\lambda\varphi'+(\lambda+2\mu)\left(-n\chi+\frac{\varphi}{r}\right)\right]+\rho\omega^2 r^3\chi=0,$$

et que ψ est solution de l'équation différentielle

$$\frac{1}{\sqrt{1+z'^2}}\frac{d}{dr}(r\sqrt{1+z'^2}\psi')+\left(\frac{\rho\omega^2 r}{\mu}-\frac{n^2}{r}\right)\psi=0,$$

ou

$$\psi''+\left(\frac{1}{r}+\frac{z'z''}{1+z'^2}\right)\psi'+\left(\frac{\rho\omega^2}{\mu}-\frac{n^2}{r^2}\right)=0.$$

Ces équations étant *réelles*, elles possèdent bien des solutions réelles comme nous l'avions affirmé.

Il resterait ensuite à trouver les solutions de ces équations différentielles qui vérifient les conditions aux limites précédemment données. En particulier, les conditions sur le bord libre de la cloche peuvent s'obtenir de la manière suivante. Les composantes rectangulaires du déplacement d'un point de la

coque s'expriment en fonction des composantes contravariantes de la manière indiquée dans la recherche de la période fondamentale :

$$u = (\mathcal{V}^1 \cos\theta - r\mathcal{V}^2 \sin\theta)\, e^{i\omega t}, \qquad v = (\mathcal{V}^1 \sin\theta + r\mathcal{V}^2 \cos\theta)\, e^{i\omega t}, \qquad w = \mathcal{V}^3 e^{i\omega t},$$

les $\mathcal{V}^i$ étant donnés par les formules (20). Nous trouvons ainsi

$$u = (\varphi \cos\theta - ir\chi \sin\theta)\, e^{ni\theta + i\omega t}, \qquad v = (\varphi \sin\theta + ir\chi \cos\theta)\, e^{ni\theta + i\omega t}, \qquad w = \psi\, e^{ni\theta + i\omega t},$$

ce qui nous permet de déterminer le tableau des composantes du tenseur des tensions

$$N_1 = \lambda\left(\varphi' + \frac{\varphi}{r} - n\chi\right) + 2\mu\left[\varphi' \cos^2\theta + \left(\frac{\varphi}{r} - n\chi\right)\sin^2\theta - i\left(r\chi' + \frac{n\varphi}{r}\right)\sin\theta\cos\theta\right],$$

$$N_2 = \lambda\left(\varphi' + \frac{\varphi}{r} - n\chi\right) + 2\mu\left[\varphi' \sin^2\theta + \left(\frac{\varphi}{r} - n\chi\right)\cos^2\theta + i\left(r\chi' + \frac{n\varphi}{r}\right)\sin\theta\cos\theta\right],$$

$$N_3 = \lambda\left(\varphi' + \frac{\varphi}{r} - n\chi\right),$$

$$T_1 = \mu\left(\psi' \sin\theta + ni\frac{\psi}{r}\cos\theta\right),$$

$$T_2 = \mu\left(\psi' \cos\theta - ni\frac{\psi}{r}\sin\theta\right),$$

$$T_3 = \mu\left[2\left(\varphi' - \frac{\varphi}{r} + n\chi\right)\sin\theta\cos\theta + i\left(\frac{n\varphi}{r} + r\chi'\right)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\right].$$

Il nous intéresse de connaître les composantes de la tension relative à la coupure ayant pour cosinus directeurs $\cos\theta$, $\sin\theta$, o. Ce sont les trois fonctions suivantes :

$$N_1 \cos\theta + T_3 \sin\theta, \quad T_3 \cos\theta + N_2 \sin\theta, \quad T_2 \cos\theta + T_1 \sin\theta$$

qui doivent être nulles quel que soit θ :

$$\left[\lambda\left(\varphi' + \frac{\varphi}{r} - n\chi\right) + 2\mu\varphi'\right]\cos\theta - \mu i\left(\frac{n\varphi}{r} + r\chi'\right)\sin\theta,$$

$$\left[\lambda\left(\varphi' + \frac{\varphi}{r} - n\chi\right) + 2\mu\varphi'\right]\sin\theta + \mu i\left(\frac{n\varphi}{r} + r\chi'\right)\cos\theta, \quad \mu\psi'.$$

Pour le rayon extrême de la cloche nous devons donc avoir les trois conditions suivantes :

$$\lambda\left(\varphi' + \frac{\varphi}{r} - n\chi\right) + 2\mu\varphi' = 0,$$

$$\frac{n\varphi}{r} + r\chi' = 0, \qquad \psi' = 0.$$

6. Vibration des coques de révolution. Seconde approximation. — Désignons

par R, Θ, Z les coordonnées semi-polaires d'un point de la coque, et soit $z = z(r)$ l'équation de la méridienne de la surface moyenne. Exprimons les coordonnées R, Θ, Z d'un point de la coque au moyen de trois paramètres $r, 0, \zeta$ de la manière suivante : r et 0 sont les coordonnées polaires de la projection du point considéré sur le plan xOy, et ζ représente la cote relative de ce point par rapport à la surface moyenne,

$$R = r, \qquad \Theta = 0, \qquad Z = z(r) + \zeta.$$

Comme au paragraphe 1, ζ varie entre $-h$ et $+h(r)$, h étant lié à l'épaisseur ε de la surface par la relation (2),

$$2h = \varepsilon\sqrt{1 + z'^2}.$$

Les accents désignent ici les dérivations par rapport à r lorsqu'il s'agit de fonctions qui ne dépendent que de r. Dans une approximation du second ordre on admet que l'on a une bonne représentation des composantes du déplacement en prenant

$$\mathfrak{U}^i = u^i(r, \theta) + \zeta\varphi^i(r, \theta).$$

En remarquant que

$$dr = dR, \qquad d\theta = d\Theta, \qquad d\zeta = dZ - z'\,dR,$$

on peut appliquer les résultats obtenus au début du paragraphe 5 au calcul du potentiel de forme. On obtient

$$2\varpi = \iiint [\lambda(A + \zeta B)^2 + 2\mu\Sigma(A_i + \zeta B_i)^2 + \mu\Sigma(C_i + \zeta D_i)^2] r\,dr\,d\theta\,d\zeta,$$

après avoir posé

$$A = \Sigma A_i, \qquad B = \Sigma B_i,$$

$$A_1 = \frac{\partial u^1}{\partial r} - z'\varphi^1, \qquad A_2 = \frac{\partial u^2}{\partial \theta} + \frac{u^1}{r}, \qquad A_3 = \varphi^3,$$

$$B_1 = -\frac{\partial \varphi^1}{\partial r}, \qquad B_2 = \frac{\partial \varphi^2}{\partial \theta} + \frac{\varphi^1}{r}, \qquad B_3 = 0,$$

$$C_1 = r\frac{\partial u^2}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u^1}{\partial \theta} - z'\varphi^2, \qquad C_2 = \varphi^1 + \frac{\partial u^3}{\partial r} - z'\varphi^3, \qquad C_3 = r\varphi^2 + \frac{1}{r}\frac{\partial u^3}{\partial \theta},$$

$$D_1 = \frac{\partial \varphi^2}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi^1}{\partial \theta}, \qquad D_2 = \frac{\partial \varphi^3}{\partial r}, \qquad D_3 = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi^3}{\partial \theta}.$$

Effectuons l'intégration en ζ,

$$2\varpi = \iint \left[2hr(\lambda A^2 + 2\mu\Sigma A_i^2 + \mu\Sigma C_i^2) + \frac{2h^3}{3} r(\lambda B^2 + 2\mu\Sigma B_i^2 + \mu\Sigma D_i^2) \right] dr\,d\theta,$$

et calculons maintenant les dérivées partielles du potentiel de forme

$$\frac{\partial\varpi}{\partial u^1} = 2h(\lambda A + 2\mu A_2) - \frac{\partial}{\partial r} 2hr(\lambda A + 2\mu A_1) - \frac{\partial}{\partial\theta} 2\mu h C_1,$$

$$\frac{\partial\varpi}{\partial u^2} = -\frac{\partial}{\partial r} 2\mu h r^2 C_1 - \frac{\partial}{\partial\theta} 2hr(\lambda A + 2\mu A_2),$$

$$\frac{\partial\varpi}{\partial u^3} = -\frac{\partial}{\partial r} 2\mu h r C_2 - \frac{\partial}{\partial\theta} 2\mu h C_3,$$

$$\frac{\partial\varpi}{\partial v^1} = 2hr[-(\lambda A + 2\mu A_1)z' + \mu C_2] + \frac{2h^3}{3}(\lambda B + 2\mu B_2) + \frac{\partial}{\partial r}\frac{2h^3}{3} r(\lambda B + 2\mu B_1) - \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{2h^3}{3} D_1,$$

$$\frac{\partial\varpi}{\partial v^2} = 2\mu h r^2 C_3 - \frac{\partial}{\partial r}\frac{2h^3}{3}\mu r D_1 - \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{2h^3}{3} r(\lambda B + 2\mu B_2),$$

$$\frac{\partial\varpi}{\partial v^3} = 2hr(\lambda A + 2\mu A_3 - \mu z' C_2) - \frac{\partial}{\partial r}\frac{2h^3}{3}\mu r D_2 - \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{2h^3}{3}\mu D_3.$$

Pour mettre en équations le problème de la vibration de la coque en l'absence de forces extérieures, formons la force vive et appliquons la méthode de Lagrange,

$$2T = \iiint \rho\left[\left(\frac{\partial u^1}{\partial t} + \zeta\frac{\partial v^1}{\partial t}\right)^2 + r^2\left(\frac{\partial u^2}{\partial t} + \zeta\frac{\partial v^2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^3}{\partial t} + \zeta\frac{\partial v^3}{\partial t}\right)^2\right] r\,dr\,d\theta\,d\zeta,$$

ou après l'intégration en ζ,

$$2T = \iint \rho\left\{2h\left[\left(\frac{\partial u^1}{\partial t}\right)^2 + r^2\left(\frac{\partial u^2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^3}{\partial t}\right)^2\right] + \frac{2h^3}{3}\left[\left(\frac{\partial v^1}{\partial t}\right)^2 + r^2\left(\frac{\partial v^2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v^3}{\partial t}\right)^2\right]\right\} r\,dr\,d\theta.$$

Les équations condensées du problème sont les suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(2\rho hr\frac{\partial u^1}{\partial t}\right) + \frac{\partial\varpi}{\partial u^1} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(2\rho\frac{h^3}{3} r\frac{\partial v^1}{\partial t}\right) + \frac{\partial\varpi}{\partial v^1} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(2\rho hr^3\frac{\partial u^2}{\partial t}\right) + \frac{\partial\varpi}{\partial u^2} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(2\rho\frac{h^3}{3} r^3\frac{\partial v^2}{\partial t}\right) + \frac{\partial\varpi}{\partial v^2} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(2\rho hr\frac{\partial u^3}{\partial t}\right) + \frac{\partial\varpi}{\partial u^3} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(2\rho\frac{h^3}{3} r\frac{\partial v^3}{\partial t}\right) + \frac{\partial\varpi}{\partial v^3} = 0.$$

Ces équations nous permettent de former les équations différentielles relatives à une vibration qui est de révolution autour de Oz, et pour laquelle on a

$$u^1 = \varphi(r)\,e^{i\omega t}, \qquad u^2 = 0, \qquad u^3 = \psi(r)\,e^{i\omega t}, \qquad v^1 = \alpha(r)\,e^{i\omega t}, \qquad v^2 = 0, \qquad v^3 = \beta(r)\,e^{i\omega t}.$$

ω est une constante qui reste à déterminer. Parmi les vibrations de ce type se trouve la vibration fondamentale.

On constate que les équations relatives aux fonctions-paramètres u^2 et v^2

disparaissent complètement, et il reste quatre équations à quatre inconnues u^1, u^3, φ^1, φ^3 :

$$2\rho\omega^2 hr\varphi - 2h\left[\lambda\left(\varphi' - \alpha z' + \frac{\alpha}{r} + \beta\right) + 2\mu\frac{\varphi}{r}\right] + \frac{d}{dr}2hr\left[\lambda\left(\varphi' - \alpha z' + \frac{\alpha}{r} + \beta\right) + 2\mu(\varphi' - \alpha z')\right] = 0,$$

$$2\rho\omega^2 hr\psi + \frac{d}{dr}2\mu hr(\alpha + \psi' - \beta z') = 0,$$

$$2\rho\omega^2\frac{h^3}{3}r\alpha - 2hr\left\{-\left[\lambda\left(\varphi' - \alpha z' + \frac{\alpha}{r} + \beta\right) + 2\mu(\varphi' - \alpha z')\right]z' + \mu(\alpha + \psi' - \beta z')\right\} - \frac{d}{dr}\frac{2h^3}{3}r\left[\lambda\left(\frac{\alpha}{r} - \alpha'\right) - 2\mu\alpha'\right] = 0,$$

$$2\rho\omega^2\frac{h^3}{3}r\beta - 2hr\left[\lambda\left(\varphi' - \alpha z' + \frac{\varphi}{r} + \beta\right) + 2\mu\beta - \mu z'(\alpha + \psi' - \beta z')\right] + \frac{d}{dr}\frac{2h^3}{3}\mu r\beta' = 0.$$

Il resterait à résoudre le difficile problème de la recherche de ω pour que le système différentiel possède une solution non identiquement nulle vérifiant les conditions aux limites.

7. Calcul du ds^2 d'une coque. — Nous avons vu que pour déterminer le potentiel de forme, il était indispensable, par la méthode proposée, de connaître le tenseur métrique fondamental. C'est ce problème que nous abordons ici.

Soit P un point de la coque et M sa projection sur la surface moyenne. Si α, β sont les coordonnées curvilignes de M sur la surface moyenne et γ la distance de P à la surface, convenablement orientée, la position de P est complètement définie par la connaissance des trois nombres α, β, γ :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \frac{\gamma}{H}\overrightarrow{N},$$

en désignant par $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{M}'_\alpha \wedge \overrightarrow{M}'_\beta$ le vecteur normal à la surface moyenne. Ce vecteur $\overrightarrow{N}$ est relié au vecteur unitaire normal $\overrightarrow{m}$ par la relation $\overrightarrow{N} = H\overrightarrow{m}$, avec $H = \sqrt{EG - F^2}$. Formons le vecteur différentiel $d\overrightarrow{P}$:

$$d\overrightarrow{P} = d\overrightarrow{M} + \frac{\gamma}{H}d\overrightarrow{N} + \overrightarrow{N}\,d\frac{\gamma}{H}.$$

Son carré scalaire sera le ds^2 cherché. Auparavant mettons le vecteur $d\overrightarrow{N}$ sous la forme suivante :

$$d\overrightarrow{N} = \lambda\overrightarrow{M}'_\alpha + \mu\overrightarrow{M}'_\beta + \nu\overrightarrow{N}.$$

Nous obtenons les coefficients λ, μ, ν en faisant les produits scalaires par $\overrightarrow{M}'_\alpha$, $\overrightarrow{M}'_\beta$, $\overrightarrow{N}$. Pour cela nous utilisons les notations classiques suivantes :

$$E = \overrightarrow{M}'^2_\alpha, \qquad F = \overrightarrow{M}'_\alpha.\overrightarrow{M}'_\beta, \qquad G = \overrightarrow{M}'^2_\beta,$$

$$\overrightarrow{N}^2 = H^2, \qquad \overrightarrow{N}\,d\overrightarrow{N} = H\,dH, \qquad D = \overrightarrow{N}.\overrightarrow{M}''_{\alpha^2}, \qquad D' = \overrightarrow{N}.\overrightarrow{M}''_{\alpha\beta}, \qquad D'' = \overrightarrow{N}.\overrightarrow{M}''_{\beta^2}.$$

Nous remarquons de plus que

$$\vec{M}'_\alpha\, d\vec{N} = d\left(\vec{N}.\vec{M}'_\alpha\right) - \vec{N}\, d\vec{M}'_\alpha = -(D\,d\alpha + D'\,d\beta) = E\lambda + F\mu,$$
$$\vec{M}'_\beta\, d\vec{N} = d\left(\vec{N}.\vec{M}'_\beta\right) - \vec{N}\, d\vec{M}'_\beta = -(D'\,d\alpha + D''\,d\beta) = F\lambda + G\mu,$$

de sorte qu'en multipliant respectivement par G et — F, ou — F et E, puis en additionnant, nous trouvons

$$H^2\lambda = (FD' - GD)\,d\alpha + (FD'' - GD')\,d\beta,$$
$$H^2\mu = (FD - ED')\,d\alpha + (FD' - ED'')\,d\beta,$$
$$H\nu = dH.$$

La dernière de ces relations correspond au produit scalaire par N. Nous avons en définitive :

$$d\vec{P} = \vec{M}'_\alpha\,d\alpha + \vec{M}'_\beta\,d\beta + \frac{\gamma}{H^3}\Big\{[(FD' - GD)\,d\alpha + (FD'' - GD')\,d\beta]\vec{M}'_\alpha + [(FD - ED')\,d\alpha + (FD' - ED'')\,d\beta]\vec{M}'_\beta + \vec{N}H\,dH\Big\} + \vec{N}\,d\frac{\gamma}{H}.$$

Après avoir regroupé quelques termes, on trouve la valeur suivante pour le ds^2 :

$$(21)\quad ds^2 = (E\,d\alpha^2 + 2F\,d\alpha\,d\beta + G\,d\beta^2) - \frac{2\gamma}{H}(D\,d\alpha^2 + 2D'\,d\alpha\,d\beta + D''\,d\beta^2) + d\gamma^2 + \frac{\gamma^2}{H^4}\{(GD^2 - 2FDD' + ED'^2)\,d\alpha^2 + 2[ED'D'' + F(D'^2 - DD'') + GDD']\,d\alpha\,d\beta + (GD'^2 - 2FD'D'' + ED''^2)\,d\beta^2\}.$$

On voit s'introduire dans le coefficient de γ la courbure normale

$$\frac{1}{R_m} = \frac{D\,d\alpha^2 + 2D'\,d\alpha\,d\beta + D''\,d\beta^2}{H(E\,d\alpha^2 + 2F\,d\alpha\,d\beta + G\,d\beta^2)}$$

calculée dans la direction $d\vec{M}$.

Si l'on néglige les termes en γ^2 petits par rapport aux carrés des rayons de courbure de la surface, nous avons

$$(22)\quad ds^2 = (E\,d\alpha^2 + 2F\,d\alpha\,d\beta + G\,d\beta^2) - \frac{2\gamma}{H}(D\,d\alpha^2 + 2D'\,d\alpha\,d\beta + D''\,d\beta^2) + d\gamma^2.$$

Calcul géométrique du ds^2. — La méthode précédente donne la valeur du ds^2 d'une surface matérielle définie à l'aide de paramètres α, β. La méthode suivante donne l'interprétation des termes du ds^2. P décrivant une courbe quelconque dans l'espace (non forcément voisine de la surface moyenne), attachons lui le point M, de la surface moyenne, qui se déplace par continuité sur cette surface moyenne de façon que la normale en M passe constamment par P. Le point M décrit une certaine courbe sur la surface moyenne. Soient $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, les trois vecteurs unitaires du trièdre géodésique de cette dernière courbe : $\vec{i}$ est dirigé suivant la tangente à la

courbe, $\vec{j}$ est normal à la surface, $\vec{k}$, normale géodésique, forme avec les deux précédents un trièdre direct. On sait que le trièdre précédent (dit de Darboux-Ribaucour) possède une rotation égale à

$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{i}}{T_r} + \frac{\vec{j}}{R_g} + \frac{\vec{k}}{R_m}.$$

(C'est la rotation instantanée de la Cinématique pour un mouvement de ce trièdre dans lequel le point M décrirait sa trajectoire avec la vitesse + 1.) Or nous avons ici :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} - \gamma\vec{j},$$

et en dérivant par rapport à l'arc σ du lieu de M :

$$\frac{d\vec{P}}{d\sigma} = \vec{i} + \vec{j}\frac{d\gamma}{d\sigma} + \gamma\frac{d\vec{j}}{d\sigma}.$$

Comme

$$\frac{d\vec{j}}{d\sigma} = \vec{\Omega} \wedge \vec{j} = -\frac{\vec{i}}{R_m} + \frac{\vec{k}}{T_r},$$

nous avons donc

$$d\vec{P} = \vec{i}\left(1 - \frac{\gamma}{R_m}\right)d\sigma + \vec{j}\,d\gamma + \vec{k}\frac{\gamma\,d\sigma}{T_r}.$$

Le carré scalaire donne le ds^2 sous la forme désirée :

$$ds^2 = \left[\left(1 - \frac{\gamma}{R_m}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{T_r^2}\right]d\sigma^2 + d\gamma^2. \tag{23}$$

Nous allons lui donner une autre forme intéressante en introduisant les directions principales de la surface au point M, et θ, angle que fait la tangente orientée du lieu de M avec la première direction principale. Rappelons les valeurs de la courbure normale et de la torsion relative :

$$\frac{1}{R_m} = \frac{\cos^2\theta}{R_1} + \frac{\sin^2\theta}{R_2}, \qquad \frac{1}{T_r} = \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\sin\theta\cos\theta.$$

Ayant écrit le ds^2 ainsi :

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2\gamma}{R_m} + \gamma^2\left(\frac{1}{R_m^2} + \frac{1}{T_r^2}\right)\right]d\sigma^2 + d\gamma^2,$$

nous calculons le groupement

$$\frac{1}{R_m^2} + \frac{1}{T_r^2} = \frac{\cos^2\theta}{R_1^2} + \frac{\sin^2\theta}{R_2^2}.$$

Il en résulte la valeur suivante du ds^2 :

$$ds^2 = \left[\cos^2\theta\left(1 - \frac{\gamma}{R_1}\right)^2 + \sin^2\theta\left(1 - \frac{\gamma}{R_2}\right)^2\right]d\sigma^2 + d\gamma^2.$$

Si l'on désigne par $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ les projections du vecteur $d\mathrm{M}$ sur les deux directions principales,

$$d\sigma_1 = \cos\theta\, d\sigma, \qquad d\sigma_2 = \sin\theta\, d\sigma,$$

nous avons encore :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\gamma}{R_1}\right)^2 d\sigma_1^2 + \left(1 - \frac{\gamma}{R_2}\right)^2 d\sigma_2^2 + d\gamma^2. \tag{24}$$

Il est possible d'interpréter géométriquement cette formule, et même de l'obtenir directement si l'on se rappelle que les lignes de courbures jouissent de la propriété suivante : le long de chacune d'elles, deux normales à la surface infiniment voisines, se rencontrent au troisième ordre près en un point qui est un des centres de courbure principale de la surface.

Sous les dernières formes du ds^2 nous voyons mieuxcomment peut se traduire notre hypothèse concernant l'épaisseur de la surface. Si γ est faible vis-à-vis de R_1 et R_2, nous pouvons écrire plus simplement :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\gamma}{R_1}\right) d\sigma_1^2 + \left(1 - \frac{2\gamma}{R_2}\right) d\sigma_2^2 + d\gamma^2, \tag{25}$$

ou, par le calcul, pour une surface définie paramétriquement :

$$ds^2 = (E\,d\alpha^2 + 2F\,d\alpha\,d\beta + G\,d\beta^2) - \frac{2\gamma}{H}(D\,d\alpha^2 + 2D'\,d\alpha\,d\beta + D''\,d\beta^2) + d\gamma^2, \tag{22}$$

formule déjà rencontrée.

8. Équations de l'Élasticité en variables quelconques. — La formule (15) donne le potentiel de forme en variables quelconques, et la méthode des fonctions-paramètres permet d'écrire les équations correspondantes de Statique ou de Dynamique. Nous supposons que dans le déplacement virtuel défini par la variation virtuelle arbitraire $\delta\mathcal{U}^i$, les forces extérieures accomplissent le travail

$$\iiint \Omega_i \delta\mathcal{U}^i\, dx^1\, dx^2\, dx^3.$$

Sous forme condensée, les équations de la statique sont

$$\frac{\partial\varpi}{\partial\mathcal{U}^m} = \Omega_m.$$

Pour calculer la dérivée fonctionnelle, nous remarquons que l'intégrale du potentiel de forme est un polynome en $\mathcal{U}^m$ et $\frac{\partial\mathcal{U}^m}{\partial x^n}$, puisque

$$\frac{D\mathcal{U}^i}{Dx^k} = \frac{\partial\mathcal{U}^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{km}\mathcal{U}^m.$$

Prenons la demi-dérivée ordinaire de l'intégrale par rapport à $\mathcal{U}^m$; on trouve

$$\lambda \sum_i \left(\frac{D\mathcal{U}^i}{Dx^i}\Gamma^i_{lm}\right) + \mu g^{jk} g_{ih}\left(\Gamma^h_{jm}\frac{D\mathcal{U}^i}{Dx^k} + \Gamma^i_{km}\frac{D\mathcal{U}^h}{Dx^j}\right) + \mu\left(\Gamma^k_{lm}\frac{D\mathcal{U}^i}{Dx^k} + \Gamma^i_{km}\frac{D\mathcal{U}^k}{Dx^i}\right),$$

ou encore

$$\lambda \sum_i \Gamma^i_{im} \frac{D\mathcal{U}^i}{Dx^l} + 2\mu (g^{jk}\Gamma_{l,jm} + \Gamma^k_{lm}) \frac{D\mathcal{U}^l}{Dx^k}.$$

Pour obtenir la demi-dérivée partielle de l'intégrale par rapport à $\frac{\partial \mathcal{U}^m}{\partial x^n}$, supposons d'abord $n \neq m$; la demi-dérivée partielle vaut

$$2\mu \left(g^{nk} g_{lm} \frac{D\mathcal{U}^l}{Dx^k} + \frac{D\mathcal{U}^n}{Dx^m} \right).$$

Tandis que si $n = m$, il faut ajouter le terme unique $\lambda \frac{D\mathcal{U}^m}{Dx^m}$, où l'indice n'est pas muet. D'où les équations de la Statique :

$$(26) \qquad \begin{aligned} &\lambda \left(\Gamma^1_{1m} \frac{D\mathcal{U}^1}{Dx^1} + \Gamma^2_{2m} \frac{D\mathcal{U}^2}{Dx^2} + \Gamma^3_{3m} \frac{D\mathcal{U}^3}{Dx^3} \right) + 2\mu (g^{jk}\Gamma_{l,jm} + \Gamma^k_{lm}) \frac{D\mathcal{U}^l}{Dx^k} \\ &- 2\mu \frac{\partial}{\partial x^n} \left(g^{nk} g_{lm} \frac{D\mathcal{U}^l}{Dx^k} + \frac{D\mathcal{U}^n}{Dx^m} \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial x^m} \frac{D\mathcal{U}^m}{Dx^m} = \Omega_m. \end{aligned}$$

Comme les composantes contravariantes de la vitesse sont $\frac{\partial \mathcal{U}^l}{\partial t}$, le carré de la longueur de ce vecteur est

$$g_{ik} \frac{\partial \mathcal{U}^l}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{U}^k}{\partial t}.$$

On en déduit la force vive du système élastique. Pour obtenir les équations de l'Élasticité dynamique, il suffit donc d'introduire au premier membre de l'équation (26), la quantité

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho g_{lm} \frac{D(x, y, z)}{D(x^1, x^2, x^3)} \frac{\partial \mathcal{U}^l}{\partial t} \right].$$

La formule (15), qui donne le potentiel de forme, est d'un emploi relativement facile si l'on a affaire à un système triple orthogonal de coordonnées curvilignes :

$$\begin{aligned} 2\varpi = \iiint \frac{D(x, y, z)}{D(x^1, x^2, x^3)} \Bigg\{ &\lambda \left(\frac{D\mathcal{U}^1}{Dx^1} + \frac{D\mathcal{U}^2}{Dx^2} + \frac{D\mathcal{U}^3}{Dx^3} \right)^2 \\ &+ 2\mu \left[\left(\frac{D\mathcal{U}^1}{Dx^1} \right)^2 + \left(\frac{D\mathcal{U}^2}{Dx^2} \right)^2 + \left(\frac{D\mathcal{U}^3}{Dx^3} \right)^2 \right] \\ &+ \mu \left[g^{11} g_{22} \left(\frac{D\mathcal{U}^2}{Dx^1} \right)^2 + g^{11} g_{33} \left(\frac{D\mathcal{U}^3}{Dx^1} \right)^2 \right. \\ &+ g^{22} g_{33} \left(\frac{D\mathcal{U}^3}{Dx^2} \right)^2 + g^{22} g_{11} \left(\frac{D\mathcal{U}^1}{Dx^2} \right)^2 \\ &\left. + g^{33} g_{11} \left(\frac{D\mathcal{U}^1}{Dx^3} \right)^2 + g^{33} g_{22} \left(\frac{D\mathcal{U}^2}{Dx^3} \right)^2 \right] \Bigg\} dx^1 dx^2 dx^3. \end{aligned}$$

En particulier cette formule peut être appliquée au cas d'une coque dont la surface moyenne est rapportée à ses lignes courbures ($F = D' = 0$). Le ds^2 (21) de l'espace euclidien se réduit aux termes suivants :

$$ds^2 = \left(\sqrt{E} - \frac{\gamma D}{E\sqrt{G}} \right)^2 d\alpha^2 + \left(\sqrt{G} - \frac{\gamma D''}{G\sqrt{E}} \right)^2 d\beta^2 + d\gamma^2.$$

Il est alors possible de déterminer les symboles de Christoffel, puis les dérivées covariantes qui figurent dans la formule (26). Dans l'approximation du second ordre, on pose $\mathcal{U}^i = u^i + \gamma v^i$, puis on intègre entre $\pm \frac{\varepsilon}{2}$ par rapport à γ, et l'on opère comme dans les exemples antérieurs. La même méthode est applicable au cas où la surface moyenne est rapportée à des coordonnées curvilignes quelconque, mais les calculs sont plus longs.

9. Application à l'Hydrodynamique. — Nous allons montrer que la méthode des fonctions-paramètres permet de retrouver les équations des fluides parfaits en variables de Lagrange.

Soient a, b, c trois paramètres définissant la position d'une particule du fluide considéré. a, b, c sont par exemple les coordonnées rectangulaires ou polaires dans l'espace, de la particule, ou tout autre système de coordonnées curvilignes, à l'instant initial. Ce système de paramètres qui individualise chaque particule est donc indépendant du temps. Considérons alors trois fonctions-paramètres ξ, η, ζ, fonctions de a, b, c et du temps t, qui définissent la position d'une particule lorsque le temps s'écoule. Nous désignons par $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$ les dérivées partielles de ces fonctions par rapport au temps; ces quantités caractérisent la vitesse de l'élément fluide.

Soit maintenant un fluide situé dans une enveloppe fermée Σ, fixe ou de mouvement connu à l'avance. A cette surface correspond dans l'espace a, b, c, un domaine D nécessairement fixe s'il n'existe aucun échange de matière avec l'extérieur. La force vive du fluide est une forme quadratique en $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$. Elle est homogène si les parois sont fixes, sinon elle se présente sous la forme

$$2T = \iiint_D [\alpha_{ij}\dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_j + 2\beta_k\dot{\varphi}_k + \gamma]\, da\, db\, dc.$$

Les coefficients α, β, γ sont des fonctionnelles des φ qui représentent l'une ou l'autre des fonctions ξ, η, ζ.

Soit d'autre part

$$\delta\mathfrak{T} = \iiint_D (P\delta\xi + Q\delta\eta + R\delta\zeta)\, da\, db\, dc,$$

le travail virtuel des forces extérieures dans un déplacement virtuel arbitraire conservant les liaisons, c'est-à-dire ici, laissant indéformable et impénétrable la cloison Σ. Dans le cas où il existerait un travail des forces intérieures, on le ferait entrer dans le terme précédent.

Nous devons remarquer que les trois fonctions-paramètres ξ, η, ζ ne sont pas indépendantes, car il faut tenir compte de l'équation de continuité qui traduit la conservation de la masse, $dm = dm_0$. Nous considérons que la densité ρ est une fonction de a, b, c, t, comme toutes les fonctions inconnues que nous

utilisons. Soit $H d\xi d\eta d\zeta$ l'élément de volume dans l'espace où se meut le fluide, et $K da db dc$ l'élément de volume dans l'espace a, b, c. L'hypothèse de la conservation de la masse se traduit par la relation différentielle

$$\rho H d\xi d\eta d\zeta = \rho_0 K da db dc,$$

ou mieux, par

$$H \frac{D(\xi, \eta, \zeta)}{D(a, b, c)} = \frac{\rho_0 K}{\rho},$$

relation dans laquelle on remarque que le second membre est une fonction de a, b, c, t.

Si nous nous reportons à la notion de déplacement virtuel, ici défini par les trois fonctions non indépendantes $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, nous aurons la relation imposée au déplacement virtuel en prenant la différentielle δ du jacobien précédent, et en se rappelant que ξ, η, ζ varient seules, a, b, c, t étant des constantes dans cette opération. Nous obtenons donc

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\log H\right)\delta\xi + \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\log H\right)\delta\eta + \left(\frac{\partial}{\partial\zeta}\log H\right)\delta\zeta + \frac{D(\delta\xi, \eta, \zeta)}{D(a, b, c)} + \frac{D(\xi, \delta\eta, \zeta)}{D(a, b, c)} + \frac{D(\xi, \eta, \delta\zeta)}{D(a, b, c)} = 0.$$

Multiplions par une fonction arbitraire $\lambda(a, b, c, t)$ et intégrons dans D :

$$\sum_{a,b,c} \iiint_D \lambda \left[\frac{D(\eta, \zeta)}{D(b, c)}\delta\xi'_a + \frac{D(\zeta, \xi)}{D(b, c)}\delta\eta'_a + \frac{D(\xi, \eta)}{D(b, c)}\delta\zeta'_a\right] da\, db\, dc + \sum_{\xi,\eta,\zeta} \iiint_D \lambda \frac{\partial}{\partial\xi}\log H\, \delta\xi\, da\, db\, dc = 0.$$

Intégrons par parties, nous obtenons

$$\sum \iint \lambda \left[\frac{D(\eta, \zeta)}{D(b, c)}\delta\xi + \frac{D(\zeta, \xi)}{D(b, c)}\delta\eta + \frac{D(\xi, \eta)}{D(b, c)}\delta\zeta\right] db\, dc + \sum_{\xi,\xi,\eta} \iiint_D \lambda \frac{\partial}{\partial\xi}\log H\, \delta\xi\, da\, db\, dc - \sum_{\xi,\eta,\zeta} \iiint_D \left[\frac{\partial}{\partial a}\lambda \frac{D(\eta, \zeta)}{D(b, c)} + \frac{\partial}{\partial b}\lambda \frac{D(\eta, \zeta)}{D(c, a)} + \frac{\partial}{\partial c}\lambda \frac{D(\eta, \zeta)}{D(a, b)}\right] \delta\xi\, da\, db\, dc = 0.$$

Avant de poursuivre les calculs, vérifions que l'intégrale double est nulle. En effet, supposons que la frontière de D soit représentée paramétriquement à l'aide de u et v. Comme le déplacement virtuel doit être tangent à cette frontière, sinon on aurait entrée ou sortie de matière, nous avons la relation suivante :

$$\delta\xi \frac{D(y, z)}{D(u, v)} + \delta\eta \frac{D(z, x)}{D(u, v)} + \delta\zeta \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = 0.$$

Or, en fait, x, y, z sont des fonctions composées de u, v par l'intermédiaire de a, b, c. Nous avons donc

$$\frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \frac{D(y,z)}{D(b,c)}\frac{D(b,c)}{D(u,v)} + \frac{D(y,z)}{D(c,a)}\frac{D(c,a)}{D(u,v)} + \frac{D(y,z)}{D(a,b)}\frac{D(a,b)}{D(u,v)},$$

et il en résulte que l'intégrale double est nulle, ainsi que l'intégrale triple.

Si nous nous reportons à l'intégrale d'Hamilton, dans le cas où les fonctions-paramètres ne sont pas indépendantes, on sait qu'il suffit d'ajouter à l'intégrale habituelle l'intégrale entre les deux instants t_0 et t_1 de l'intégrale triple ci-dessus. Nous sommes alors conduits à un système de trois équations telles que la suivante :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = P - \lambda\frac{\partial}{\partial \xi}\log H + \frac{\partial}{\partial a}\lambda\frac{D(\eta,\zeta)}{D(b,c)} + \frac{\partial}{\partial b}\lambda\frac{D(\eta,\zeta)}{D(c,a)} + \frac{\partial}{\partial c}\lambda\frac{D(\eta,\zeta)}{D(a,b)}.$$

Cette équation se simplifie grâce à la remarque suivante. Dans l'espace a, b, c, le vecteur de composantes

$$\frac{D(\eta,\zeta)}{D(b,c)}, \qquad \frac{D(\eta,\zeta)}{D(c,a)}, \qquad \frac{D(\eta,\zeta)}{D(a,b)}$$

est le produit vectoriel de deux gradients,

$$\operatorname{grad}\eta \wedge \operatorname{grad}\zeta;$$

il en résulte que sa divergence est nulle, on a donc plus simplement

$$\frac{\partial}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = P - \lambda\frac{\partial}{\partial \xi}\log H + \frac{\partial\lambda}{\partial a}\frac{D(\eta,\zeta)}{D(b,c)} + \frac{\partial\lambda}{\partial b}\frac{D(\eta,\zeta)}{D(c,a)} + \frac{\partial\lambda}{\partial c}\frac{D(\eta,\zeta)}{D(a,b)}.$$

Si on multiplie par ξ'_a cette équation, et par η'_a et ζ'_a les deux autres équations analogues, et qu'on les ajoute membre à membre, on obtient l'équation suivante :

$$\xi'_a\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} + \eta'_a\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}} + \zeta'_a\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\zeta}} = (P\xi'_a + Q\eta'_a + R\zeta'_a) + \lambda'_a\frac{D(\xi,\eta,\zeta)}{D(a,b,c)} - \frac{\lambda H'_a}{H},$$

et l'on forme de même deux autres équations analogues qui se prêtent mieux à une éventuelle élimination de λ. On note aussi la présence d'un jacobien dont la valeur est $\frac{\rho_0 K}{\rho H}$.

Formons explicitement les équations du mouvement en axes rectangulaires. La force vive a pour expression

$$2T = \iiint_D \rho_0 K(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\,da\,db\,dc.$$

le travail virtuel est d'autre part

$$\delta\mathfrak{T} = \iiint_{D} (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, K\, da\, db\, dc$$

quand on désigne par X, Y, Z les composantes de la force unitaire qui agit sur l'élément de masse $\rho_0 dx\, dy\, dz$. On parvient alors à trois équations telles que la suivante :

$$\frac{d}{dt} K\rho_0 \dot{x} = \rho_0 KX + \lambda'_a \frac{D(y, z)}{D(b, c)} + \lambda'_b \frac{D(y, z)}{D(c, a)} + \lambda'_c \frac{D(y, z)}{D(a, b)},$$

où, après la transformation donnée antérieurement,

$$K\rho_0[(\ddot{x} - X)x'_a + (\ddot{y} - Y)y'_a + (\ddot{z} - Z)z'_a] = \lambda'_a \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)};$$

et comme

$$\frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} = \frac{\rho_0 K}{\rho},$$

on a finalement trois équations telles que

$$(\ddot{x} - X)x'_a + (\ddot{y} - Y)y'_a + (\ddot{z} - Z)z'_a = \frac{1}{\rho}\lambda'_a.$$

Nous constatons, ce que l'on peut démontrer autrement, que λ, dans ce cas, s'identifie avec la pression.

Les trois équations analogues à celle qui précède sont les équations des fluides en variables de Lagrange quelconques.

10. Écoulement adiabatique d'un fluide parfait dans une conduite de faible section, presque constante. — Un fluide, pour l'instant quelconque, s'écoule dans une conduite de faible section, presque constante, de manière que l'on puisse définir une densité, une vitesse, une pression, etc., uniques pour une section donnée d'abscisse curviligne s. Soit a l'abscisse curviligne de la même section à l'instant initial t_0. Nous supposons que la densité ρ, la pression p, l'abscisse curviligne s sont des fonctions de a et t, pour l'instant inconnues. Les quantités

$$\rho_0 = \rho(a, t_0), \qquad S_0 = S(a, t_0)$$

font partie des données initiales, et la section droite S de la conduite est une fonction donnée de s.

Équation de continuité. — Les deux sections d'abscisses a et $a + da$, à l'instant initial, ont pour abscisses respectives s et $s + \frac{\partial s}{\partial a} da$, à l'instant t. Les masses des deux éléments de fluides que ces sections permettent de définir, sont égales :

$$\rho_0 S_0\, da = \rho S \frac{\partial s}{\partial a} da; \qquad \rho_0 S_0 = \rho S \frac{\partial s}{\partial a}.$$

Telle est l'équation de continuité qui permet d'évaluer la nouvelle densité, ρ à l'instant t quand s est connu en fonction de a et t.

Équation du mouvement. — Le mouvement du fluide a lieu sous l'action d'une force extérieure dont seule la composante suivant la tangente à la trajectoire moyenne intervient; nous désignons par F_t cette composante par unité de volume. Nous négligeons toute force de viscosité. La vitesse des points d'une tranche d'abscisse s est $\dot{s} = \frac{\partial s}{\partial t}$. La force vive du fluide est

$$\int_{a_0}^{a_1} \rho_0 S_0 \dot{s}^2 \, da$$

pour la portion qui initialement était entre les tranches d'abscisses curvilignes a_0 et a_1.

Le fluide est supposé parfait. Pour nous, et cela rejoint les définitions habituelles, cela veut dire que le travail spécifique des forces intérieures $\frac{\partial \mathfrak{T}}{\mathcal{V}}$ (travail $\partial \mathfrak{T}$ pour un petit volume $\mathcal{V}$) est proportionnel à la variation relative de volume :

$$\frac{\partial \mathfrak{T}}{\mathcal{V}} = -p \frac{\partial \mathcal{V}}{\mathcal{V}} \quad \text{ou} \quad \partial \mathfrak{T} = -p \, \partial \mathcal{V}.$$

Si le volume augmente, il faut dépenser du travail, d'où le signe moins. Le coefficient de proportionnalité est appelé pression. Un déplacement virtuel du fluide à l'instant t est défini par la fonction δs de la seule variable a. Le volume $S\,ds$ compris entre les deux tranches a et $a + da$ devient dans ces conditions

$$S \frac{\partial s}{\partial a} da + \delta \left(S \frac{\partial s}{\partial a} \right) da.$$

Il lui correspond le travail virtuel

$$-\int_{a_0}^{a_1} p \, \delta \left(S \frac{\partial s}{\partial a} \right) da = -\int_{a_0}^{a_1} \left(p \frac{dS}{ds} \frac{\partial s}{\partial a} \delta s + p S \frac{\partial \, \delta s}{\partial a} \right) da.$$

D'autre part le travail virtuel des forces extérieures a la valeur suivante :

$$\int_{s_0}^{s_1} F_t S \, \delta s \, ds = \int_{a_0}^{a_1} F_t S \frac{\partial s}{\partial a} \delta s \, da.$$

Imaginons que nous refaisons la mise en équations à l'aide de l'intégrale d'Hamilton, nous aurons une intégration par parties à effectuer, nécessitée par la présence du terme $\frac{\partial}{\partial a} \delta s$. Il en résulte que nous avons à remplacer le terme relatif à la pression par l'expression suivante :

$$\int_{a_0}^{a_1} \left[-p \frac{dS}{ds} \frac{\partial s}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial a} (pS) \right] \delta s \, da = \int_{a_0}^{a_1} S \frac{\partial p}{\partial a} \delta s \, da,$$

et nous parvenons ainsi à l'équation du problème

$$-\rho_0 S_0 \ddot{s} + S\frac{\partial p}{\partial a} + F_t S\frac{\partial s}{\partial a} = 0,$$

ou

$$\rho\frac{\partial s}{\partial a}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\partial p}{\partial a} + F_t\frac{\partial s}{\partial a},$$

quand on tient compte de l'équation de continuité. Les quantités inconnues sont l'abscisse curviligne s, la pression p, la densité ρ. Pour les déterminer nous avons l'équation dynamique ci-dessus et l'équation de continuité. Il faut y ajouter l'équation d'état. On peut par exemple, supposer que l'écoulement se fasse sans échange de chaleur, ni avec les parois, ni à l'intérieur du fluide. On admet généralement une relation $p = k\rho^\gamma$ entre la pression et la densité.

Considérons le cas du mouvement permanent, pour retrouver les équations classiques de l'étude des tuyères. S'il en est bien ainsi, en chaque point d'abscisse curviligne donnée s, la pression et la densité ne dépendent pas explicitement du temps. p est donc fonction de a et t par le seul intermédiaire de $s(a, t)$ nous avons alors une équation dynamique simplifiée :

$$\rho\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{dp}{ds} + F_t.$$

La vitesse, elle aussi, est une fonction de s seul. Si on la désigne par $v = \dot{s}$, nous avons

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dp}{ds} + F_t.$$

Si de plus la force F_t dérive d'une fonction de force, ou même plus généralement, si l'on désigne par $\mathfrak{U}(s)$ une primitive de la fonction $\frac{F_t(s)}{\rho}$, nous avons

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{d}{ds}\left(\int\frac{dp}{\rho} + \mathfrak{U}\right).$$

Multiplions les deux membres de cette relation par $v = \frac{\partial s}{\partial t}$ et intégrons par rapport au temps :

$$\frac{1}{2}v^2 = \int\frac{dp}{\rho} + \mathfrak{U} + f(a).$$

La fonction $f(a)$ se détermine d'après les conditions initiales.

11. Membrures de ponts. — Considérons une membrure de pont constituée par un cadre rigide rectangulaire bien encastré aux angles. Cette membrure est posée sur deux appuis simples de même niveau par ses deux sommets inférieurs. Pour utiliser au mieux la poutre supérieure, on pose des tirants verticaux

identiques, régulièrement disposés, simplement articulés sur les poutres horizontales inférieure et supérieure. Désignons par les indices 1, 2, 3, 4 les éléments relatifs à la poutre inférieure, verticale droite, supérieure, et verticale gauche. Nous négligeons le poids des tirants et celui des poutres verticales qui n'influe que d'une manière négligeable sur leur longueur. Nous tenons compte de charges réparties sur les deux poutres horizontales, p_1 ou p_3 par unité de longueur. Prenons pour origine des axes le milieu O de la poutre inférieure, Ox est horizontal dirigé vers la droite, Oz est vertical ascendant. Nous admettons pour simplifier que la répartition des charges est symétrique par rapport à Oz, mais cette hypothèse n'interviendra guère que dans l'écriture de certaines conditions aux limites. Soit h la hauteur du pont et $2L$ sa longueur. Ω, E, I sont la section, le module d'élasticité et le moment d'inertie d'une section de poutre (sans indice pour les tirants); l est la distance de deux tirants consécutifs. u, v sont les composantes du déplacement d'un point.

Dans ce problème et dans les suivants, nous avons un assemblage de poutres en assez grand nombre. Nous remplacerons dans nos raisonnements cet assemblage discontinu de poutres par une membrane formée d'un grand nombre de poutres identiques et régulièrement réparties pour passer ensuite à la limite, la distance de deux poutres consécutives tendant vers zéro.

Ce problème et les suivants peuvent plus ou moins facilement se traiter par les méthodes classiques, mais la méthode des fonctions-paramètres, outre l'avantage qu'elle possède d'être systématique, met en évidence le fait que la solution du problème dépend d'une ou plusieurs équations aux dérivées partielles, dont la solution se détermine, en principe, grâce à des conditions au contour, fréquemment plus compliquées que celles que l'on considère dans les problèmes usuels d'Analyse, et que l'on peut obtenir par la mise en équation. Quoique dans la membrure de pont que nous considérons, le cadre rectangulaire soit l'essentiel, il ne nous donne que des conditions de contour.

Dans ce problème les fonctions-paramètres sont $u_2(y)$, $u_4(y)$, $v_1(x)$, $v_3(x)$, car elles permettent de déterminer toutes les déformations ou efforts intérieurs. Le potentiel de forme comprend la contribution des quatre poutres du contour

$$\int_0^L \mathrm{E}\left[\mathrm{I}_1\left(\frac{d^2 v_1}{dx^2}\right)^2 + \mathrm{I}_3\left(\frac{d^2 v_3}{dx^2}\right)^2\right] dx + \frac{1}{2}\int_0^h \mathrm{E}\left[\mathrm{I}_2\left(\frac{d^2 u_2}{dy^2}\right)^2 + \mathrm{I}_4\left(\frac{d^2 u_4}{dy^2}\right)^2\right] dx \qquad (\mathrm{I}_2 = \mathrm{I}_4),$$

où l'on a tenu compte de leur courbure et non de leur allongement. D'autre part, pour un tirant dont seul l'allongement entre en ligne de compte, le potentiel correspondant a pour valeur

$$\frac{\mathrm{E}\Omega}{2h}(v_3 - v_1)^2.$$

Cette quantité est valable pour une longueur l, distance de deux tirants

consécutifs. Faisant le passage à la limite indiqué plus haut, le potentiel de forme dû à l'ensemble des tirants est

$$2\int_0^L \frac{E\Omega}{2hl}(\varphi_3-\varphi_1)^2\,dx.$$

Pour l'ensemble du système matériel,

$$2\varpi = 2\int_0^L E\left[I_1\left(\frac{d^2\varphi_1}{dx^2}\right)^2+I_3\left(\frac{d^2\varphi_3}{dx^2}\right)^2+\frac{\Omega}{hl}(\varphi_3-\varphi_1)^2\right]dx+\int_0^h EI_2\left[\left(\frac{d^2u_2}{dy^2}\right)^2+\left(\frac{d^2u_4}{dy^2}\right)^2\right]dy.$$

D'autre part, le travail virtuel des forces extérieures a pour expression

$$\delta\mathfrak{T} = -2\int_0^L (p_1\delta\varphi_1+p_3\delta\varphi_3)\,dy.$$

Nous pouvons maintenant écrire les équations de l'équilibre :

$$EI_1\frac{d^4\varphi_1}{dx^4}-\frac{E\Omega}{hl}(\varphi_3-\varphi_1)=-p_1, \qquad EI_2\frac{d^4u_2}{dy^4}=0,$$
$$EI_3\frac{d^4\varphi_3}{dx^4}+\frac{E\Omega}{hl}(\varphi_3-\varphi_1)=-p_3, \qquad EI_2\frac{d^4u_4}{dy^4}=0.$$

Les conditions aux limites expriment, soit que les sommets du rectangle sont immobiles (par raison de symétrie, et parce qu'on néglige les variations de longueurs des côtés du rectangle), soit que les angles du rectangle restent droits :

$$\varphi_1(\pm L)=\varphi_3(\pm L)=0,$$
$$u_2(0)=u_2(h)=u_4(0)=u_4(h)=0,$$
$$\frac{d\varphi_1(-L)}{dx}+\frac{du_4(0)}{dy}=\frac{d\varphi_1(L)}{dx}+\frac{du_2(0)}{dy}=\frac{d\varphi_3(L)}{dx}+\frac{du_2(h)}{dy}=\frac{d\varphi_3(-L)}{dx}+\frac{du_4(h)}{dy}=0.$$

Nous nous bornons, pour notre objet, à faire la mise en équations du problème sans vouloir en donner la solution complète.

12. Pont a tirants verticaux encastrés. — Nous considérons la même membrure que précédemment, mais les rotules existant entre les tirants et les poutres supérieure et inférieure sont supprimées et remplacées par des encastrements. Au lieu de rechercher des fonctions u et φ d'une seule variable, dans le problème actuel, nous rencontrons des fonctions de deux variables.

Chemin faisant nous aurons à transformer des intégrales doubles en intégrales simples ou inversement, aussi désignons-nous par $\mathcal{S}$ l'aire intérieure du rectangle et par $\mathcal{L}=\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2+\mathcal{L}_3+\mathcal{L}_4$ son contour décrit dans le sens direct. La formule de Riemann,

$$\iint_{\mathcal{S}} R'_y\,dx\,dy = -\int_{\mathcal{L}} R\,dx,$$

appliquée au cas où $R = PQ$ donne une formule d'intégration par parties

$$\iint_{\mathcal{S}} PQ'_y \, dx \, dy = -\int_{\mathcal{L}} PQ \, dx - \iint_{\mathcal{S}} QP'_y \, dx \, dy.$$

que nous utiliserons par la suite, ainsi que celle qui correspond à une intégration en x.

Nous supposons encore que la longueur des poutres du contour est conservée, le potentiel de forme ne fait donc intervenir que leur courbure; tandis que pour un tirant interviennent l'allongement et la courbure. Nous remplaçons encore l'ensemble des tirants par une membrane continue dont nous désignerons par $u(x, y)$ et $v(x, y)$ les composantes du déplacement au point de coordonnées x et y.

La portion de tirant d'abscisse x, dont les extrémités ont pour ordonnées y et $y + dy$ subit une déformation telle que les extrémités se déplacent verticalement (seul déplacement entrant en ligne de compte) de $v(x, y)$ et $v + \frac{\partial v}{\partial y} dy$ respectivement. Le taux d'allongement est donc $\frac{\partial v}{\partial y}$, et le potentiel de forme dû à l'allongement de ce seul tirant est

$$\frac{1}{2} \int_0^h E\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 dy.$$

Pour l'ensemble des tirants, nous trouvons donc

$$2\varpi_1 = \iint_{\mathcal{S}} \frac{E\Omega}{l} \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 dx \, dy.$$

Cette formule est vraie quelle que soit la forme du contour. On calcule de même le potentiel dû à la courbure des tirants :

$$2\varpi_2 = \iint_{\mathcal{S}} \frac{EI}{l} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 dx \, dy,$$

valable, lui aussi, quelle que soit la forme du contour.

Pour les quatre poutres du contour, seule la courbure intervient :

$$2\varpi_3 = \int_{-L}^{+L} EI_1 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx + \int_0^h EI_2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 dy + \int_{-L}^{+L} EI_3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx + \int_0^h EI_4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 dy.$$

Dans ces termes il s'agit de fonctions d'une seule variable car x ou y y est constant. Dans ce problème nous allons calculer explicitement la variation du potentiel de forme dans un déplacement virtuel de forme dans un déplacement virtuel quelconque, quoique l'intégrale double soit seule nécessaire, mais

nous constaterons que les conditions aux limites annulent la variation représentée par une intégrale simple. Calculons $\delta\varpi_1$ et intégrons par parties :

$$\delta\varpi_1 = \iint_S \frac{E\Omega}{l}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial\,\delta v}{\partial y}\,dx\,dy = -\frac{E\Omega}{l}\int_{\mathcal{L}}\frac{\partial v}{\partial y}\delta v\,dx - \frac{E\Omega}{l}\iint_S \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\delta v\,dx\,dy.$$

De même,

$$\delta\varpi_2 = \frac{EI}{l}\int_{\mathcal{L}}\left[-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial\,\delta u}{\partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\delta u\right]dx + \frac{EI}{l}\iint_S \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\delta u\,dx\,dy.$$

Partageons encore le terme ϖ_3 en ϖ_{31}, ϖ_{32}, ϖ_{33}, ϖ_{34}, relatifs chacun à un côté du rectangle. Nous obtenons

$$\delta\varpi_{31} = EI_1\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial\,\delta v}{\partial x} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\delta v\right]_A^B + EI_1\int_{\mathcal{L}_1}\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}\delta v\,dx,$$

$$\delta\varpi_{32} = EI_2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial\,\delta u}{\partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\delta u\right]_B^C + EI_2\int_{\mathcal{L}_2}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\delta u\,dy,$$

$$\delta\varpi_{33} = EI_3\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial\,\delta v}{\partial x} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\delta v\right]_C^D - EI_3\int_{\mathcal{L}_3}\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}\delta v\,dx,$$

$$\delta\varpi_{34} = EI_4\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^4}\frac{\partial\,\delta u}{\partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\delta u\right]_D^A - EI_4\int_{\mathcal{L}_4}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\delta u\,dy.$$

AB et CD sont les deux côtés horizontaux du rectangle ABCD. $\delta\varpi$ est la somme de tous les éléments partiels trouvés. On peut remarquer que dans les expressions tout intégrées les seconds termes sont nuls par suite de la fixité des quatre sommets en A et B nous avons deux appuis simples et fixes, en C et D, cela résulte de la symétrie des charges et de l'invariabilité des longueurs des côtés verticaux.

Pour vérifier que la somme des quatre termes restant dans la partie tout intégrée est bien nulle, regardons, par exemple les termes correspondants aux sommets A et B :

$$\text{En A :}\quad -\left(EI_1\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\frac{\partial\,\delta v}{\partial x} - \left(EI_4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\frac{\partial\,\delta u}{\partial y},$$

$$\text{En B :}\quad \left(EI_1\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\frac{\partial\,\delta v}{\partial x} - \left(EI_2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\frac{\partial\,\delta u}{\partial y}.$$

Les quantités $\frac{\partial}{\partial x}\delta v$ et $-\frac{\partial}{\partial y}\delta u$ représentent les angles dont ont tourné les tangentes en A. Elles sont égales. Les moment agissant en A sur deux éléments de côtés du rectangle sont respectivement $EI_1\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ et $EI_4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Comme ils sont égaux, le terme relatif au point A est bien nul. On ferait le même raisonnement en B où les moments sont $-EI_1\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ et $-EI_2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Dans $\delta\varpi_{3i}$ ne subsistent donc que les intégrales curvilignes. Nous avons aussi des simplifications dans les termes $\delta\varpi_1$ et $\delta\varpi_2$. En effet, sur $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_3$, $\delta u = 0$,

$dy = 0$, tandis que sur $\mathcal{L}_2$ et $\mathcal{L}_4$, $\delta v = 0$, $dx = 0$. Il en résulte que l'intégrale curviligne de $\delta\varpi_1$ est à calculer seulement sur $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_3$, tandis que l'intégrale curviligne de $\delta\varpi_2$ est identiquement nulle. La somme de tous les termes restant de la variation du potentiel de forme est égale au travail virtuel des forces extérieures :

$$\delta\mathfrak{T} = \int_{\mathcal{L}_1} -p_1\,\delta v\,dx + \int_{\mathcal{L}_3} p_3\,\delta v\,dx.$$

Le principe du travail virtuel donne donc la relation globale suivante :

$$\iint_{\mathcal{S}} \left(-\frac{E\Omega}{l}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\delta v + \frac{EI}{l}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\delta u\right) dx\,dy + \int_{\mathcal{L}_1}\left(-\frac{E\Omega}{l}\frac{\partial v}{\partial y} + EI_1\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}\right)\delta v\,dx$$
$$+ \int EI_2\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\delta u\,dy - \int_{\mathcal{L}_3}\left(\frac{E\Omega}{l}\frac{\partial v}{\partial y} + EI_3\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}\right)\delta v\,dx - \int_{\mathcal{L}_4} EI_4\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\delta u\,dy.$$

Il en résulte que u et v sont solutions des équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \qquad (\text{dans } \mathcal{S}).$$

(Il existe un second membre si l'on a une répartition de charges sur les tirants verticaux.) De plus la solution doit satisfaire aux conditions limites suivantes :

$$\Omega\frac{\partial v}{\partial y} - lI_1\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0 \quad \text{sur } \mathcal{L}_1, \qquad \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0 \quad \text{sur } \mathcal{L}_2,$$
$$\Omega\frac{\partial v}{\partial y} + lI_3\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0 \quad \text{sur } \mathcal{L}_3, \qquad \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0 \quad \text{sur } \mathcal{L}_4.$$

13. Grille verticale. — Une grille, qui peut être une membrure de pont métallique, est constituée par un cadre relativement rigide, et supposé inextensible, et par deux systèmes de barres régulièrement disposées. Les unes sont horizontales et les autres verticales, de sorte que la grille est nécessairement verticale. Nous admettons que les poutres horizontales du rectangle supportent des charges réparties p_1 et p_3 par unité de longueur. Nous prenons les mêmes axes que précédemment, et pour simplifier les conditions aux limites, nous admettons la symétrie des charges. Les barres horizontales et verticales sont encastrées en chacun des nœuds et aussi aux points où elles rencontrent les côtés du rectangle. La grille est posée sur deux appuis simples de même niveau aux sommets inférieurs A et B du rectangle.

Désignons par Ω, l, I la section, l'espacement et le moment d'inertie des barres horizontales et par Ω', l', I' les mêmes éléments relatifs aux barres verticales. Remplaçant le système de barres par une membrane, on peut évaluer le potentiel de forme des barres horizontales, dû à leur allongement et à leur courbure

$$\frac{1}{2}\iint_{\mathcal{S}}\left[\frac{E\Omega}{l}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{EI}{l}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right] dx\,dy;$$

ainsi que celui des barres verticales :

$$\frac{1}{2}\iint_{\mathcal{S}}\left[\frac{E\Omega'}{l'}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\frac{EI'}{l'}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\right]dx\,dy.$$

Le contour rectangulaire fournit la contribution

$$\frac{1}{2}\int_{\mathcal{L}_1}EI_1\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2dx+\frac{1}{2}\int_{\mathcal{L}_2}EI_2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2dy-\frac{1}{2}\int_{\mathcal{L}_3}EI_3\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2dx-\frac{1}{2}\int_{\mathcal{L}_4}EI_4\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2dy,$$

tandis que le travail des forces extérieures est

$$\int_{\mathcal{L}_1}-p_1\,\delta v\,dx+\int_{\mathcal{L}_3}p_3\,\delta v\,dx.$$

Formons le potentiel de forme de la grille

$$2\varpi=E\iint_{\mathcal{S}}\left[\frac{\Omega}{l}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{I'}{l'}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2+\frac{\Omega'}{l'}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\frac{I}{l}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right]dx\,dy$$
$$+EI_1\int_{\mathcal{L}_1}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2dx+EI_2\int_{\mathcal{L}_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2dy-EI_3\int_{\mathcal{L}_3}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2dx-EI_4\int_{\mathcal{L}_4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2dy,$$

et avant d'en rechercher la variation, notons que les deux fonctions u et v ne sont pas indépendantes par suite de l'encastrement aux nœuds.

Considérons les trois points de coordonnées x, y; $x+dx, y$ et $x, y+dy$ avant toute déformation. Après l'application des charges, ils viennent respectivement en

$$x+u,\quad y+v;\quad (x+dx)+(u+u'_x\,dx),\quad y+(v+v'_x\,dx);$$
$$x+(u+u'_y\,dy),\quad (y+dy)+(v+v'_y\,dy).$$

Les deux vecteurs initiaux, orthogonaux, dx, o et o, dy deviennent $dx+u'_x\,dx$, $v'_x\,dx$ et $u'_y\,dy$, $dy+v'_y\,dy$. Nous admettons que l'encastrement est suffisant pour qu'ils soient encore orthogonaux

$$[u'_y(1+u'_x)+v'_x(1+v'_y)]\,dx\,dy=0,$$

ou, en négligeant les termes du second ordre,

$$u'_y+v'_x=0.$$

Cette condition exprime que la dilatation angulaire est nulle. Elle montre que u et v ne peuvent être pris comme fonctions-paramètres. Il existe une seule fonction-paramètre, φ, que nous choisirons de manière que

$$u=\varphi'_x,\qquad v=-\varphi'_y.$$

Le potentiel de forme que nous avons évalué antérieurement est correct car

les encastrements n'apportent aucun potentiel supplémentaire (s'ils ne sont pas élastiques), mais nous devons y exprimer u et v en fonction de φ :

$$
\begin{aligned}
2\varpi = \mathrm{E}\iint_{\mathcal{S}}\left[\frac{\Omega}{l}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)^2+\frac{\Omega'}{l'}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)^2+\frac{\mathrm{I}}{l}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\,\partial y}\right)^2+\frac{\mathrm{I}'}{l'}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\,\partial y^2}\right)^2\right]dx\,dy\\
+\mathrm{EI}_1\int_{\mathcal{L}_1}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\,\partial y}\right)^2dx+\mathrm{EI}_2\int_{\mathcal{L}_2}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\,\partial y^2}\right)^2dy\\
-\mathrm{EI}_3\int_{\mathcal{L}_3}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\,\partial y}\right)^2dx-\mathrm{EI}_4\int_{\mathcal{L}_4}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\,\partial y^2}\right)^2dy.
\end{aligned}
$$

On calcule la variation du potentiel de forme dans un déplacement virtuel arbitraire $\delta\varphi$ (sous la seule réserve que ce déplacement virtuel soit nul en A, B, C, D, c'est-à-dire $\frac{\partial}{\partial x}\delta\varphi=\frac{\partial}{\partial y}\delta\varphi=0$). Après les intégrations par parties nécessaires, faites comme dans l'exemple précédent, et après avoir retranché le travail virtuel des charges, on trouve la relation suivante, conséquence du principe du travail virtuel :

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\iint_{\mathcal{S}}\left[\frac{\Omega}{l}\varphi^{\mathrm{IV}}_{x^4}+\frac{\Omega'}{l'}\varphi^{\mathrm{IV}}_{y^4}-\frac{\mathrm{I}}{l}\varphi^{\mathrm{VI}}_{x^4y^2}-\frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi^{\mathrm{VI}}_{x^2y^4}\right]\delta\varphi\,dx\,dy\\
&+\int_{\mathcal{L}_1}\left\{\left[\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi^{\mathrm{IV}}_{x^2y^2}-\frac{\Omega'}{l'}\varphi''_{y^2}+\mathrm{I}_1\varphi^{\mathrm{V}}_{x^4y}\right)-p_1\right]\frac{\partial}{\partial y}\delta\varphi\right.\\
&\qquad\left.+\mathrm{E}\left(-\frac{\mathrm{I}}{l}\varphi^{\mathrm{V}}_{x^4y}-\frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi^{\mathrm{V}}_{x^2y^3}+\frac{\Omega'}{l'}\varphi'''_{y^3}\right)\delta\varphi\right\}dx\\
&+\mathrm{E}\int_{\mathcal{L}_2+\mathcal{L}_4}\left[\left(\frac{\Omega}{l}\varphi''_{x^2}-\frac{\mathrm{I}}{l}\varphi^{\mathrm{IV}}_{x^2y^2}+\mathrm{I}_2\varphi^{\mathrm{V}}_{xy^4}\right)\frac{\partial}{\partial x}\delta\varphi+\left(\frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi^{\mathrm{V}}_{xy^4}-\frac{\Omega}{l}\varphi'''_{x^3}+\frac{\mathrm{I}}{l}\varphi^{\mathrm{V}}_{x^3y^2}\right)\delta\varphi\right]dy\\
&+\int_{\mathcal{L}_3}\left\{\left[\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi^{\mathrm{IV}}_{x^2y^2}-\frac{\Omega'}{l'}\varphi''_{y^2}-\mathrm{I}_3\varphi^{\mathrm{V}}_{x^4y}\right)+p_3\right]\frac{\partial}{\partial y}\delta\varphi\right.\\
&\qquad\left.+\mathrm{E}\left(-\frac{\mathrm{I}}{l}\varphi^{\mathrm{V}}_{x^4y}-\frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi^{\mathrm{V}}_{x^2y^3}+\frac{\Omega'}{l'}\varphi'''_{y^3}\right)\delta\varphi\right\}dx\\
&+\mathrm{E}\left[-(\mathrm{I}_1\varphi'''_{x^2y}+\mathrm{I}_4\varphi'''_{xy^2})\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\delta\varphi+\left(\frac{\mathrm{I}}{l}\varphi'''_{x^2y}+\mathrm{I}_4\varphi^{\mathrm{IV}}_{xy^3}\right)\frac{\partial}{\partial x}\delta\varphi\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi'''_{xy^2}+\mathrm{I}_1\varphi^{\mathrm{IV}}_{x^3y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\delta\varphi-\left(\frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi^{\mathrm{IV}}_{xy^3}+\frac{\mathrm{I}}{l}\varphi^{\mathrm{IV}}_{x^3y}\right)\delta\varphi\right]_{\mathrm{A}}\\
&+\mathrm{E}\left[(\mathrm{I}_1\varphi'''_{x^2y}-\mathrm{I}_2\varphi'''_{xy^2})\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\delta\varphi+\left(-\frac{\mathrm{I}}{l}\varphi'''_{x^2y}+\mathrm{I}_2\varphi^{\mathrm{IV}}_{xy^3}\right)\frac{\partial}{\partial x}\delta\varphi\right.\\
&\qquad\left.-\left(\frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi'''_{xy^2}+\mathrm{I}_1\varphi^{\mathrm{IV}}_{x^3y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\delta\varphi+\left(\frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi^{\mathrm{IV}}_{xy^3}+\frac{\mathrm{I}}{l}\varphi^{\mathrm{IV}}_{x^3y}\right)\delta\varphi\right]_{\mathrm{B}}\\
&+\mathrm{E}\left[(\mathrm{I}_2\varphi'''_{xy^2}+\mathrm{I}_3\varphi'''_{x^2y})\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\delta\varphi+\left(-\mathrm{I}_2\varphi^{\mathrm{IV}}_{xy^3}+\frac{\mathrm{I}}{l}\varphi'''_{x^2y}\right)\frac{\partial}{\partial x}\delta\varphi\right.\\
&\qquad\left.+\left(-\mathrm{I}_3\varphi^{\mathrm{IV}}_{x^3y}+\frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi'''_{xy^2}\right)\frac{\partial}{\partial y}\delta\varphi-\left(\frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi^{\mathrm{IV}}_{xy^3}+\frac{\mathrm{I}}{l}\varphi^{\mathrm{IV}}_{x^3y}\right)\delta\varphi\right]_{\mathrm{C}}\\
&+\mathrm{E}\left[(\mathrm{I}_4\varphi'''_{xy^2}-\mathrm{I}_3\varphi'''_{x^2y})\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\delta\varphi-\left(\mathrm{I}_4\varphi^{\mathrm{IV}}_{xy^3}+\frac{\mathrm{I}}{l}\varphi'''_{x^3y}\right)\frac{\partial}{\partial x}\delta\varphi\right.\\
&\qquad\left.+\left(\mathrm{I}_3\varphi^{\mathrm{IV}}_{x^3y}-\frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi'''_{xy^2}\right)\frac{\partial}{\partial y}\delta\varphi+\left(\frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi^{\mathrm{IV}}_{xy^3}+\frac{\mathrm{I}}{l}\varphi^{\mathrm{IV}}_{x^3y}\right)\delta\varphi\right]_{\mathrm{D}}=0.
\end{aligned}
$$

Les quatre derniers crochets sont à calculer au sommet indiqué en indice. Par suite de la fixité des sommets, on peut noter que les deuxième et troisième parenthèses de ces crochets sont nulles.

La fonction-paramètre φ est donc solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\mathrm{I}}{l}\varphi^{\mathrm{VI}}_{x^3y^3}+\frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi^{\mathrm{VI}}_{x^3y^3}=\frac{\Omega}{l}\varphi^{\mathrm{IV}}_{x^3}+\frac{\Omega'}{l'}\varphi^{\mathrm{IV}}_{y^3}.$$

Elle doit vérifier sur le contour les conditions suivantes :

$$\text{sur } \mathcal{L}_1 : \quad \mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi^{\mathrm{IV}}_{x^3y^3}-\frac{\Omega'}{l'}\varphi''_{y^3}+\mathrm{I}_1\varphi^{\mathrm{V}}_{x^4y}\right)=p_1, \qquad -\frac{\mathrm{I}}{l}\varphi^{\mathrm{V}}_{x^4y}-\frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi^{\mathrm{V}}_{x^3y^3}+\frac{\Omega'}{l'}\varphi'''_{y^3}=0;$$

$$\text{sur } \mathcal{L}_2 \text{ et } \mathcal{L}_4 : \quad \frac{\Omega}{l}\varphi''_{x^3}-\frac{\mathrm{I}}{l}\varphi^{\mathrm{IV}}_{x^3y^3}+\mathrm{I}_2\varphi^{\mathrm{V}}_{xy^4}=0, \qquad \frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi^{\mathrm{V}}_{xy^4}-\frac{\Omega}{l}\varphi'''_{x^3}+\frac{\mathrm{I}}{l}\varphi^{\mathrm{V}}_{x^3y^3}=0;$$

$$\text{sur } \mathcal{L}_3 : \quad \mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi^{\mathrm{IV}}_{x^3y^3}-\frac{\Omega'}{l'}\varphi''_{y^3}-\mathrm{I}_3\varphi^{\mathrm{V}}_{x^4y}\right)+p_3=0, \qquad -\frac{\mathrm{I}}{l}\varphi^{\mathrm{V}}_{x^4y}-\frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi^{\mathrm{V}}_{x^3y^3}+\frac{\Omega'}{l'}\varphi'''_{y^3}=0;$$

et aux quatre sommets, on doit avoir :

$$\text{en A, B, C, D :} \quad \frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi^{\mathrm{IV}}_{xy^3}+\frac{\mathrm{I}}{l}\varphi^{\mathrm{IV}}_{x^3y}=0,$$

$$\text{en A :} \quad \mathrm{I}_1\varphi'''_{x^3y}+\mathrm{I}_4\varphi'''_{xy^3}=0,$$

$$\text{en B :} \quad \mathrm{I}_1\varphi'''_{x^3y}-\mathrm{I}_2\varphi'''_{xy^3}=0,$$

$$\text{en C :} \quad \mathrm{I}_3\varphi'''_{x^3y}+\mathrm{I}_2\varphi'''_{xy^3}=0,$$

$$\text{en D :} \quad \mathrm{I}_3\varphi'''_{x^3y}-\mathrm{I}_4\varphi'''_{xy^3}=0.$$

Cet exemple, relativement difficile, a été traité d'une manière entièrement analytique : formation de l'équation aux dérivées partielles, et conditions au contour. Nous avons évité l'emploi des réactions au contour. Elles auraient permis de constater que les conditions de contour qui ne sont pas géométriques sont vérifiées, comme on l'avait fait dans les exemples antérieurs. Mais notre but, qui est de se ramener à des problèmes classés de Mathématiques, est atteint : il reste à déterminer une fonction solution d'une équation différentielle connue, moyennant des conditions analytiques connues au contour. En particulier, il serait intéressant de prouver que l'ensemble de ces conditions détermine une fonction unique.

14. Petite déformation d'un plan, calcul des nouvelles courbures. — Pour étudier l'équilibre de nouveaux assemblages de poutres, initalement plans, nous avons besoin de calculer les nouvelles courbures, normale et géodésique, et la torsion relative d'une courbe donnée, après une déformation très petite.

Considérons une surface plane située dans le plan invariable $x\mathrm{O}y$. Sous l'action d'un système de charges, le point de coordonnées x, y, o, subit un déplacement de composantes u, v, w, fonctions de x et y. Nous considérons

que x et y sont les coordonnées curvilignes de ce point sur la surface déformée. Les vecteurs qui définissent le plan tangent en un point P sont

$$\vec{P}'_x(1+u'_x,\ v'_x,\ w'_x), \qquad \vec{P}'_y(u'_y,\ 1+v'_y,\ w'_y).$$

On en déduit le vecteur normal et ses composantes

$$\vec{N}=\vec{P}'_x\wedge\vec{P}'_y \qquad (-w'_x,\ -w'_y,\ 1+u'_x+v'_y).$$

u, v, w et leurs dérivées premières et secondes sont supposées petites et l'on néglige les produits deux à deux de ces quantités. Dans ces conditions on calcule les coefficients des deux formes quadratiques de Gauss de la Théorie des surfaces :

$$E=1+2u'_x, \quad F=u'_y+v'_x, \quad G=1+2v'_y, \quad H=1+u'_x+v'_y,$$
$$D=w''_{x^2}, \quad D'=w''_{xy}, \quad D''=w''_{y^2}.$$

On en déduit le carré de la distance de deux points voisins

$$ds^2=(1+2u'_x)\,dx^2+2(u'_y+v'_x)\,dx\,dy+(1+2v'_y)\,dy^2,$$

qui était initialement dx^2+dy^2. Il en résulte la connaissance de l'allongement relatif

$$\frac{\delta l}{l}=\frac{u'_x\,dx^2+(u'_y+v'_x)\,dx\,dy+v'_y\,dy^2}{dx^2+dy^2}. \tag{27}$$

On détermine ensuite, par des formules classiques, la valeur de la courbure normale

$$\frac{1}{R_m}=\frac{w''_{x^2}\,dx^2+2w''_{xy}\,dx\,dy+w''_{y^2}\,dy^2}{dx^2+dy^2}, \tag{28}$$

et celle de la torsion relative

$$\frac{1}{T_r}=\frac{w''_{xy}(dx^2-dy^2)+(w''_{y^2}-w''_{x^2})\,dx\,dy}{dx^2+dy^2}, \tag{29}$$

après déformation; auparavant, ces quantités étaient identiquement nulles. La formule suivante :

$$\frac{1}{R_g}=\frac{d^2\vec{P}\left(d\vec{P}\wedge\vec{N}\right)}{II\,ds^3}$$

donne la valeur de la courbure géodésique. Le numérateur vaut

$$\begin{vmatrix} d^2x+d^2u & dx+du & -w'_x \\ d^2y+d^2v & dy+dv & -w'_y \\ d^2w & dw & 1+u'_x+v'_y \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} d^2x+d^2u & dx+du \\ d^2y+d^2v & dy+dv \end{vmatrix} (1+u'_x+v'_y).$$

Quant au dénominateur, il fait intervenir l'actuel ds^2, c'est-à-dire dx^2+dy^2 et l'allongement relatif $\frac{\delta l}{l}$:

$$\text{H}\, ds^3=(1+u'_x+v'_y)\,(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}\left(1+3\frac{\delta l}{l}\right).$$

D'où le nouveau rayon de courbure géodésique,

$$\frac{1}{R_g}=\frac{\begin{vmatrix} d^2x+d^2u & dx+du \\ d^2y+d^2v & dy+dv \end{vmatrix}}{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}\left(1-3\frac{\delta l}{l}\right), \tag{30}$$

l'ancien valant

$$\frac{d^2x\,dy-d^2y\,dx}{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

15. Grille verticale a barreaux obliques. — Imaginons des barreaux tous identiques, inclinés de l'angle $\pm\alpha$ sur l'horizontale, régulièrement disposés, limités à un cadre rectangulaire ABCD dont deux côtés AD et BC sont verticaux. On admet un encastrement parfait en chacun des nœuds du système. Nous nous proposons de trouver, dans une étude sommaire, l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction-paramètre dont dépend la déformation du système soumis à des charges réparties systématiquement sur les côtés AB et CD.

Recherchons d'abord la condition qui lie les composantes u et v du déplacement, sur Ox horizontal et Oy vertical. Le point de coordonnées x, y vient après déformation en $x+u$, $y+v$. Le point voisin du précédent, situé sur la poutre inclinée de $+\alpha$ qui passe par ce point, a pour coordonnées $x+l\cos\alpha$, $y+l\sin\alpha$ avant la mise en charge, et

$$\begin{aligned} &x+u+l(\cos\alpha+u'_x\cos\alpha+u'_y\sin\alpha)\\ &y+v+l(\sin\alpha+v'_x\cos\alpha+v'_y\sin\alpha), \end{aligned}$$

après l'application des charges. Le petit vecteur de composantes $l\cos\alpha$, $l\sin\alpha$ a pour nouvelles composantes

$$l[(1+u'_x)\cos\alpha+u'_y\sin\alpha],\quad l[v'_x\cos\alpha+(1+v'_y)\sin\alpha],$$

tandis que le vecteur analogue, issu du même point mais incliné de $-\alpha$ a pour nouvelles composantes

$$l'[(1+u'_x)\cos\alpha-u'_y\sin\alpha],\quad l'[v'_x\cos\alpha-(1+v'_y)\sin\alpha].$$

D'une première manière, le produit scalaire de ces deux vecteurs, après déformation a pour valeur

$$ll'[(1+u'_x)\cos^2\alpha-u'^2_y\sin^2\alpha+v'^2_x\cos^2\alpha-(1+v'_y)^2\sin^2\alpha],$$

c'est-à-dire

$$ll'[(1+2u'_x)\cos^2\alpha-(1+2v'_y)\sin^2\alpha]$$

quand on néglige les termes du second ordre. D'une seconde manière, ce produit scalaire vaut encore

$$(l+\delta l)(l'+\delta l')\cos 2\alpha$$

par suite de la conservation de l'angle 2α des petits vecteurs. La comparaison de ces deux valeurs donne la relation suivante :

$$\left(1+\frac{\delta l}{l}\right)\left(1+\frac{\delta l'}{l'}\right)\cos 2\alpha = (1+2u'_x)\cos^2\alpha - (1+2v'_y)\sin^2\alpha,$$

c'est-à-dire, après avoir développé les calculs

$$2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\,(u'_x - v'_y) = 0.$$

Comme α n'est pas un multiple de $\frac{\pi}{2}$, sinon les systèmes de poutres ne seraient pas distincts, on peut satisfaire à la condition précédente en introduisant la fonction-paramètre φ telle que

$$u = \varphi'_y, \qquad v = \varphi'_x \quad (^2).$$

Comme nous nous bornons à l'écriture rapide de l'équation aux dérivées partielles du problème, sans nous soucier des conditions de contour, quelque important que soit matériellement ce contour, il suffit de calculer l'énergie des systèmes de poutres croisées. Nous calculons d'abord l'énergie de courbure et d'allongement du système de poutres inclinées de $+\alpha$. Le changement de α en $-\alpha$ donnera ensuite les énergies correspondantes pour le second système.

Le calcul direct, ou la formule (27), donne l'allongement relatif d'une poutre

$$\frac{\delta l}{l} = \varphi''_{xy} + (\varphi''_{x^2} + \varphi''_{y^2})\sin\alpha\cos\alpha.$$

On en déduit, pour cette seule poutre, l'énergie d'allongement relatif à une petite longueur l :

$$\frac{1}{2}\,E\Omega l\,[\varphi''_{xy} + (\varphi''_{x^2} + \varphi''_{y^2})\sin\alpha\cos\alpha]^2.$$

Considérons maintenant une petite aire rectangulaire $dx\,dy$ dont les côtés parallèles aux axes ont pour longueur dx et dy. Cette aire est équivalente à celle d'un parallélogramme de base horizontale dx et dont l'autre côté, paralléle aux poutres considérées a pour longueur $l = \frac{dy}{\sin\alpha}$. Déformons encore ce parallélogramme de façon à obtenir un rectangle équivalent dont l'un des côtés est l, et l'autre $dx\sin\alpha$. Dans sa largeur sont comprises $\frac{dx\sin\alpha}{\lambda}$ poutres

(2) Cette condition entraîne le fait suivant : en chaque point de la membrane, les directions faisant les angles $\pm\beta$ avec l'horizontale, tournent du même angle, qui dépend en général de β.

parallèles, λ étant la distance de deux poutres voisines. Si $\mathcal{S}$ représente la région du plan où est la grille, l'énergie d'allongement des poutres du premier système a pour valeur

$$\frac{E\Omega}{2\lambda}\iint_{\mathcal{S}}[\varphi''_{xy}+(\varphi''_{x^2}+\varphi''_{y^2})\sin\alpha\cos\alpha]^2\,dx\,dy.$$

Pour le même élément de poutre, l'énergie de courbure a pour valeur

$$EI\ell\left(\Delta\frac{1}{R_g}\right)^2.$$

La formule (30) donne la nouvelle courbure qui est identique à la variation de courbure, car la courbure était initialement nulle. Cette formule s'écrit dans le cas actuel

$$\frac{1}{R_g}=\frac{\begin{vmatrix} d^2u & \cos\alpha \\ d^2\varphi & \sin\alpha \end{vmatrix}}{ds^2}=\sin\alpha\,\frac{d^2u}{ds^2}-\cos\alpha\,\frac{d^2\varphi}{ds^2},$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_g}=\;&\sin\alpha\,(\varphi'''_{x^2y}\cos^2\alpha+2\varphi'''_{xy^2}\sin\alpha\cos\alpha+\varphi'''_{y^3}\sin^2\alpha)\\&-\cos\alpha\,(\varphi'''_{x^3}\cos^2\alpha+2\varphi'''_{x^2y}\sin\alpha\cos\alpha+\varphi'''_{xy^2}\sin^2\alpha).\end{aligned}$$

On en déduit comme précédemment l'énergie totale du premier système de poutres

$$\frac{EI}{2\lambda}\iint_{\mathcal{S}}[\cos\alpha(-\varphi'''_{x^3}\cos^2\alpha+\varphi'''_{xy^2}\sin^2\alpha)+\sin\alpha\,(-\varphi'''_{x^2y}\cos^2\alpha+\varphi'''_{y^3}\sin^2\alpha)]^2\,dx\,dy.$$

On est donc conduit à l'énergie de l'ensemble des poutres, contour exclus :

$$\begin{aligned}\varpi=\;&\frac{E\Omega}{\lambda}\iint_{\mathcal{S}}[\varphi''^2_{xy}+(\varphi''_{x^2}+\varphi''_{y^2})^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha]\,dx\,dy\\&+\frac{EI}{\lambda}\iint_{\mathcal{S}}[\cos^2\alpha\,(-\varphi'''_{x^3}\cos^2\alpha+\varphi'''_{xy^2}\sin^2\alpha)^2+\sin^2\alpha\,(-\varphi'''_{x^2y}\cos^2\alpha+\varphi'''_{y^3}\sin^2\alpha)^2]\,dx\,dy.\end{aligned}$$

La variation de cette intégrale, telle que la donne le calcul des variations, quand on suppose la variation nulle au contour (ce qui n'est pas le cas en général pour notre problème, mais cela est sans influence sur l'équation aux dérivées partielles et n'agit que sur les conditions de contour que nous laissons de côté) peut se calculer simplement. Si X et Y sont les opérateurs symboliques $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$, l'équation cherchée s'écrit

$$\{E[X^2Y^2+(X^2+Y^2)\sin^2\alpha\cos^2\alpha]-I(X^2\cos^2\alpha+Y^2\sin^2\alpha)(X^2\cos^2\alpha-Y^2\sin^2\alpha)^2\}\varphi=0$$

Si dans cette équation on fait $\alpha=\frac{\pi}{4}$, on retrouve le même résultat qu'avec l'équation aux dérivées partielles du problème précédent, après avoir toutefois

effectué une rotation des axes de $\frac{\pi}{4}$ et supposé les deux systèmes de barres identiques

$$\Omega' = \Omega, \qquad I' = I, \qquad l' = l = \lambda.$$

Si l'on désire écrire les conditions au contour, on opère comme au paragraphe 13, c'est-à-dire que l'on ajoute à l'énergie des systèmes de poutres l'énergie du contour; puis on calcule la variation de cette énergie toute entière, et l'on transforme le résultat grâce à des intégrations par parties, de façon à le mettre sous la forme suivante :

$$\iint_{\mathcal{S}} P\,\delta\varphi\,dx\,dy + \int_{\mathcal{L}_1}\left(Q_1\delta\varphi + R_1\frac{\partial}{\partial y}\delta\varphi + S_1\frac{\partial}{\partial y^2}\delta\varphi + \dots\right)dx + \int_{\mathcal{L}_2}\left(Q_2\delta\varphi + R_2\frac{\partial}{\partial x}\delta\varphi + \dots\right)dy + \int_{\mathcal{L}_3} + \int_{\mathcal{L}_4} + E_A + E_B + E_C + E_D = 0.$$

Les conditions aux limites sont

$$\text{sur } \mathcal{S} : \quad P = 0, \qquad \text{sur } \mathcal{L}_i : \quad 0 = Q_i = R_i = S_i = \dots;$$
$$\text{en A} : \quad E_A = 0, \qquad \dots$$

Elles expriment naturellement les conditions d'encastrement au contour, mais il est inutile de le vérifier. Ce sont ces conditions qui doivent déterminer la solution de l'équation aux dérivées partielles.

16. Grille horizontale. — Un assemblage de poutres encastrées qui intervient souvent dans la construction de dallages en béton armé est le suivant : deux systèmes de poutres parallèles équidistantes sont construits simultanément, de sorte qu'aux nœuds on a pratiquement un encastrement parfait. Cet assemblage a une forme rectangulaire, dont le contour repose sur des appuis simples, un rectangle égal horizontal. Nous admettons ici une répartition constante de charges verticales, p par unité de surface; nous supposons par surcroît toutes les poutres identiques. Nous admettons en première approximation que le déplacement d'un point de la grille, sous l'action des charges, est vertical, égal à $w(x, y)$.

Le potentiel de forme d'un élément de poutre de longueur très petite, l, est

$$\frac{l}{2}\left[GJ\left(\Delta\frac{1}{T_r}\right)^2 + EI_2\left(\Delta\frac{1}{R_m}\right)^2 + EI_3\left(\Delta\frac{1}{R_g}\right)^2\right].$$

I_2 et I_3 sont respectivement les moments d'inertie de l'aire de la section droite par rapport à l'horizontale et à la verticale du centre de gravité.

Or, en l'absence de charges, $\frac{1}{T_r}$, $\frac{1}{R_m}$, $\frac{1}{R_g}$ sont nuls pour une poutre droite; le potentiel de forme se réduit donc à

$$\frac{l}{2}\left(\frac{GJ}{T_r^2} + \frac{EI_2}{R_m^2} + \frac{EI_3}{R_g^2}\right),$$

ces quantités étant calculées dans la position déformée. La formule (27) montre que l'allongement relatif est identiquement nul (c'est de l'hypothèse inverse qu'on déduit la nullité de u et v). Les formules (28) et (29) donnent $\frac{1}{R_m}$ et $\frac{1}{T_r}$, la formule (30) montre que $\frac{1}{R_g}$ est nul.

Dans une première hypothèse, nous supposons que les côtés du rectangle qui sert de contour sont parallèles aux deux systèmes de poutres, qui sont donc orthogonaux. Pour le premier système de poutres, un élément de longueur l a pour potentiel de forme

$$\frac{l}{2}[\mathrm{GJ}(w''_{xy})^2 + \mathrm{EI}(w''_{x^2})^2].$$

Il en résulte pour toute la surface le potentiel

$$\frac{1}{2\lambda}\iint_S [\mathrm{GJ}(w''_{xy})^2 + \mathrm{EI}(w''_{x^2})^2]\,dx\,dy.$$

De la même manière on a pour le deuxième système de poutres

$$\frac{1}{2\lambda}\iint_S \mathrm{GJ}(w''_{xy})^2 + \mathrm{EI}(w''_{y^2})^2]\,dx\,dy.$$

Le potentiel de la grille horizontale est donc défini par

$$2\varpi = \frac{1}{\lambda}\iint_S [2\,\mathrm{GJ}\,w''^2_{xy} + \mathrm{EI}(w''^2_{x^2} + w''^2_{y^2})]\,dx\,dy.$$

Le travail élémentaire des forces extérieures, dans un déplacement virtuel δw, valant

$$\iint_S -p\,\delta w\,dx\,dy,$$

on en déduit l'équation différentielle du problème

$$2\,\mathrm{GJ}\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \mathrm{EI}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + \lambda p = 0.$$

Un calcul plus complet donnerait les conditions au contour.

Dans une deuxième hypothèse, nous admettons que les poutres sont inclinées de l'angle $\pm\alpha$ sur l'axe des x. Les deux axes Ox et Oy étant des axes de symétrie du système matériel. On calcule le potentiel de forme de la manière indiquée ci-dessus et l'on trouve

$$\varpi = \frac{1}{\lambda}\iint_S \{\mathrm{GJ}[w''^2_{xy}\cos^2 2\alpha + (w''_{y^2} - w''_{x^2})^2 \sin^2\alpha\cos^2\alpha] + \mathrm{EI}[(w''_{x^2}\cos^2\alpha + w''_{y^2}\sin^2\alpha)^2 + w''^2_{xy}\sin^2 2\alpha]\}\,dx\,dy.$$

Le travail virtuel des forces extérieures ayant la valeur précédemment donnée, on forme sans peine l'équation différentielle du problème

$$\{ GJ\,[X^2Y^2\cos^2 2\alpha + (X^2 - Y^2)^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha] + EI\,[(X^2\cos^2\alpha + Y^2\sin^2\alpha)^2 + X^2Y^2\sin^2 2\alpha]\}\,w + \lambda p = 0,$$

avec les symboles

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Il conviendrait d'adjoindre les conditions aux limites qu'on obtient en formant complètement la variation du potentiel de forme.

17. Forme optima des colonnes de révolution pour résister au flambement. — Nous donnons un dernier exemple d'application du Calcul fonctionnel pour déterminer le rayon $r(x)$ à donner à une colonne de révolution verticale supportant la charge verticale Q donnée, de manière à employer le minimum de matériau. La longueur l de la colonne est une donnée du problème.

Ox est l'axe de révolution et O une des extrémités de la colonne. Nous employons la théorie sommaire du phénomène. Soit $y(x)$ la déflexion de la poutre, sous l'action de la charge Q, supposée nulle aux extrémités de la poutre. Calculant de deux manières différentes le moment fléchissant en un point on parvient à l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{\pi E r^4}{2} y'' + Q y = 0, \tag{31}$$

où l'on considère, en général, y comme la fonction inconnue et $r(x)$ comme donné. Il n'existe de solution non identiquement nulle pour cette équation, et satisfaisant aux conditions aux limites trouvées, que si Q prend l'une ou l'autre des valeurs d'une certaine suite. La plus petite de ces valeurs est la valeur critique de flambement, au-dessus de laquelle la colonne se brise, car une petite déformation s'amplifie.

D'un autre côté, nous voulons choisir la fonction $r(x)$ de manière que la quantité de matière utilisée soit minimum :

$$\delta \int_0^l \pi r^2\, dx = 0. \tag{32}$$

Nous nous ramenons à un problème du Calcul des variations en considérant que c'est $y(x)$ la fonction variable dont dépend le problème, et non $r(x)$ comme il est d'usage de le faire.

Soit donc $y(x)$ une fonction arbitraire, continue, possédant un nombre suffisant de dérivées continues, cette fonction étant nulle pour $x = 0$ et $x = l$.

La supposant connue, l'équation (31) fournira r :

$$r^4 = -\frac{2Q}{\pi E}\frac{y}{y''}.$$

Enfin, $y(x)$ doit satisfaire à la condition

$$\delta\int_0^l \sqrt{-\frac{y}{y''}}\,dx = 0.$$

C'est un problème bien connu du Calcul des variations. On forme l'équation d'Euler :

$$\frac{1}{\sqrt{-yy''}} + \frac{d^2}{dx^2}\sqrt{-\frac{y}{y''^3}} = 0.$$

On peut l'intégrer complètement, mais nous avons trouvé des difficultés dans la détermination des constantes d'intégration.

18. Conclusion. — La diversité des problèmes traités montre tout l'intérêt qu'il y a à introduire le Calcul fonctionnel en Mécanique et aussi en Physique. Le détail des calculs mis à part, la méthode est simple et relève directement des conceptions de Lagrange au sujet du principe du travail virtuel. Il semble que les exemples étudiés sont relativement simples dans le cadre de l'Analyse fonctionnelle.

Nous avons vu divers procédés pour introduire ou éliminer les réactions au contour. Le procédé, peut-être le plus intéressant, a consisté à ne les introduire que par leur travail virtuel élémentaire, puis a traduire exactement le principe du travail virtuel. On trouve ainsi une intégrale de surface augmentée d'une intégrale curviligne et de termes isolés au contour (points singuliers tels que sommets de rectangles, ou appuis), dont l'ensemble doit être nul quel que soit le déplacement virtuel. L'écriture de cette condition se fait immédiatement, si l'on est assuré que les fonctions-paramètres sont indépendantes. Sinon, ou bien on recherche des fonctions-paramètres indépendantes, ou bien on introduit les multiplicateurs nécessaires. De toutes façons on forme simultanément l'équation ou les équations différentielles du problème et les conditions aux limites.

THÉORÈMES TAUBÉRIENS

POUR LES

SÉRIES MULTIPLES DE DIRICHLET

ET LES

INTÉGRALES MULTIPLES DE LAPLACE

PAR M. HUBERT DELANGE.

Introduction.

Il est bien connu que Tauber a établi en 1897 [19] (1) le résultat suivant : Si l'on suppose que na_n, ou même plus généralement $\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} \nu a_\nu$, tend vers zéro pour n infini, le fait que la somme de la série entière $\sum_{0}^{+\infty} a_n X^n$ tende vers une limite finie S quand X tend vers 1 par valeurs réelles inférieures à 1 entraîne la convergence de la série $\sum_{0}^{+\infty} a_n$ avec pour somme S.

Il est bien connu aussi que la même chose a lieu si l'on suppose seulement na_n borné, ou même a_n réel et na_n borné inférieurement ou supérieurement.

Ces résultats ne sont d'ailleurs que des cas particuliers de résultats relatifs à la série de Dirichlet

$$\sum_{0}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n z}, \tag{1}$$

(1) Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin du Mémoire.

où les a_n sont des coefficients réels ou complexes et les λ_n des nombres réels satisfaisant à

$$\lambda_0 \geqq 0, \quad \lambda_n < \lambda_{n+1} \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \lambda_n = +\infty.$$

En effet, sous l'hypothèse que $\lim_{n \to +\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1$, Littlewood a établi en 1911 [15] que, si les coefficients a_n satisfont pour $n \geqq 1$ à

$$|a_n| \leqq M \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}, \tag{2}$$

le fait que $\sum_0^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ tende vers une limite finie S quand z tend vers zéro par valeurs réelles positives entraîne la convergence de la série $\sum_0^{+\infty} a_n$ avec pour somme S.

Hardy et Littlewood ont établi en 1914 [11], sous la même hypothèse $\lim_{n \to +\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1$, que la même chose a lieu si l'on suppose que a_n est réel et satisfait pour $n \geqq 1$ à

$$a_n \geqq -M \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}. \tag{3}$$

Si l'on pose $X = e^{-z}$, la série entière $\sum_0^{+\infty} a_n X^n$ devient $\sum_0^{+\infty} a_n e^{-nz}$, qui est le cas particulier de (1) correspondant à $\lambda_n = n$. Lorsque z tend vers zéro par valeurs réelles positives, X tend vers 1 par valeurs réelles inférieures à 1. D'autre part, les conditions (2) et (3) deviennent ici

$$n|a_n| \leqq M \tag{4}$$

et

$$na_n \geqq -M. \tag{5}$$

Ajoutons qu'Ananda-Rau ([1] et [2]) a montré que l'hypothèse $\lim_{n \to +\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1$ est superflue dans le théorème de Littlewood avec la condition (2), mais non dans celui de Hardy et Littlewood avec la condition (3).

D'autre part, de nombreux auteurs ont donné d'autres conditions susceptibles de remplacer (2) ou (3) ([14], [16], [17], [18], etc.). On a montré par ailleurs [17] que, dans les théorèmes où l'hypothèse $\lim_{n \to +\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1$ n'est pas superflue, elle peut être remplacée par $\overline{\lim_{n \to +\infty}} a_n \geqq 0$. Nous avons établi nous-même ([6] et [8]) qu'en la supprimant totalement on peut encore obtenir une conclusion, mais qui n'est plus la convergence de $\sum_0^{+\infty} a_n$.

Il est naturel de se demander s'il est possible d'établir des résultats analogues aux précédents pour les séries entières à plusieurs variables ou les séries multiples de Dirichlet.

A notre connaissance, seul le cas des séries entières à deux variables avait été étudié avant notre Note de 1948 [5].

Hardy et Littlewood avaient établi dès 1913 [10] le résultat suivant :

Soit la série double $\sum a_{m,n}X^mY^n$, où m et n prennent tous les systèmes de valeurs entières tels que $m \geqq 1$ et $n \geqq 1$. Posons

$$S_{m,n}=\sum_{\substack{i\leq m\\ j\leq n}} a_{i,j}, \qquad p_{m,n}=\sum_{j=1}^{n} a_{m,j}, \qquad q_{m,n}=\sum_{i=1}^{m} a_{i,n}.$$

Si l'on suppose que $mp_{m,n}$ et $nq_{m,n}$ sont bornés pour toutes les valeurs de m et n et tendent vers zéro quand m et n tendent vers $+\infty$, le fait que la somme $f(X, Y)$ de la série double tende vers une limite finie S lorsque X et Y tendent vers 1 par valeurs réelles inférieures à 1 entraîne que $S_{m,n}$ tende vers S quand m et n tendent vers $+\infty$.

L'hypothèse faite ici sur $p_{m,n}$ et $q_{m,n}$ est satisfaite en particulier si $(m^2+n^2)a_{m,n}$ est borné pour toutes les valeurs de m et n et tend vers zéro quand m et n tendent vers $+\infty$. On a ainsi un théorème complètement analogue au premier théorème de Tauber.

Ce n'est qu'en 1939 que Knopp [13] a établi, sous l'hypothèse supplémentaire que $f(X, Y)$ est borné pour X et Y réels satisfaisant à $0 \leqq X < 1$ et $0 \leqq Y < 1$ (2), que la condition $(m^2+n^2)|a_{m,n}| \leqq M$ est suffisante pour que la convergence de $f(X, Y)$ vers une limite finie S quand X et Y tendent vers 1 par valeurs réelles inférieures à 1 entraîne la convergence de $S_{m,n}$ vers S quand m et n tendent vers $+\infty$.

Ce résultat est analogue à celui relatif à la condition (4) pour les séries simples.

Le résultat correspondant à celui relatif à la condition (5) a été établi en 1940 par Durañona y Vedia [9] :

Si les coefficients $a_{m,n}$ sont réels, si $f(X, Y)$ existe et est bornée pour X et Y réels satisfaisant à $0 \leqq X < 1$ et $0 \leqq Y < 1$, et s'il existe un nombre K tel que l'on ait quels que soient m et n :

$$mp_{m,n} \geqq -K \qquad \text{et} \qquad nq_{m,n} \geqq -K,$$

la convergence de $f(X, Y)$ vers une limite finie S quand X et Y tendent vers 1 par valeurs réelles inférieures à 1 entraîne que $S_{m,n}$ tende vers S quand m et n tendent vers $+\infty$.

---

(2) Nous verrons que cette hypothèse est superflue.

Le but du présent Mémoire est de généraliser ces résultats. Pour ne pas compliquer les notations, nous resterons dans le cas de deux variables, mais il n'y a aucune différence essentielle avec le cas de n variables, où $n > 2$.

On sait que les théorèmes taubériens relatifs aux séries de Dirichlet ordinaires peuvent s'établir simplement comme corollaires de résultats relatifs à l'intégrale de Laplace.

De même, les théorèmes sur les séries doubles de Dirichlet s'obtiendront ici comme corollaires de théorèmes sur les intégrales doubles de Laplace. Mais il apparaît tout de suite une différence avec le cas d'une variable :

Si l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-zt}\,ds(t)$ est convergente pour $\mathcal{R}z > 0$, on sait qu'elle est égale à $\int_0^{+\infty} z\,e^{-zt}\,s(t)\,dt$, qui est absolument convergente. Il suffit donc de considérer une intégrale de cette dernière forme.

On n'a pas de théorème analogue pour l'intégrale double $\iint e^{-uz-vz'}\,ds(u, v)$.

Aussi, nous étudierons séparément les intégrales de la forme

$$\iint zz'\,e^{-uz-vz'}\,s(u, v)\,du\,dv$$

et celles de la forme

$$\iint e^{-uz-vz'}\,ds(u, v).$$

Les résultats relatifs à la seconde forme nous donneront ensuite ceux relatifs aux séries doubles de Dirichlet.

Nous donnerons pour ces séries doubles des théorèmes correspondant exactement à ceux cités plus haut pour les séries simples, et aussi d'autres qui ne peuvent pas avoir d'analogues pour les séries simples, du fait qu'il y a moins de possibilités pour le comportement d'une suite simple que pour celui d'une suite double (3).

Les méthodes que nous emploierons ici seront tout à fait semblables à celles que nous avons utilisées pour les séries ou les intégrales simples dans notre article [6].

1. Préliminaires.

1.1. Dans tout ce qui suit, $\int_a^b \int_c^d f(u, v)\,du\,dv$, où a, b, c, d sont finis et $a < b$, $c < d$, représente l'intégrale de la fonction $f(u, v)$ sur le rectangle $a \leq u \leq b$, $c \leq v \leq d$. Si $f(u, v)$ est réelle, c'est l'intégrale de Lebesgue ordinaire. Si $f(u, v)$ est à valeur réelle ou complexe, nous la supposons définie à l'aide de celles de la partie réelle et de la partie imaginaire.

(3) Ces différents théorèmes ont été énoncés dans notre Note [5].

L'intégrale de $f(u, v)$ sur le quadrant $u \geqq 0$, $v \geqq 0$, que l'on peut désigner par $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(u, v)\,du\,dv$, est définie comme limite pour A et B tendant vers $+\infty$ de $\int_0^{A}\int_0^{B} f(u, v)\,du\,dv$. Son existence implique donc d'abord que, quels que soient A et B positifs, f soit sommable sur le rectangle $0 \leqq u \leqq A$, $0 \leqq v \leqq B$, ensuite que l'intégrale de f sur ce rectangle tende vers une limite finie quand A et B tendent vers $+\infty$ indépendamment l'un de l'autre.

On sait que, la première condition étant supposée remplie, l'intégrale $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(u, v)\,du\,dv$ existe certainement si $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} |f(u, v)|\,du\,dv$ existe, auquel cas *on dit qu'elle est absolument convergente*, ou que f est sommable sur le quadrant $u \geqq 0$, $v \geqq 0$.

Toutes les fois que nous écrirons $\iint f(u, v)\,du\,dv$ sans mentionner explicitement le champ d'intégration, il sera entendu qu'il s'agit de l'intégral $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(u, v)\,du\,dv$.

1.2. Dans les paragraphes qui suivent, R désigne un rectangle $a \leqq u \leqq b$, $c \leqq v \leqq d$, où a, b, c, d sont des nombres finis satisfaisant à $a < b$, $c < d$.

1.3. $g(u, v)$ étant une fonction réelle ou complexe définie sur le rectangle R, on dit qu'elle est *à variation bornée sur ce rectangle* si, quels que soient les systèmes de nombres réels $u_0, u_1, \ldots, u_m$ et $v_0, v_1, \ldots, v_n$ satisfaisant à

$$a = u_0 < u_1 < \ldots < u_m = b,$$
$$c = v_0 < v_1 < \ldots < v_n = d$$

(m et n quelconques), la somme

$$\sum_{\substack{0 \leqq i \leqq m-1 \\ 0 \leqq j \leqq n-1}} |g(u_{i+1}, v_{j+1}) - g(u_i, v_{j+1}) - g(u_{i+1}, v_j) + g(u_i, v_j)|$$

reste au plus égale à un nombre fixe (*).

Alors la borne supérieure de cette somme pour tous les systèmes possibles de nombres u_i et v_j s'appelle la *variation totale de g sur* R.

1.3.1. Un exemple particulièrement simple est le suivant :

Donnons-nous p points $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \ldots, (\alpha_p, \beta_p)$ appartenant au rec-

(*) Cette définition est celle de Vitali. Il en existe un certain nombre d'autres, non équivalentes à celle-ci.

tangle R, et p nombres réels ou complexes $a_1, a_2, \ldots, a_p$, puis définissons $g(u, v)$ comme suit :

Si $u = a$ ou $v = c$, prenons $g(u, v) = 0$.

Pour $a < u \leq b$, $c < v \leq d$, prenons $g(u, v)$ égal à la somme des a_j correspondant aux indices j pour lesquels $\alpha_j \leq u$ et $\beta_j \leq v$ (cette somme étant prise nulle s'il n'y a aucun tel indice).

On voit aisément que cette fonction $g(u, v)$ est à variation bornée sur R et que sa variation totale sur R est $\sum_{j=1}^{p} |a_j|$.

1.3.2. Un autre exemple simple est le suivant :

Soit $\gamma(u, v)$ une fonction réelle ou complexe sommable sur le rectangle R et soit $g(u, v)$ la fonction définie sur R comme suit :

Si $u = a$ ou $v = c$,

$$g(u, v) = 0.$$

Si $a < u \leq b$, $c < v \leq d$,

$$g(u, v) = \int_a^u \int_c^v \gamma(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

$g(u, v)$ est encore à variation bornée sur R et sa variation totale sur R est $\int_a^b \int_c^d |\gamma(u, v)|\, du\, dv$ (5).

1.3.3. Notons que, si la fonction $g(u, v)$, définie sur R, ne dépend que de u, ou que de v, elle est à variation bornée sur R, sa variation totale sur R étant nulle.

D'une façon générale, une fonction à variation bornée sur R le reste si on lui ajoute une fonction de u seul ou une fonction de v seul, et cela ne modifie pas sa variation totale sur R.

1.3.4. Si la fonction $g(u, v)$ est à variation bornée sur R, quels que soient u_0 et v_0 satisfaisant à $a \leq u_0 < b$ et $c \leq v_0 < d$, $g(u, v)$ tend vers une limite finie $g(u_0 + 0, v_0 + 0)$ quand le point (u, v) tend vers le point (u_0, v_0) en restant dans le quadrant $u > u_0$, $v > v_0$, et, quels que soient u'_0 et v'_0 satisfaisant à $a < u'_0 \leq b$ et $c < v'_0 \leq d$, $g(u, v)$ tend vers une limite finie $g(u'_0 - 0, v'_0 - 0)$ quand le point (u, v) tend vers le point (u'_0, v'_0) en restant dans le quadrant $u < u'_0$, $v < v'_0$.

---

(5) Il est aisé de voir que $g(u, v)$ est à variation bornée sur R, sa variation totale étant *au plus égale à* $\int_a^b \int_c^d |\gamma(u, v)|\, du\, dv$, mais moins de voir que la variation est exactement égale à cette intégrale.

1.4. Nous dirons que la fonction réelle ou complexe $g(u, v)$, définie sur R, appartient à la classe H sur R si :

1° Elle est à variation bornée sur R ;

2° Quel que soit $\xi \in [a, b]$, $g(\xi, v)$ est une fonction de v à variation bornée sur $[c, d]$, et, quel que soit $\eta \in [c, d]$, $g(u, \eta)$ est une fonction de u à variation bornée sur $[a, b]$ (6).

On voit aisément que, si l'hypothèse 1° est satisfaite, l'hypothèse 2° l'est dès que, pour *un* $\xi \in [a, b]$, $g(\xi, v)$ est une fonction de v à variation bornée sur $[c, d]$, et, pour *un* $\eta \in [c, d]$, $g(u, \eta)$ est une fonction de u à variation bornée sur $[a, b]$.

En particulier, si $g(u, v)$ est à variation bornée sur R et est nulle quand $u = a$ ou $v = c$, elle appartient à la classe H sur R.

1.5. $f(u, v)$ et $g(u, v)$ étant deux fonctions réelles ou complexes définies sur le rectangle R, l'intégrale $\iint f(u, v)\, dg(u, v)$ étendue à ce rectangle, que nous désignerons par $\int_a^b \int_c^d f(u, v)\, dg(u, v)$, est définie de la façon suivante :

Étant donné les systèmes de nombres réels $u_0, u_1, \ldots, u_m$ et $v_0, v_1, \ldots, v_n$ satisfaisant aux conditions écrites plus haut, on leur fait correspondre la somme

$$\Sigma = \sum_{\substack{0 \leq i \leq m-1 \\ 0 \leq j \leq n-1}} f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) [g(u_{i+1}, v_{j+1}) - g(u_i, v_{j+1}) - g(u_{i+1}, v_j) + g(u_i, v_j)],$$

où (ξ_{ij}, η_{ij}) est un point arbitraire du rectangle $u_i \leq u \leq u_{i+1}$, $v_j \leq v \leq v_{j+1}$. [Σ n'est donc pas déterminée quand on connaît les u_i et les v_j, mais dépend encore du choix des points (ξ_{ij}, η_{ij})].

Par définition, l'intégrale $\int_a^b \int_c^d f(u, v)\, dg(u, v)$ est la limite de Σ quand Max $(u_{i+1} - u_i)$ et Max $(v_{j+1} - v_j)$ tendent vers zéro, si cette limite existe (7).

1.5.1. Il est clair que, si les intégrales $\int_a^b \int_c^d f_1(u, v)\, dg(u, v)$ et $\int_a^b \int_c^d f_2(u, v)\, dg(u, v)$ existent et sont égales respectivement à I_1 et I_2, quels

(6) La fonction g est alors à variation bornée au sens de Hardy et Krause sur le rectangle R.

(7) Nous disons que Σ tend vers I quand Max $(u_{i+1} - u_i)$ et Max $(v_{j+1} - v_j)$ tendent vers zéro, si à tout ε positif correspond un nombre positif $\eta(\varepsilon)$ tel que, lorsque les systèmes de nombres $u_0, u_1, \ldots, u_m$ et $v_0, v_1, \ldots, v_n$ satisfont à Max $(u_{i+1} - u_i) \leq \eta(\varepsilon)$ et Max $(v_{j+1} - v_j) \leq \eta(\varepsilon)$, on a pour tout choix des points (ξ_{ij}, η_{ij})

$$|\Sigma - I| \leq \varepsilon.$$

Il est clair que, s'il existe un I ayant cette propriété, il est unique.

que soient λ et μ réels ou complexes, $\int_a^b \int_c^d [\lambda f_1(u, v) + \mu f_2(u, v)]\, dg(u, v)$ existe aussi et est égale à $\lambda I_1 + \mu I_2$.

De même, si les intégrales $\int_a^b \int_c^d f(u, v)\, dg_1(u, v)$ et $\int_a^b \int_c^d f(u, v)\, dg_2(u, v)$ existent et sont égales respectivement à J_1 et J_2, quels que soient λ et μ réels ou complexes, l'intégrale $\int_a^b \int_c^d f(u, v)\, dg(u, v)$, où

$$g(u, v) = \lambda g_1(u, v) + \mu g_2(u, v),$$

existe aussi et est égale à $\lambda J_1 + \mu J_2$.

1.5.2. Il est clair également que, si $g(u, v)$ ne dépend que de u seul, ou de v seul, quel que soit $f(u, v)$, l'intégrale $\int_a^b \int_c^d f(u, v)\, dg(u, v)$ existe et est nulle.

Par suite, dans l'intégrale $\int_a^b \int_c^d f(u, v)\, dg(u, v)$, on peut sans inconvénient ajouter à $g(u, v)$ une fonction dépendant seulement de u ou seulement de v.

1.5.3. On voit immédiatement que, si $f(u,v)=1$, l'intégrale $\int_a^b \int_c^d f(u,v) dg(u,v)$ existe pour n'importe quelle fonction g définie sur R et est égale à

$$g(a, c) + g(b, d) - g(a, d) - g(b, c).$$

1.6. On montre sans peine que l'intégrale $\int_a^b \int_c^d f(u, v)\, dg(u, v)$ existe certainement si f est continue sur R et g à variation bornée sur R.

1.6.1. En particulier, si, f étant continue sur R, g est la fonction considérée au paragraphe 1.3.1, on a

$$\int_a^b \int_c^d f(u, v)\, dg(u, v) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j f(\alpha_j, \beta_j).$$

1.6.2. Si, f étant toujours continue sur R, g est la fonction considérée au paragraphe 1.3.2, on a

$$\int_a^b \int_c^d f(u, v)\, dg(u, v) = \int_a^b \int_c^d f(u, v)\, \gamma(u, v)\, du\, dv.$$

1.7. Si l'une des fonctions f et g appartient à la classe H sur R, tandis que l'autre est continue et à variation bornée sur R, les l'intégrales

$$\int_a^b \int_c^d f(u, v)\, dg(u, v) \quad \text{et} \quad \int_a^b \int_c^d g(u, v)\, df(u, v)$$

existent toutes les deux.

On a alors la formule d'intégration par parties (8) :

$$\int_a^b \int_c^d f(u,v)\,dg(u,v) = f(b,d)\,g(b,d) - f(a,d)\,g(a,d) - f(b,c)\,g(b,c) + f(a,c)\,g(a,c)$$
$$+ \int_a^b g(u,c)\,df(u,c) - \int_a^b g(u,d)\,df(u,d)$$
$$+ \int_c^d g(a,v)\,df(a,v) - \int_c^d g(b,v)\,df(b,v)$$
$$+ \int_a^b \int_c^d g(u,v)\,df(u,v).$$

1.7.1. En particulier, si f est continue et a des dérivées partielles f'_u, f'_v et f''_{uv} continues sur R, et si g est à variation bornée sur R et nulle pour $u=a$ ou $v=c$, on a

$$\int_a^b \int_c^d f(u,v)\,dg(u,v) = f(b,d)\,g(b,d) - \int_a^b g(u,d)\,f'_u(u,d)\,du$$
$$- \int_c^d g(b,v)\,f'_v(b,v)\,dv$$
$$+ \int_a^b \int_c^d g(u,v)\,f''_{uv}(u,v)\,du\,dv.$$

1.8. Si f est continue sur R et g à variation bornée sur ce rectangle, la fonction h définie par

$$h(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leqq a \text{ ou } v = b, \\ \displaystyle\int_a^u \int_c^v f(\xi,\eta)\,dg(\xi,\eta) & \text{si } a < u \leqq b, \quad c < v \leqq d, \end{cases}$$

est à variation bornée sur R (et même appartient à la classe H sur R).

Quelle que soit φ continue sur R, on a

$$\int_a^b \int_c^d \varphi(u,v)\,dh(u,v) = \int_a^b \int_c^d \varphi(u,v) f(u,v)\,dg(u,v).$$

1.9. L'intégrale $\iint f(u,v)\,dg(u,v)$ étendue au quadrant $u \geqq 0$, $v \geqq 0$, que l'on peut désigner par $\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(u,v)\,dg(u,v)$, est définie comme limite pour A et B tendant vers $+\infty$ de $\int_0^A \int_0^B f(u,v)\,dg(u,v)$.

---

(8) *Cf.* Young [21], p. 281.

Son existence implique donc d'abord que, quels que soient A et B positifs, l'intégrale $\int_0^A \int_0^B f(u, v)\, dg(u, v)$ existe, ensuite que cette dernière intégrale tende vers une limite finie quand A et B tendent vers $+\infty$ indépendamment l'un de l'autre.

La première condition est certainement remplie si f est continue pour $u \geq 0$, $v \geq 0$, g étant à variation bornée sur tout rectangle $0 \leq u \leq A$, $0 \leq v \leq B$.

1.9.1. Toutes les fois que nous écrirons $\iint f(u, v)\, dg(u, v)$ sans mentionner explicitement le champ d'intégration, il sera entendu qu'il s'agit de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(u, v)\, dg(u, v)$.

1.10. On sait que, si l'intégrale $\iint e^{-ux-vy}\, \sigma(u, v)\, du\, dv$ est absolument convergente pour x et y réels positifs, elle représente une fonction de x et y holomorphe pour $\mathcal{R}x > 0$ et $\mathcal{R}y > 0$.

On sait aussi que, si les fonctions réelles ou complexes $\sigma_1(u, v)$ et $\sigma_2(u, v)$ sont continues pour u et $v \geq 0$, si les intégrales $\iint e^{-ux-vy}\, \sigma_1(u, v)\, du\, dv$ et $\iint e^{-ux-vy}\, \sigma_2(u, v)\, du\, dv$ sont absolument convergentes pour x et $y > 0$, et si, pour x et $y > 0$,

$$\iint e^{-ux-vy}\, \sigma_1(u, v)\, du\, dv = \iint e^{-ux-vy}\, \sigma_2(u, v)\, du\, dv,$$

on a pour u et $v \geq 0$:

$$\sigma_1(u, v) = \sigma_2(u, v) \quad (9).$$

En particulier, si $\sigma(u, v)$ est continue pour u et $v \geq 0$, et si l'intégrale $\iint e^{-ux-vy}\, \sigma(u, v)\, du\, dv$ est absolument convergente pour x et $y > 0$ et égale à $\frac{A}{x^2 y^2}$, on a

$$\sigma(u, v) = A\, uv.$$

1.11. Si $s(u, v)$ est à variation bornée sur tout rectangle $0 \leq u \leq A$, $0 \leq v \leq B$, et nulle qnand $u = 0$ ou $v = 0$, et si l'on a pour u et $v \geq 0$:

$$|s(u, v)| \leq M\, e^{a_0 u + b_0 v},$$

avec a_0 et $b_0 > 0$, l'intégrale $\iint e^{-ux-vy}\, ds(u, v)$ est convergente pour $\mathcal{R}x > a_0$ et $\mathcal{R}y > b_0$ et égale à l'intégrale absolument convergente

$$\iint xy\, e^{-ux-vy}\, s(u, v)\, du\, dv \quad (10).$$

---

(9) *Voir* par exemple [20], p. 29.

(10) *Cf.* D. L. Bernstein [3], p. 469-470.

Ceci se voit aisément en utilisant la formule du paragraphe 1.7.1.

2. Préliminaires (*suite*).

2.1. Il est entendu une fois pour toutes que, dans tout ce qui suit, λ et μ désignent deux nombres réels supérieurs à 1, et E un ensemble de couples (u, v) de nombres réels positifs, supposé tel que, quel que soit A positif, il y ait dans E des couples satisfaisant à $u \geqq A$ et $v \geqq A$.

2.2. A toute fonction réelle ou complexe $s(u, v)$ définie pour u et v réels positifs, on associe des fonctions définies comme suit :

On pose

$$\begin{aligned}
W_s(u, v, \lambda, \mu) &= \operatorname*{Sup}_{\substack{u \leq u' \leq \lambda u \\ v \leq v' \leq \mu v}} |s(u', v') - s(u, v)|, \\
\overline{w}_s(\lambda, \mu) &= \operatorname*{Sup}_{u, v > 0} W_s(u, v, \lambda, \mu), \\
w_s(\lambda, \mu) &= \overline{\lim_{u, v \to +\infty}} W_s(u, v, \lambda, \mu) \quad (11), \\
w_s(E, \lambda, \mu) &= \overline{\lim_{\substack{u, v \to +\infty \\ (u, v) \in E}}} W_s(u, v, \lambda, \mu).
\end{aligned}$$

Il est clair que ces fonctions ont des valeurs positives ou nulles, et finies ou non. Si $s(u, v)$ est bornée à distance finie, $W_s(u, v, \lambda, \mu)$ est toujours finie.

De plus, on a toujours

$$w_s(E, \lambda, \mu) \leqq w_s(\lambda, \mu) \leqq \overline{w}_s(\lambda, \mu).$$

Si $s(u, v)$ est supposée réelle, on pose en outre

$$\begin{aligned}
\Pi'_s(u, v, \lambda, \mu) &= \operatorname*{Inf}_{\substack{u \leq u' \leq \lambda u \\ v \leq v' \leq \mu v}} [s(u', v') - s(u, v)], \\
\Pi''_s(u, v, \lambda, \mu) &= \operatorname*{Sup}_{\substack{\frac{u}{\lambda} \leq u' \leq u \\ \frac{v}{\mu} \leq v' \leq v}} [s(u', v') - s(u, v)], \\
\overline{\omega}_s(\lambda, \mu) &= \operatorname*{Sup}_{u, v > 0} \Pi'_s(u, v, \lambda, \mu), \\
\omega_s(\lambda, \mu) &= \overline{\lim_{u, v \to +\infty}} \Pi'_s(u, v, \lambda, \mu), \\
\omega'_s(E, \lambda, \mu) &= \overline{\lim_{\substack{u, v \to +\infty \\ (u, v) \in E}}} \Pi'_s(u, v, \lambda, \mu), \\
\omega''_s(E, \lambda, \mu) &= \overline{\lim_{\substack{u, v, \to +\infty \\ (u, v) \in E}}} \Pi''_s(u, v, \lambda, \mu).
\end{aligned}$$

---

(11) $\overline{\lim_{u, v \to +\infty}} f(u, v)$ est définie comme étant le nombre L, fini ou non, ayant les propriétés suivantes :

1° Si $y > L$, il existe $A(y)$ tel que, pour u et $v \geqq A(y)$, $f(u, v) \leqq y$;

2° Si $y < L$, quel que soit A réel, il existe u et $v \geqq A$ tels que $f(u, v) > y$.

Cela revient à dire que, pour toute suite de couples (u_n, v_n), où u_n et v_n tendent vers $+\infty$ et telle que $f(u_n, v_n)$ tende vers une limite, finie ou non, cette limite est $\leqq L$, et que l'égalité peut effectivement avoir lieu.

Ces fonctions ont encore des valeurs positives ou nulles, finies ou non, et, si $s(u, v)$ est bornée à distance finie, les deux premières ont toujours une valeur finie.

D'autre part, on a évidemment

$$\varpi_s(\lambda, \mu) \leq \overline{\varpi}_s(\lambda, \mu) \leq \overline{w}_s(\lambda, \mu) \qquad \text{et} \qquad \varpi_s(\lambda, \mu) \leq w_s(\lambda, \mu).$$

Si l'on prend pour E l'ensemble de tous les couples de nombres positifs, on a, d'après la définition de $\varpi_s(\lambda, \mu)$,

$$\varpi'_s(\mathrm{E}, \lambda, \mu) = \varpi_s(\lambda, \mu).$$

Il est facile de voir que l'on a aussi

$$\varpi''_s(\mathrm{E}, \lambda, \mu) = \varpi_s(\lambda, \mu).$$

En effet, si $\gamma > \overline{\lim_{u, v \to +\infty}} \Pi'_s(u, v, \lambda, \mu)$, il existe un nombre positif A tel que, pour u et $v \geq \mathrm{A}$, $\Pi'_s(u, v, \lambda, \mu) \leq \gamma$. Alors, si

$$\mathrm{A} \leq u \leq u' \leq \lambda u, \qquad \mathrm{A} \leq v \leq v' \leq \mu v,$$

on a

$$s(u', v') - s(u, v) \geq -\gamma \qquad \text{ou} \qquad s(u, v) - s(u', v') \leq \gamma.$$

Si $u \geq \lambda \mathrm{A}$, $v \geq \mu \mathrm{A}$, et $\frac{u}{\lambda} \leq u' \leq u$, $\frac{v}{\mu} \leq v' \leq v$, on a

$$\mathrm{A} \leq u' \leq u \leq \lambda u' \qquad \text{et} \qquad \mathrm{A} \leq v' \leq v \leq \mu v',$$

donc

$$s(u', v') - s(u, v) \leq \gamma.$$

Par suite, pour $u \geq \lambda \mathrm{A}$ et $v \geq \mu \mathrm{A}$, $\Pi''_s(u, v, \lambda, \mu) \leq \gamma$. Il en résulte que

$$\overline{\lim_{u, v \to +\infty}} \Pi''_s(u, v, \lambda, \mu) \leq \gamma.$$

Inversement, si $\overline{\lim_{u, v \to +\infty}} \Pi''_s(u, v, \lambda, \mu) < \gamma$, il existe un nombre positif B tel que, pour u et $v \geq \mathrm{B}$, $\Pi''_s(u, v, \lambda, \mu) \leq \gamma$. Alors, si

$$u \geq \mathrm{B}, \qquad v \geq \mathrm{B}, \qquad \frac{u}{\lambda} \leq u' \leq u, \qquad \frac{v}{\mu} \leq v' \leq v,$$

on a

$$s(u', v') - s(u, v) \leq \gamma, \qquad \text{ou} \qquad s(u, v) - s(u', v') \geq -\gamma$$

Si $\mathrm{B} \leq u \leq u' \leq \lambda u$, $\mathrm{B} \leq v \leq v' \leq \mu v$, on a

$$u' \geq \mathrm{B}, \qquad v' \geq \mathrm{B}, \qquad \frac{u'}{\lambda} \leq u \leq u', \qquad \frac{v'}{\mu} \leq v \leq v',$$

donc

$$s(u', v') - s(u, v) \geq -\gamma.$$

Par suite, pour u et $v \geqq B$, $\Pi'_s(u, v, \lambda, \mu) \leqq y$. Il en résulte que

$$\overline{\lim_{u, v \to +\infty}} \Pi'_s(u, v, \lambda, \mu) \leqq y.$$

On voit donc que l'on a bien

$$\overline{\lim_{u, v \to +\infty}} \Pi''_s(u, v, \lambda, \mu) = \overline{\lim_{u, v \to +\infty}} \Pi'_s(u, v, \lambda, \mu).$$

Ceci étant, on voit que, quel que soit E,

$$\varpi'_s(E, \lambda, \mu) \leqq \varpi_s(\lambda, \mu) \qquad \text{et} \qquad \varpi''_s(E, \lambda, \mu) \leqq \varpi_s(\lambda, \mu).$$

Ajoutons que toutes les fonctions considérées ci-dessus sont des fonctions non décroissantes de λ et de μ.

2.3. Nous allons montrer que :

ou bien on a $\overline{\varpi}_s(\lambda, \mu) = +\infty$ *quels que soient* λ *et* μ *supérieurs à* 1 ;
ou bien on a $\overline{\varpi}_s(\lambda, \mu) < +\infty$ *quels que soient* λ *et* μ *supérieurs à* 1.

2.3.1. D'abord, quels que soient λ_1, μ_1, λ_2, μ_2 supérieurs à 1, on a

$$\overline{\varpi}_s(\lambda_1 \lambda_2, \mu_1 \mu_2) \leqq \overline{\varpi}_s(\lambda_1, \mu_1) + \overline{\varpi}_s(\lambda_2, \mu_2). \tag{6}$$

Il suffit de le montrer dans le cas où les deux termes du second membre sont finis. Cela se ramène à montrer que, si $0 < u \leqq u' \leqq \lambda_1 \lambda_2 u$ et $0 < v \leqq v' \leqq \mu_1 \mu_2 v$,

$$|s(u', v') - s(u, v)| \leqq \overline{\varpi}_s(\lambda_1, \mu_1) + \overline{\varpi}_s(\lambda_2, \mu_2).$$

Or, si $u \leqq u' \leqq \lambda_1 u$, $v \leqq v' \leqq \mu_1 v$, on a

$$|s(u', v') - s(u, v)| \leqq W_s(u, v, \lambda_1, \mu_1) \leqq \overline{\varpi}_s(\lambda_1, \mu_1).$$

Si $\lambda_1 u < u' \leqq \lambda_1 \lambda_2 u$, $v \leqq v' \leqq \mu_1 v$, on a

$$\begin{aligned} |s(u', v') - s(u, v)| &\leqq |s(\lambda_1 u, v') - s(u, v)| + |s(u', v') - s(\lambda_1 u, v')|, \\ &\leqq W_s(u, v, \lambda_1, \mu_1) + W_s(\lambda_1 u, v', \lambda_2, \mu_2), \\ &\leqq \overline{\varpi}_s(\lambda_1, \mu_1) + \overline{\varpi}_s(\lambda_2, \mu_2). \end{aligned}$$

Si $u \leqq u' \leqq \lambda_1 u$, $\mu_1 v < v' \leqq \mu_1 \mu_2 v$, on a

$$\begin{aligned} |s(u', v') - s(u, v)| &\leqq |s(u', \mu_1 v) - s(u, v)| + |s(u', v') - s(u', \mu_1 v)|, \\ &\leqq W_s(u, v, \lambda_1, \mu_1) + W_s(u', \mu_1 v, \lambda_2, \mu_2), \\ &\leqq \overline{\varpi}_s(\lambda_1, \mu_1) + \overline{\varpi}_s(\lambda_2, \mu_2). \end{aligned}$$

Enfin, si $\lambda_1 u < u' \leqq \lambda_1 \lambda_2 u$, $\mu_1 v < v' \leqq \mu_1 \mu_2 v$, on a

$$\begin{aligned} |s(u', v') - s(u, v)| &\leqq |s(\lambda_1 u, \mu_1 v) - s(u, v)| + |s(u', v') - s(\lambda_1 u, \mu_1 v)|, \\ &\leqq W_s(u, v, \lambda_1, \mu_1) + W_s(\lambda_1 u, \mu_1 v, \lambda_2, \mu_2), \\ &\leqq \overline{\varpi}_s(\lambda_1, \mu_1) + \overline{\varpi}_s(\lambda_2, \mu_2). \end{aligned}$$

2.3.2. L'inégalité (6) montre que, quels que soient λ et $\mu > 1$ et p entier ≥ 1,

$$\overline{\omega}_s(\lambda^p, \mu^p) \leq p\,\overline{\omega}_s(\lambda, \mu). \tag{7}$$

Alors, si l'on a pour un couple (λ_0, μ_0), où λ_0 et $\mu_0 > 1$, $\overline{\omega}_s(\lambda_0, \mu_0) < +\infty$, on a $\overline{\omega}_s(\lambda, \mu) < +\infty$ quels que soient λ et $\mu > 1$. En effet, il existe un entier $p \geq 1$ tel que $\lambda_0^p \geq \lambda$ et $\mu_0^p \geq \mu$, et l'on a

$$\overline{\omega}_s(\lambda, \mu) \leq \overline{\omega}_s(\lambda_0^p, \mu_0^p) \leq p\,\overline{\omega}_s(\lambda_0, \mu_0).$$

2.4. On voit de la même manière que, lorsque $s(u, v)$ est supposée réelle, on a *ou bien* $\overline{\omega}_s(\lambda, \mu) = +\infty$ *quels que soient* λ *et* μ *supérieurs à* 1, *ou bien* $\overline{\omega}_s(\lambda, \mu) < +\infty$ *quels que soient* λ *et* μ *supérieurs à* 1.

2.5. Le cas intéressant pour la suite est celui où l'on a $\overline{\omega}_s(\lambda, \mu) < +\infty$.

On va voir que, *dans ce cas, il existe deux constantes positives* H *et* K *telles que, quels que soient* u, v, u', v' *positifs*,

$$|s(u', v') - s(u, v)| \leq H + K\left[\left|\log\frac{u'}{u}\right| + \left|\log\frac{v'}{v}\right|\right]. \tag{8}$$

En effet, choisissons un $\lambda_0 > 1$.

On voit d'abord que, quels que soient u, u' et v positifs,

$$|s(u', v) - s(u, v)| \leq \overline{\omega}_s(\lambda_0, \lambda_0) + \frac{\overline{\omega}_s(\lambda_0, \lambda_0)}{\log\lambda_0}\left|\log\frac{u'}{u}\right|. \tag{9}$$

Il suffit de le montrer en supposant $u' > u$, puisque les deux membres ne changent pas quand on échange u et u'.

Soit n l'entier ≥ 0 déterminé par $\lambda_0^n u \leq u' < \lambda_0^{n+1} u$.

Si $n = 0$, on a

$$|s(u', v) - s(u, v)| \leq W_s(u, v, \lambda_0, \lambda_0) \leq \overline{\omega}_s(\lambda_0, \lambda_0).$$

Si $n > 0$, on a

$$\begin{aligned}
|s(u', v) - s(u, v)| &\leq \sum_{j=0}^{n-1} |s(\lambda_0^{j+1} u, v) - s(\lambda_0^j u, v)| + |s(u', v) - s(\lambda_0^n u, v)|, \\
&\leq \sum_{j=0}^{n} W_s(\lambda_0^j u, v, \lambda_0, \lambda_0), \\
&\leq (n+1)\,\overline{\omega}_s(\lambda_0, \lambda_0), \\
&\leq \overline{\omega}_s(\lambda_0, \lambda_0)\left[\frac{\log\frac{u'}{u}}{\log\lambda_0} + 1\right].
\end{aligned}$$

Dans les deux cas, on a bien (9).

On voit de la même manière que, quels que soient u, v et v' positifs,

$$|s(u, v') - s(u, v)| \leq \overline{\omega}_s(\lambda_0, \lambda_0) + \frac{\overline{\omega}_s(\lambda_0, \lambda_0)}{\log\lambda_0}\left|\log\frac{v'}{v}\right|.$$

Alors, quels que soient u, v, u', v' positifs,

$$\begin{aligned}|s(u', v') - s(u, v)| &\leq |s(u', v) - s(u, v)| + |s(u', v') - s(u', v)|,\\ &\leq \overline{\omega}_s(\lambda_0, \lambda_0) + \frac{\overline{\omega}_s(\lambda_0, \lambda_0)}{\log\lambda_0}\left|\log\frac{u'}{u}\right|\\ &\quad + \overline{\omega}_s(\lambda_0, \lambda_0) + \frac{\overline{\omega}_s(\lambda_0, \lambda_0)}{\log\lambda_0}\left|\log\frac{v'}{v}\right|,\end{aligned}$$

ce qui donne bien (8) en posant

$$2\,\overline{\omega}_s(\lambda_0, \lambda_0) = \mathrm{H}, \qquad \frac{\overline{\omega}_s(\lambda_0, \lambda_0)}{\log\lambda_0} = \mathrm{K}.$$

2.6. En remplaçant dans (8) u et v par 1 et u' et v' par u et v, on obtient

$$|s(u, v) - s(1, 1)| \leq \mathrm{H} + \mathrm{K}[|\log u| + |\log v|],$$

d'où

$$|s(u, v)| \leq \mathrm{H}_1 + \mathrm{K}[|\log u| + |\log v|], \qquad \text{avec} \quad \mathrm{H}_1 = \mathrm{H} + |s(1, 1)|. \tag{10}$$

2.7. On peut montrer de façon semblable que, lorsque $s(u, v)$ *est supposée réelle, si* $\overline{\varpi}_s(\lambda, \mu) < +\infty$, *il existe deux constantes positives* H′ *et* K′ *telles que l'on ait, quels que soient* u, v, u', v' *satisfaisant à* $0 < u < u'$, $0 < v < v'$,

$$s(u', v') - s(u, v) \geq -\mathrm{H}' - \mathrm{K}'\left[\log\frac{u'}{u} + \log\frac{v'}{v}\right]. \tag{11}$$

On montre d'abord, par un raisonnement semblable à celui qui a donné (9), que, si $0 < u < u'$ et $v > 0$,

$$s(u', v) - s(u, v) \geq -\overline{\varpi}_s(\lambda_0, \lambda_0) - \frac{\overline{\varpi}_s(\lambda_0, \lambda_0)}{\log\lambda_0}\log\frac{u'}{u}.$$

On a une inégalité analogue pour $u > 0$ et $0 < v < v'$.

Alors, en supposant $0 < u < u'$, $0 < v < v'$, on écrit

$$s(u', v') - s(u, v) = [s(u', v) - s(u, v)] + [s(u', v') - s(u', v)].$$

2.8. Lorsque $\overline{\omega}_s(\lambda, \mu) < +\infty$, $\omega_s(\lambda, \mu)$ et $\omega_s(\mathrm{E}, \lambda, \mu)$ ont toujours des valeurs finies, puisqu'elles sont au plus égales à $\overline{\omega}_s(\lambda, \mu)$, et, comme elles sont positives ou nulles et sont des fonctions non décroissantes de λ et de μ, elles tendent vers des limites finies positives ou nulles quand λ et μ tendent vers 1 indépendamment l'un de l'autre.

Si en outre $s(u, v)$ est supposée réelle, il en est de même de $\varpi_s(\lambda, \mu)$, $\varpi'_s(\mathrm{E}, \lambda, \mu)$ et $\varpi''_s(\mathrm{E}, \lambda, \mu)$.

Les limites de $\omega_s(\lambda, \mu)$ et $\omega_s(\mathrm{E}, \lambda, \mu)$ pour λ et μ tendant vers 1 indépendamment l'un de l'autre seront désignées respectivement par $\omega_s(1+0, 1+0)$ et $\omega_s(\mathrm{E}, 1+0, 1+0)$, et, si $s(u, v)$ est supposée réelle, les limites dans les mêmes conditions de $\varpi_s(\lambda, \mu)$, $\varpi'_s(\mathrm{E}, \lambda, \mu)$ et $\varpi''_s(\mathrm{E}, \lambda, \mu)$ seront désignées respectivement par $\varpi_s(1+0, 1+0)$, $\varpi'_s(\mathrm{E}, 1+0, 1+0)$ et $\varpi''_s(\mathrm{E}, 1+0, 1+0)$.

2.9. Les fonctions introduites dans ce chapitre présentent une analogie évidente avec celles introduites au chapitre 2 de notre Mémoire [7] ([12]). $W_s(u, v, \lambda, \mu)$, $w_s(\lambda, \mu)$ et $w_s(E, \lambda, \mu)$ correspondent respectivement à $W_s(t, \lambda)$, $w_s(\lambda)$ et $w_s(E, \lambda)$, et, dans le cas où la fonction $s(u, v)$ est supposée réelle, $\Pi'_s(u, v, \lambda, \mu)$, $\Pi''_s(u, v, \lambda, \mu)$, $\varpi_s(\lambda, \mu)$, $\varpi'_s(E, \lambda, \mu)$ et $\varpi''_s(E, \lambda, \mu)$ correspondent respectivement à $\Pi'_s(t, \lambda)$, $\Pi''_s(t, \lambda)$, $\varpi_s(\lambda)$, $\varpi'_s(E, \lambda)$ et $\varpi''_s(E, \lambda)$.

Mais, ici, nous avons en plus les fonctions $\overline{w}_s(\lambda, \mu)$ et $\overline{\varpi}_s(\lambda, \mu)$. Il n'y avait pas lieu d'introduire les fonctions analogues à celles-ci dans le cas des fonctions d'une seule variable, parce que, $s(t)$ étant supposée bornée sur tout intervalle fini, le fait que la plus grande limite pour t infini de $W_s(t, \lambda)$, ou de $\Pi'_s(t, \lambda)$, soit finie suffisait à entraîner que $W_s(t, \lambda)$, ou $\Pi'_s(t, \lambda)$, soit bornée pour $t > 0$. Ici, au contraire, même si $s(u, v)$ est bornée à distance finie, la plus grande limite pour u et v tendant vers $+\infty$ de $W_s(u, v, \lambda, \mu)$, ou de $\Pi'_s(u, v, \lambda, \mu)$, peut très bien être finie sans que $W_s(u, v, \lambda, \mu)$, ou $\Pi'_s(u, v, \lambda, \mu)$, soit bornée pour u et $v > 0$.

3. Théorèmes relatifs aux intégrales doubles de Laplace ordinaires.

3.1. Il est entendu une fois pour toutes que, dans tout ce chapitre, $s(u, v)$ désigne une fonction réelle ou complexe définie pour u et $v \geq 0$ et *sommable sur tout rectangle* $0 \leq u \leq A$, $0 \leq v \leq B$.

Lorsque l'intégrale

$$\iint xy\, e^{-ux-vy} s(u, v)\, du\, dv \tag{12}$$

existe, nous désignons sa valeur par $\Phi(x, y)$.

3.2. On voit d'abord que, si $\overline{w}_s(\lambda, \mu) < +\infty$, l'intégrale (12) est absolument convergente pour $\mathcal{R}x$ et $\mathcal{R}y > 0$, du fait que $s(u, v)$ satisfait à l'inégalité (10).

3.3. Nous allons voir que, *dans cette hypothèse* $\overline{w}_s(\lambda, \mu) < +\infty$, *on a, quels que soient* x *et* y *de parties réelles positives et quels que soient* α *et* β *positifs*,

$$\Phi\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta}\right) - s(\alpha, \beta) = x^2 y^2 \iint e^{-ux-vy} \Sigma_{\alpha,\beta}(u, v)\, du\, dv, \tag{13}$$

où

$$\Sigma_{\alpha,\beta}(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \text{ ou } v = 0, \\ \displaystyle\int_0^u \int_0^v S_{\alpha,\beta}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta & \text{si } u \text{ et } v > 0, \end{cases} \tag{14}$$

avec

$$S_{\alpha,\beta}(u, v) = s(\alpha u, \beta v) - s(\alpha, \beta). \tag{15}$$

([12]) Ces dernières sont aussi utilisées, avec des notations légèrement différentes, dans notre article [6].

On peut d'abord écrire

$$\Phi\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta}\right) = \iint \frac{xy}{\alpha\beta} e^{-\frac{ux}{\alpha} - \frac{vy}{\beta}} s(u, v)\, du\, dv,$$
$$= \iint xy\, e^{-ux-vy} s(\alpha u, \beta v)\, du\, dv.$$

Comme $\iint xy\, e^{-ux-vy}\, du\, dv = 1$, on en déduit

$$\Phi\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta}\right) - s(\alpha, \beta) = \iint xy\, e^{-ux-vy}[s(\alpha u, \beta v) - s(\alpha, \beta)]\, du\, dv, \tag{16}$$
$$= \iint xy\, e^{-ux-vy} S_{\alpha,\beta}(u, v)\, du\, dv.$$

Quels que soient A et B positifs, on peut écrire, d'après ce qui a été dit au paragraphe 1.6.2,

$$\int_0^A \int_0^B e^{-ux-vy} S_{\alpha,\beta}(u, v)\, du\, dv = \int_0^A \int_0^B e^{-ux-vy}\, d\Sigma_{\alpha,\beta}(u, v),$$

puis, d'après ce qui a été dit au paragraphe 1.7.1,

$$\int_0^A \int_0^B e^{-ux-vy}\, d\Sigma_{\alpha,\beta}(u, v) = e^{-Ax-By} \Sigma_{\alpha,\beta}(A, B) + \int_0^A x e^{-ux-By} \Sigma_{\alpha,\beta}(u, B)\, du \tag{17}$$
$$+ \int_0^B y\, e^{-Ax-vy} \Sigma_{\alpha,\beta}(A, v)\, dv$$
$$+ \int_0^A \int_0^B xy\, e^{-ux-vy} \Sigma_{\alpha,\beta}(u, v)\, du\, dv.$$

Mais, comme $s(u, v)$ satisfait à (8), on a, quels que soient u et $v > 0$,

$$|S_{\alpha,\beta}(u, v)| \leq H + K[|\log u| + |\log v|]. \tag{18}$$

Il en résulte que, si l'on pose $\int_0^X t\,|\log t|\, dt = g(X)$, on a

$$|\Sigma_{\alpha,\beta}(u, v)| \leq H uv + K[u\, g(v) + v\, g(u)]. \tag{19}$$

Or, quand X tend vers $+\infty$,

$$g(X) = O[X^2 \log X].$$

Ceci montre que, quand A et B tendent vers $+\infty$, les trois premiers termes du second membre de (17) tendent vers zéro.

D'autre part, l'intégrale $\iint xy\, e^{-ux-vy} \Sigma_{\alpha,\beta}(u, v)\, du\, dv$ est absolument convergente.

Finalement, on voit que, quand A et B tendent vers $+\infty$,

$$\int_0^A \int_0^B e^{-ux-vy} S_{\alpha,\beta}(u, v)\, du\, dv \quad \text{tend vers} \quad \iint xy\, e^{-ux-vy} \Sigma_{\alpha,\beta}(u, v)\, du\, dv.$$

Par suite,

$$\iint e^{-ux-vy} S_{\alpha,\beta}(u, v)\, du\, dv = \iint xy\, e^{-ux-vy} \Sigma_{\alpha,\beta}(u, v)\, du\, dv.$$

En tenant compte de (16), ceci donne bien la formule (13).

Cette dernière sera notre formule de base pour la suite.

3.4. La formule (19) montre que les fonctions $\Sigma_{\alpha,\beta}$ sont bornées dans leur ensemble sur tout rectangle fini. Mais (18) montre, d'autre part, que ces fonctions sont *également continues* pour u et $v \geqq 0$.

En effet, désignons par $F(u, v)$ le second membre de (19) [13].

(18) montre que, si u, u', $v \geqq 0$, on a quels que soient α et $\beta > 0$

$$|\Sigma_{\alpha,\beta}(u', v) - \Sigma_{\alpha,\beta}(u, v)| \leqq |F(u', v) - F(u, v)|,$$

et, si u, v, $v' \geqq 0$, on a quels que soient α et $\beta > 0$

$$|\Sigma_{\alpha,\beta}(u, v') - \Sigma_{\alpha,\beta}(u, v)| \leqq |F(u, v') - F(u, v)|.$$

Il en résulte que, si u_0 et $v_0 \geqq 0$, pour u et $v \geqq 0$, on a quels que soient α et $\beta > 0$

$$\begin{aligned} |\Sigma_{\alpha,\beta}(u, v) - \Sigma_{\alpha,\beta}(u_0, v_0)| &\leqq |\Sigma_{\alpha,\beta}(u, v) - \Sigma_{\alpha,\beta}(u_0, v)| + |\Sigma_{\alpha,\beta}(u_0, v) - \Sigma_{\alpha,\beta}(u_0, v_0)|, \\ &\leqq |F(u, v) - F(u_0, v)| + |F(u_0, v) - F(u_0, v_0)|, \end{aligned}$$

expression qui tend vers zéro quand u et v tendent vers u_0 et v_0.

Il résulte de là que, de toute suite de couples (α, β), où α et $\beta > 0$, on peut extraire une suite $\{\alpha_n, \beta_n\}$ telle que $\Sigma_{\alpha_n,\beta_n}(u, v)$ converge vers une fonction limite $G(u, v)$ continue pour u et $v \geqq 0$.

De plus, il est clair que l'on aura, à cause de (19),

$$|G(u, v)| \leqq H uv + K[ug(v) + vg(u)]. \tag{20}$$

3.5. Supposons maintenant que l'on parte d'une suite de couples (α, β) appartenant à l'ensemble E, telle que α et β tendent vers $+\infty$.

Nous allons montrer qu'alors, *si la fonction* G *possède une dérivée seconde* G''_{uv} *dans un voisinage du point* $(1, 1)$, *cette dérivée étant continue en ce point, on a*

$$|G''_{uv}(1, 1)| \leqq \varpi_s(E, 1+0, 1+0), \tag{21}$$

et, dans le cas où la fonction $s(u, v)$ *est réelle, de sorte que* $G(u, v)$ *l'est aussi,*

$$-\varpi'_s(E, 1+0, 1+0) \leqq G''_{uv}(1, 1) \leqq \varpi''_s(E, 1+0, 1+0). \tag{22}$$

---

[13] Nous prenons $F(u, v) = 0$ si u ou $v = 0$.

Pour u et $v > 0$, on a

$$F(u, v) = \int_0^u \int_0^v \{H + K\,[|\log\xi| + |\log\eta|]\}\, d\xi\, d\eta.$$

3.5.1. Notons d'abord que, si G''_{uv} existe dans un voisinage du point $(1, 1)$ et est continue en ce point, le rapport

$$\frac{G(u, v) - G(u, 1) - G(1, v) + G(1, 1)}{(u-1)(v-1)}$$

tend vers $G''_{uv}(1, 1)$ quand le point (u, v) tend vers le point $(1, 1)$ (avec u et $v \neq 1$).

3.5.2. Si l'on suppose u et $v > 1$, la formule (14) montre que

$$(23) \quad \Sigma_{\alpha,\beta}(u, v) - \Sigma_{\alpha,\beta}(u, 1) - \Sigma_{\alpha,\beta}(1, v) + \Sigma_{\alpha,\beta}(1, 1) = \int_1^u \int_1^v S_{\alpha,\beta}(t, t')\, dt\, dt'.$$

Mais, pour $1 \leq t \leq u$ et $1 \leq t' \leq v$,

$$|S_{\alpha,\beta}(t, t')| = |s(\alpha t, \beta t') - s(\alpha, \beta)| \leq W_s(\alpha, \beta, u, v).$$

Donc

$$|\Sigma_{\alpha,\beta}(u, v) - \Sigma_{\alpha,\beta}(u, 1) - \Sigma_{\alpha,\beta}(1, v) + \Sigma_{\alpha,\beta}(1, 1)| \leq (u-1)(v-1) W_s(\alpha, \beta, u, v).$$

Si l'on fait $\alpha = \alpha_n$, $\beta = \beta_n$, le premier membre tend pour n infini vers

$$|G(u, v) - G(u, 1) - G(1, v) + G(1, 1)|.$$

On obtient donc

$$|G(u, v) - G(u, 1) - G(1, v) + G(1, 1)| \leq (u-1)(v-1)\, \omega_s(E, u, v),$$

ou

$$\left| \frac{G(u, v) - G(u, 1) - G(1, v) + G(1, 1)}{(u-1)(v-1)} \right| \leq \omega_s(E, u, v).$$

En faisant tendre u et v vers 1, on obtient (21).

Si la fonction $s(u, v)$ est réelle, on a pour $1 \leq t \leq u$ et $1 \leq t' \leq v$,

$$S_{\alpha,\beta}(t, t') \geq -\Pi'_s(\alpha, \beta, u, v),$$

et (23) donne

$$\Sigma_{\alpha,\beta}(u, v) - \Sigma_{\alpha,\beta}(u, 1) - \Sigma_{\alpha,\beta}(1, v) + \Sigma_{\alpha,\beta}(1, 1) \geq -(u-1)(v-1)\Pi'_s(\alpha, \beta, u, v).$$

Il en résulte que

$$G(u, v) - G(u, 1) - G(1, v) + G(1, 1) \geq -(u-1)(v-1)\varpi'_s(E, u, v),$$

ou

$$\frac{G(u, v) - G(u, 1) - G(1, v) + G(1, 1)}{(u-1)(v-1)} \geq -\varpi'_s(E, u, v).$$

En faisant tendre u et v vers 1, ceci donne

$$(24) \quad G''_{uv}(1, 1) \geq -\varpi'_s(E, 1+0, 1+0).$$

Si, maintenant, nous prenons u et $v < 1$, la formule (14) montre que

$$\Sigma_{\alpha,\beta}(u, v) - \Sigma_{\alpha,\beta}(u, 1) - \Sigma_{\alpha,\beta}(1, v) + \Sigma_{\alpha,\beta}(1, 1) = \int_u^1 \int_v^1 S_{\alpha,\beta}(t, t')\, dt\, dt'.$$

Mais, pour $u \leq t \leq 1$ et $v \leq t' \leq 1$,

$$S_{\alpha,\beta}(t, t') = s(\alpha t, \beta t') - s(\alpha, \beta) \leq \Pi''_s\left(\alpha, \beta, \frac{1}{u}, \frac{1}{v}\right).$$

Donc

$$\Sigma_{\alpha,\beta}(u, v) - \Sigma_{\alpha,\beta}(u, 1) - \Sigma_{\alpha,\beta}(1, v) + \Sigma_{\alpha,\beta}(1, 1) \leq (1-u)(1-v)\,\Pi''_s\left(\alpha, \beta, \frac{1}{u}, \frac{1}{v}\right).$$

On en déduit

$$G(u, v) - G(u, 1) - G(1, v) + G(1, 1) \leq (1-u)(1-v)\,\varpi''_s\left(E, \frac{1}{u}, \frac{1}{v}\right),$$

ou

$$\frac{G(u, v) - G(u, 1) - G(1, v) + G(1, 1)}{(u-1)(v-1)} \leq \varpi''_s\left(E, \frac{1}{u}, \frac{1}{v}\right),$$

d'où, en faisant tendre u et v vers 1,

$$G''_{uv}(1, 1) \leq \varpi''_s(E, 1+0, 1+0). \tag{25}$$

(24) et (25) donnent (22).

3.6. Nous sommes maintenant en mesure d'établir les deux théorèmes suivants :

Théorème 1. — *Si* $\overline{w}_s(\lambda, \mu) < +\infty$ *et si* $\Phi(x, y)$ *tend vers une limite finie* S *quand* x *et* y *tendent vers zéro par valeurs réelles positives, on a*

$$\overline{\lim_{u, v \to +\infty}} |s(u, v) - S| \leq w_s(1+0, 1+0). \tag{26}$$

Plus généralement, on a quel que soit E

$$\overline{\lim_{\substack{u, v \to +\infty \\ (u, v) \in E}}} |s(u, v) - S| \leq w_s(E, 1+0, 1+0). \tag{27}$$

Si la fonction $s(u, v)$ *est réelle, on a de plus*

$$\overline{\lim_{u, v \to +\infty}} |s(u, v) - S| \leq \varpi_s(1+0, 1+0) \tag{28}$$

et, quel que soit E,

$$S - \varpi''_s(E, 1+0, 1+0) \leq \underline{\lim_{\substack{u, v \to +\infty \\ (u, v) \in E}}} s(u, v) \leq \overline{\lim_{\substack{u, v \to +\infty \\ (u, v) \in E}}} s(u, v) \leq S + \varpi'_s(E, 1+0, 1+0). \tag{29}$$

Théorème 2. — *Supposons que* $\overline{w}_s(\lambda, \mu) < +\infty$ *et qu'il existe* a *et* b *satisfaisant à* $0 < a < b$ *tels que* $\Phi(x, y)$ *tende vers une limite finie* S *quand* x *et* y *tendent vers zéro par valeurs réelles positives satisfaisant à*

$$a < \frac{y}{x} < b.$$

Alors on a (27), *et* (29) *si la fonction* $s(u, v)$ *est réelle, pour tout ensemble* E *ayant la propriété suivante :*

Il existe deux nombres positifs ε *et* A *tels que, si le couple* (u, v) *appartient à* E *et si* u *et* $v \geq$ A, *on a*

$$\varepsilon \leq \frac{v}{u} \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

[Cette propriété a lieu en particulier si E est une suite de couples (u, v) telle que u et v tendent vers $+\infty$, les rapports $\frac{u}{v}$ et $\frac{v}{u}$ restant bornés supérieurement.]

3.7. *Démonstration du théorème* 1. — Il suffit d'établir (27), et (29) si la fonction $s(u, v)$ est réelle, puisque (26) est le cas particulier de (27) correspondant à E égal à l'ensemble de tous les couples de nombres positifs, et (28) est le même cas particulier de (29).

Pour cela, il suffit de montrer que, de toute suite de couples (u, v) appartenant à E telle que u et v tendent vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{u_n, v_n\}$ telle que $s(u_n, v_n)$ tende vers une limite finie l satisfaisant à

$$|l - S| \leq \omega_s(E, 1+0, 1+0) \tag{30}$$

et, si la fonction $s(u, v)$ est réelle, à

$$S - \omega''_s(E, 1+0, 1+0) \leq l \leq S + \omega'_s(E, 1+0, 1+0). \tag{31}$$

Étant donné une suite de couples (u, v) appartenant à E, telle que u et v tendent vers $+\infty$, on a vu que l'on peut en extraire une suite $\{u_n, v_n\}$ telle que $\Sigma_{u_n, v_n}(u, v)$ converge pour u et $v \geq 0$ vers une fonction $G(u, v)$ continue pour ces valeurs et satisfaisant à (20).

En tenant compte de (19), la formule (13) montre que, quels que soient x et y positifs,

$$\Phi\left(\frac{x}{u_n}, \frac{y}{v_n}\right) - s(u_n, v_n) \qquad \text{tend vers} \quad x^2 y^2 \iint e^{-ux-vy} G(u, v)\, du\, dv.$$

Comme, quels que soient x et y positifs, $\Phi\left(\frac{x}{u_n}, \frac{y}{v_n}\right)$ tend vers S, on voit que $s(u_n, v_n)$ tend vers une limite finie l et que l'on a, quels que soient x et y positifs,

$$S - l = x^2 y^2 \iint e^{-ux-vy} G(u, v)\, du\, dv.$$

D'après ce qui a été dit au paragraphe 1.10, ceci montre que

$$G(u, v) = (S - l)uv.$$

La dérivée seconde G''_{uv} existe donc pour u et v positifs quelconques et est égale à $S - l$.

D'après ce qui a été dit au paragraphe 3.5, on a (21), et, si la fonction $s(u, v)$ est supposée réelle, on a (22).

(21) donne (30) et (22) donne (31).

3.8. *Démonstration du théorème* 2. — Soit E ayant la propriété indiquée.

On voit d'abord que, de toute suite de couples (u, v) appartenant à E, telle que u et v tendent vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{u_n, v_n\}$ telle que non seulement $\Sigma_{u_n, v_n}(u, v)$ converge pour u et $v \geq 0$ vers une fonction $G(u, v)$ continue pour ces valeurs et satisfaisant à (20), mais encore *le rapport* $\frac{v_n}{u_n}$ *tende vers une limite finie positive* σ.

Comme plus haut, en tenant compte de (19), la formule (13) montre que, quels que soient x et y positifs,

$$\Phi\left(\frac{x}{u_n}, \frac{y}{v_n}\right) - s(u_n, v_n) \qquad \text{tend vers} \quad x^2 y^2 \iint e^{-ux-vy} G(u, v)\, du\, dv.$$

Mais le rapport $\dfrac{\left(\frac{y}{v_n}\right)}{\left(\frac{x}{u_n}\right)}$ tend vers $\frac{1}{\sigma}\frac{y}{x}$.

Donc, si $\sigma a < \frac{y}{x} < \sigma b$, ce rapport est compris entre a et b à partir d'une certaine valeur de n. Donc, dans ce cas, $\Phi\left(\frac{x}{u_n}, \frac{y}{v_n}\right)$ tend vers S.

Il résulte de là, d'abord que $s(u_n, v_n)$ tend vers une limite finie l, ensuite que, quels que soient x et y positifs satisfaisant à $\sigma a < \frac{y}{x} < \sigma b$,

$$S - l = x^2 y^2 \iint e^{-ux-vy} G(u, v)\, du\, dv.$$

En raison de l'analyticité du second membre, cette égalité a lieu quels que soient x et y positifs, et par suite

$$G(u, v) = (S - l)uv.$$

On en déduit, comme plus haut, que l satisfait à (30), et à (31) si la fonction $s(u, v)$ est supposée réelle.

En définitive, on a montré que, de toute suite de couples (u, v) appartenant à E, telle que u et v tendent vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{u_n, v_n\}$ telle que $s(u_n, v_n)$ tende vers une limite finie l satisfaisant à (30), et à (31) si la fonction $s(u, v)$ est réelle.

Ceci entraine (27), et (29) si la fonction $s(u, v)$ est réelle.

3.8.1. Remarquons que les hypothèses du théorème 2 entraînent que, *quels que soient* a_1 *et* b_1 *réels satisfaisant à* $0 < a_1 < b_1$, $\Phi(x, y)$ *tend vers* S *quand* x *et* y *tendent vers zéro par valeurs réelles positives satisfaisant à*

$$a_1 < \frac{y}{x} < b_1.$$

Pour le voir, il suffit de montrer que, de toute suite de couples (x, y) où x

et γ sont positifs et tendent vers zéro de manière que les rapports $\frac{\gamma}{\alpha}$ et $\frac{\alpha}{\gamma}$ restent bornés supérieurement, on peut extraire une suite $\{x_n, y_n\}$ telle que $\Phi(x_n, y_n)$ tende vers S.

De la suite des couples $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ on peut extraire une suite

$$\left\{\frac{1}{x_n}, \frac{1}{y_n}\right\} = \{u_n, v_n\}$$

telle que $\Sigma_{u_n, v_n}(u, v)$ converge pour u et $v \geqq 0$ vers une fonction $G(u, v)$ continue pour ces valeurs et satisfaisant à (20), *et que* $\frac{v_n}{u_n}$ *tende vers une limite finie positive* σ.

Comme plus haut, quels que soient x et y positifs,

$$\Phi\left(\frac{x}{u_n}, \frac{y}{v_n}\right) - s(u_n, v_n) \qquad \text{tend vers} \quad x^2 y^2 \iint e^{-ux-vy} G(u, v)\, du\, dv.$$

On a vu que ceci entraîne que $s(u_n, v_n)$ tend vers une limite finie l et que

$$G(u, v) = (S - l)uv.$$

En faisant $x = y = 1$, on voit que $\Phi(x_n, y_n) - s(u_n, v_n)$ tend vers $S - l$, et par suite $\Phi(x_n, y_n)$ tend vers S.

3.9. Remarquons aussi que, *dans chacun des théorèmes* 1 *et* 2, *si l'on ajoute l'hypothèse que* $\Phi(x, y)$ *est bornée en module par un nombre fixe pour* x *et* y *réels positifs, on peut ajouter dans la conclusion que* $s(u, v)$ *est bornée pour* u *et* v *positifs.*

En effet, si l'on a $\overline{\omega}_s(\lambda, \mu) < +\infty$, on a (18) et (16).

Compte tenu de (18), la formule (16) montre, en y faisant $x = y = 1$, que, quels que soient α et β positifs,

$$\left|\Phi\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right) - s(\alpha, \beta)\right| \leqq \iint e^{-u-v}[H + K|\log u| + K|\log v|]\, du\, dv.$$

Donc, les hypothèses que $\Phi(x, y)$ est bornée en module pour x et y positifs et que $\overline{\omega}_s(\lambda, \mu) < +\infty$ suffisent à elles deux pour entraîner que $s(u, v)$ soit bornée pour u et v positifs.

3.10. Le théorème 1 est un cas particulier du suivant :

THÉORÈME 1'. — *Supposons que* $\overline{\omega}_s(\lambda, \mu) < +\infty$ *et qu'il existe deux suites* $\{x_m\}$ *et* $\{y_n\}$ *satisfaisant à*

$$x_m = r_m e^{i\theta_m}, \qquad y_n = r'_n e^{i\theta'_n}, \qquad r_m \text{ et } r'_n > 0, \qquad |\theta_m| \text{ et } |\theta'_n| < \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{m \to +\infty} r_m = 0, \qquad \lim_{m \to +\infty} \frac{r_{m+1}}{r_m} = 1, \qquad \overline{\lim_{m \to +\infty}} |\theta_m| < \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{n \to +\infty} r'_n = 0, \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{r'_{n+1}}{r'_n} = 1, \qquad \overline{\lim_{n \to +\infty}} |\theta'_n| < \frac{\pi}{2},$$

telles que $\Phi(x_m, y_n)$ *tende vers une limite finie* S *quand m et n tendent vers* $+\infty$.

Alors, on a (26) *et, plus généralement, quel que soit* E, *on a* (27).

Si la fonction $s(u, v)$ *est réelle, on a* (28) *et, quel que soit* E, *on a* (29).

3.10.1. *Démonstration du théorème* 1'. — Nous montrerons d'abord que, pour toute suite de couples (u, v) appartenant à E, telle que u et v tendent vers $+\infty$, la suite des valeurs correspondantes de $s(u, v)$ est bornée.

En effet, $\{u_p, v_p\}$ étant une telle suite, on peut d'abord trouver deux suites d'entiers $\{m_p\}$ et $\{n_p\}$ tendant vers $+\infty$ et telles que $r_{m_p} u_p$ et $r'_{n_p} v_p$ tendent vers deux limites positives données ρ_0 et ρ'_0. On pourra par exemple prendre m_p égal au plus grand entier m tel que $u_p r_m \geqq \rho_0$ et n_p égal au plus grand entier n tel que $v_p r'_n \geqq \rho'_0$ (14).

Par ailleurs, si α et $\beta > 0$ et $\mathcal{R}x$ et $\mathcal{R}y > 0$, (16) donne (en y remplaçant x et y par αx et βy)

$$\Phi(x, y) - s(\alpha, \beta) = \alpha\beta xy \iint e^{-\alpha u x - \beta v y} S_{\alpha,\beta}(u, v)\, du\, dv,$$

d'où en tenant compte de (18),

$$|\Phi(x, y) - s(\alpha, \beta)| \leqq \alpha\beta\, |x|.|y| \iint e^{-\alpha u \mathcal{R}x - \beta v \mathcal{R}y} [H + K|\log u| + K|\log v|]\, du\, dv.$$

En prenant $x = re^{i\theta}$, $y = r'e^{i\theta'}$, avec r et $r' > 0$, $|\theta|$ et $|\theta'| < \frac{\pi}{2}$, ceci s'écrit

$$|\Phi(re^{i\theta}, r'e^{i\theta'}) - s(\alpha, \beta)| \leqq \alpha\beta rr' \iint e^{-\alpha ur\cos\theta - \beta vr'\cos\theta'} [H + K|\log u| + K|\log v|]\, du\, dv,$$

d'où l'on tire

$$|s(\alpha, \beta)| \leqq |\Phi(re^{i\theta}, r'e^{i\theta'})| + \alpha\beta rr' \iint e^{-\alpha ur\cos\theta - \beta vr'\cos\theta'} [H + K|\log u| + K|\log v|]\, du\, dv.$$

En utilisant cette inégalité, avec

$$re^{i\theta} = x_{m_p}, \qquad r'e^{i\theta'} = y_{n_p}, \qquad \alpha = u_p, \qquad \beta = v_p,$$

on voit que

$$\overline{\lim_{p \to +\infty}} |s(u_p, v_p)| \leqq |S| + \rho_0\rho'_0 \iint e^{-u\rho_0\cos\varphi - v\rho'_0\cos\varphi'} [H + K|\log u| + K|\log v|]\, du\, dv,$$

où

$$\varphi = \overline{\lim_{p \to +\infty}} |\theta_{m_p}|, \qquad \varphi' = \overline{\lim_{p \to +\infty}} |\theta'_{n_p}|.$$

Il résulte de là que, de toute suite de couples (u, v) appartenant à E, telle que u et v tendent vers $+\infty$, on peut extraire une suite partielle $\{u_q, v_q\}$ telle que, non seulement $\Sigma_{u_q, v_q}(u, v)$ converge pour u et $v \geqq 0$ vers une fonction $G(u, v)$ continue pour ces valeurs et satisfaisant à (20), mais encore $s(u_q, v_q)$ tende vers une limite finie l.

---

(14) Ceci du moins à partir du moment où p est assez grand pour que $u_p r_1 \geqq \rho_0$ et $v_p r'_1 \geqq \rho'_0$.

Il ne reste qu'à montrer que l satisfait à (30), et à (31) si la fonction $s(u, v)$ est réelle.

Pour cela, on va montrer que, quels que soient ρ et ρ' positifs, l'équation

$$(32) \qquad S - l = x^2 y^2 \iint e^{-ux-vy} G(u, v)\, du\, dv$$

est satisfaite au moins pour un couple (x, y) où

$$\mathcal{R}x > 0, \qquad \mathcal{R}y > 0, \qquad |x| = \rho \qquad \text{et} \qquad |y| = \rho',$$

x pouvant être pris dépendant seulement de ρ, mais non de ρ'.

Le second membre de (32) étant une fonction de x et y holomorphe pour $\mathcal{R}x$ et $\mathcal{R}y > 0$, il en résultera que (32) a lieu pour tout couple (x, y) satisfaisant à $\mathcal{R}x > 0$, $\mathcal{R}y > 0$, et par suite que $G(u, v) = (S - l)uv$, et l'on pourra achever comme au paragraphe 3.7.

On peut d'abord trouver deux suites d'entiers $\{m_q\}$ et $\{n_q\}$ tendant vers $+\infty$ et telles que $r_{m_q} u_q$ et $r'_{n_q} v_q$ tendent respectivement vers ρ et ρ'.

On peut ensuite trouver une suite croissante $\{q_k\}$ telle que, en posant $m_{q_k} = m'_k$, $n_{q_k} = n'_k$, les suites $\{\theta_{m'_k}\}$ et $\{\theta'_{n'_k}\}$ soient convergentes. Leurs limites θ et θ' satisferont d'ailleurs à $|\theta| < \frac{\pi}{2}$, $|\theta'| < \frac{\pi}{2}$. Pour obtenir la suite $\{q_k\}$, on peut former d'abord une suite de valeurs de q telle que les θ_{m_q} correspondants tendent vers une limite, puis extraire de cette suite une nouvelle suite telle que les θ'_{n_q} correspondants tendent aussi vers une limite. En procédant ainsi, θ pourra être pris dépendant seulement de ρ, puisque la suite $\{m_q\}$ dépend seulement de ρ.

En faisant dans (13)

$$\alpha = u_{q_k}, \qquad \beta = v_{q_k}, \qquad x = x_{m'_k} u_{q_k}, \qquad y = y_{n'_k} v_{q_k},$$

et tenant compte de (19), on obtient par passage à la limite

$$S - l = \rho^2 \rho'^2 e^{2i\theta + 2i\theta'} \iint e^{-\rho u e^{i\theta} - \rho' v e^{i\theta'}} G(u, v)\, du\, dv,$$

c'est-à-dire (32) avec

$$x = \rho e^{i\theta}, \qquad y = \rho' e^{i\theta'}.$$

3.11. Nous allons montrer maintenant que, si la fonction $s(u, v)$ est supposée réelle, on peut remplacer dans les théorèmes précédents l'hypothèse $\overline{\omega}_s(\lambda, \mu) < +\infty$ par $\overline{\omega}_s(\lambda, \mu) < +\infty$, pourvu que l'on ajoute l'hypothèse que $\Phi(x, y)$ existe et est bornée en module par un nombre fixe pour x et y réels positifs.

3.11.1. Cela résultera du théorème suivant :

Théorème 3. — *Supposons que la fonction $s(u, v)$ soit réelle, que $\overline{\omega}_s(\lambda, \mu) < +\infty$, que $\Phi(x, y)$ existe pour x et y positifs, et qu'il existe trois nombres positifs* M, h

et k tels que, quels que soient x et $y > 0$, on ait pour $1 \leq \alpha \leq 1+h$, $1 \leq \beta \leq 1+k$,

$$\Phi(\alpha x, \beta y) - \Phi(x, y) \geq -M.$$

Alors on a $\overline{w}_s(\lambda, \mu) < +\infty$ ([15]).

3.11.2. *Démonstration du théorème* 3. — Choisissons deux couples de nombres positifs (a_1, b_1) et (a_2, b_2) satisfaisant à

$$1 < \frac{b_1}{a_1} < 1+h \qquad \text{et} \qquad 1 < \frac{b_2}{a_2} < 1+k.$$

On va montrer que, si

$$0 < \xi \leq \xi' \leq \xi(1+h)\frac{a_1}{b_1} \qquad \text{et} \qquad 0 < \eta \leq \eta' \leq \eta(1+k)\frac{a_2}{b_2},$$

on a

$$|s(\xi', \eta') - s(\xi, \eta)| \leq \frac{\overline{\omega}_s(1+h, 1+k) + M}{(e^{-a_1} - e^{-b_1})(e^{-a_2} - e^{-b_2})} + \overline{\omega}_s(1+h, 1+k) = \Omega,$$

c'est-à-dire que, quels que soit ξ et $\eta > 0$,

$$W_s\left[\xi, \eta, (1+h)\frac{a_1}{b_1}, (1+k)\frac{a_2}{b_2}\right] \leq \Omega.$$

On sait que

$$s(\xi', \eta') - s(\xi, \eta) \geq -\overline{\omega}_s\left[(1+h)\frac{a_1}{b_1}, (1+k)\frac{a_2}{b_2}\right] \geq -\overline{\omega}_s(1+h, 1+k).$$

Il suffira donc de montrer que

$$s(\xi', \eta') - s(\xi, \eta) \leq \frac{\overline{\omega}_s(1+h, 1+k) + M}{(e^{-a_1} - e^{-b_1})(e^{-a_2} - e^{-b_2})} + \overline{\omega}_s(1+h, 1+k). \tag{33}$$

En remarquant que, pour x et $y > 0$,

$$\Phi(x, y) = \iint e^{-u-v} s\left(\frac{u}{x}, \frac{v}{y}\right) du\, dv,$$

on peut écrire

$$\Phi\left(\frac{a_1}{\xi'}, \frac{a_2}{\eta'}\right) - \Phi\left(\frac{b_1}{\xi}, \frac{b_2}{\eta}\right) + \overline{\omega}_s(1+h, 1+k) \tag{34}$$
$$= \iint e^{-u-v}\left[s\left(\frac{\xi'}{a_1}u, \frac{\eta'}{a_2}v\right) - s\left(\frac{\xi}{b_1}u, \frac{\eta}{b_2}v\right) + \overline{\omega}_s(1+h, 1+k)\right] du\, dv.$$

Comme

$$\frac{\xi}{b_1}u < \frac{\xi'}{a_1}u \leq (1+h)\frac{\xi}{b_1}u \qquad \text{et} \qquad \frac{\eta}{b_2}v < \frac{\eta'}{a_2}v \leq (1+k)\frac{\eta}{b_2}v,$$

on a

$$s\left(\frac{\xi'}{a_1}u, \frac{\eta'}{a_2}v\right) - s\left(\frac{\xi}{b_1}u, \frac{\eta}{b_2}v\right) \geq -\overline{\omega}_s(1+h, 1+k),$$

([15]) Ce théorème est complètement analogue au théorème 11, p. 233, de [8]. La démonstration est inspirée de Karamata [12].

et par suite la fonction sous le signe $\iint$ au second membre de (34) est positive ou nulle.

L'intégrale est donc au moins égale à l'intégrale prise sur le rectangle $a_1 \leqq u \leqq b_1$, $a_2 \leqq v \leqq b_2$.

Mais, pour $a_1 \leqq u \leqq b_1$ et $a_2 \leqq v \leqq b_2$, on a

$$\xi' \leqq \frac{\xi'}{a_1} u < (1+h)\xi', \qquad \eta' \leqq \frac{\eta'}{a_2} v < (1+k)\eta',$$

et

$$\frac{\xi}{b_1} u \leqq \xi < (1+h)\frac{\xi}{b_1} u, \qquad \frac{\eta}{b_2} v \leqq \eta < (1+k)\frac{\eta}{b_2} v,$$

et par suite

$$s\left(\frac{\xi'}{a_1} u, \frac{\eta'}{a_2} v\right) - s(\xi', \eta') \geqq -\overline{\omega}_s(1+h, 1+k)$$

et

$$s(\xi, \eta) - s\left(\frac{\xi}{b_1} u, \frac{\eta}{b_2} v\right) \geqq -\overline{\omega}_s(1+h, 1+k),$$

d'où

$$s\left(\frac{\xi'}{a_1} u, \frac{\eta'}{a_2} v\right) - s\left(\frac{\xi}{b_1} u, \frac{\eta}{b_2} v\right) + \overline{\omega}_s(1+h, 1+k) \geqq s(\xi', \eta') - s(\xi, \eta) - \overline{\omega}_s(1+h, 1+k).$$

En définitive, on voit que le second membre de (34) est au moins égal à

$$(e^{-a_1} - e^{-b_1})(e^{-a_2} - e^{-b_2})[s(\xi', \eta') - s(\xi, \eta) - \overline{\omega}_s(1+h, 1+k)].$$

Par ailleurs, on a

$$\frac{a_1}{\xi'} < \frac{b_1}{\xi} \leqq (1+h)\frac{a_1}{\xi'} \quad \text{et} \quad \frac{a_2}{\eta'} < \frac{b_2}{\eta} \leqq (1+k)\frac{a_2}{\eta'},$$

et par suite

$$\Phi\left(\frac{b_1}{\xi}, \frac{b_2}{\eta}\right) - \Phi\left(\frac{a_1}{\xi'}, \frac{a_2}{\eta'}\right) \geqq -\mathrm{M},$$

ou

$$\Phi\left(\frac{a_1}{\xi'}, \frac{a_2}{\eta'}\right) - \Phi\left(\frac{b_1}{\xi}, \frac{b_2}{\eta}\right) \leqq \mathrm{M}.$$

Le premier membre de (34) est donc au plus égal à $\mathrm{M} + \overline{\omega}_s(1+h, 1+k)$.

On a donc

$$(e^{-a_1} - e^{-b_1})(e^{-a_2} - e^{-b_2})[s(\xi', \eta') - s(\xi, \eta) - \overline{\omega}_s(1+h, 1+k)] \leqq \mathrm{M} + \overline{\omega}_s(1+h, 1+k),$$

d'où l'on tire (33).

3.11.3. En tenant compte de la remarque du paragraphe 3.9, les théorèmes 1 et 2, combinés avec le théorème 3, donnent les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 4. — *Supposons que :*

1. *La fonction $s(u, v)$ soit réelle ;*

2. *On ait $\overline{\varpi}_s(\lambda, \mu) < +\infty$;*

3. *$\Phi(x, y)$ existe et soit bornée en module par un nombre fixe pour x et y réels positifs ;*

4. *$\Phi(x, y)$ tende vers une limite finie S quand x et y tendent vers zéro par valeurs réelles positives.*

Alors $s(u, v)$ est bornée pour u et v positifs ([16]), *on a* (26) *et* (28) *et, quel que soit l'ensemble* E, (27) *et* (29).

THÉORÈME 5. — *Supposons que :*

1. *La fonction $s(u, v)$ soit réelle ;*

2. *On ait $\overline{\varpi}_s(\lambda, \mu) < +\infty$;*

3. *$\Phi(x, y)$ existe et soit bornée en module par un nombre fixe pour x et y réels positif ;*

4. *Il existe deux nombres réels a et b satisfaisant à $0 < a < b$ tels que $\Phi(x, y)$ tende vers une limite finie S quand x et y tendent vers zéro par valeurs réelles positives satisfaisant à $a < \frac{y}{x} < b$.*

Alors $s(u, v)$ est bornée pour u et $v > 0$ ([16]) *et l'on a* (27) *et* (29) *pour tout ensemble* E *ayant la propriété suivante :*

Il existe deux nombres positifs ε et A tels que, si le couple (u, v) appartient à E *et si u et $v \geq$ A, on a $\varepsilon \leq \frac{v}{u} \leq \frac{1}{\varepsilon}$.*

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer le théorème 4′ correspondant au théorème 1′.

3.12. Remarquons les différences entre les théorèmes de ce chapitre et les théorèmes relatifs aux intégrales simples de Laplace.

Une première différence est que nous supposons ici $\overline{\varpi}_s(\lambda, \mu) < +\infty$ ou $\overline{\varpi}_s(\lambda, \mu) < +\infty$, alors que, dans les hypothèses des théorèmes relatifs aux intégrales simples, seules interviennent les fonctions $\omega_s(\lambda)$ et $\varpi_s(\lambda)$ analogues de $\omega_s(\lambda, \mu)$ et $\varpi_s(\lambda, \mu)$. La raison en a été indiquée au paragraphe 2.9.

D'autre part, le théorème 4 comporte l'hypothèse que $\Phi(x, y)$ soit bornée en module par un nombre fixe pour x et y réels positifs, alors que le théorème correspondant pour les intégrales simples ne comporte pas d'hypothèse semblable. Une telle hypothèse est inutile dans ce dernier théorème du fait que, si l'intégrale $\int_0^{+\infty} x e^{-xt} s(t)\, dt$ tend vers une limite finie quand x tend vers

([16]) Ceci résulte des hypothèses 1, 2, 3, sans l'hypothèse 4.

zéro par valeurs réelles positives, elle est automatiquement bornée pour x réel positif. Au contraire, ici, $\Phi(x, y)$ peut très bien tendre vers une limite finie quand x et y tendent vers zéro par valeurs réelles positives sans être bornée pour x et y réels positifs.

Enfin, il est clair que les théorèmes 2 et 5, dans lesquels on suppose que $\Phi(x, y)$ tend vers une limite finie quand x et y tendent vers zéro par valeurs réelles positives satisfaisant à $a < \frac{y}{x} < b$, ne peuvent avoir d'analogues pour les intégrales simples.

4. Théorèmes relatifs aux intégrales doubles de Laplace-Stieltjes

4.1. Il est entendu une fois pour toutes que, dans tout ce chapitre, $s(u, v)$ sera une fonction *à variation bornée sur tout rectangle* $0 \leq u \leq A$, $0 \leq v \leq B$ *et telle que*

$$s(0, v) = 0 \quad \textit{pour tout } v \geq 0 \qquad \textit{et} \qquad s(u, 0) = 0 \quad \textit{pour tout } u \geq 0.$$

De plus, $\Phi(x, y)$ *désignera maintenant l'intégrale* $\iint e^{-ux-vy}\,ds(u, v)$, *lorsqu'elle existe.*

4.2. D'après ce qui a été dit au paragraphe 1.7.1, on a, quels que soient U et V positifs,

$$\int_0^U \int_0^V e^{-ux-vy}\,ds(u, v) = e^{-Ux-Vy}s(U, V) + \int_0^U x\,e^{-ux-Vy}s(u, V)\,du + \int_0^V y\,e^{-Ux-vy}s(U, v)\,dv + \int_0^U \int_0^V xy\,e^{-ux-vy}s(u, v)\,du\,dv.$$

Si $\overline{\omega}_s(\lambda, \mu) < +\infty$, et si $\mathcal{R}x$ et $\mathcal{R}y > 0$, les trois premiers termes du second membre tendent vers zéro quand U et V tendent vers $+\infty$, tandis que le quatrième terme tend vers l'intégrale $\iint xy\,e^{-ux-vy}s(u, v)\,du\,dv$, qui est absolument convergente.

En effet, on a quels que soient u et v positifs

$$|s(u, v)| \leq H_1 + K[|\log u| + |\log v|]. \tag{10}$$

Posons, d'autre part,

$$\mathcal{R}x = \xi, \qquad \mathcal{R}y = \eta, \qquad |x| = \rho, \qquad |y| = \rho'.$$

Si U et $V > 1$, on a

$$|e^{-Ux-Vy}s(U, V)| \leq e^{-U\xi-V\eta}[H_1 + K\log U + K\log V],$$

expression qui tend vers zéro quand U et V tendent vers $+\infty$.

D'autre part,

$$\left|\int_0^U x\,e^{-ux-vy}s(u,\,v)\,du\right| \leq \rho\int_0^U e^{-u\xi-v\eta}[H_1+K|\log u|+K\log V]\,du,$$

$$\leq \rho[H_1+K\log V]\,e^{-v\eta}\int_0^U e^{-u\xi}\,du+\rho K\,e^{-v\eta}\int_0^U e^{-u\xi}|\log u|\,du,$$

$$\leq \frac{\rho}{\xi}[H_1+K\log V]\,e^{-v\eta}+\rho K\,e^{-v\eta}\int_0^{+\infty} e^{-u\xi}|\log u|\,du,$$

et cette dernière expression, qui est indépendante de U, tend vers zéro quand V tend vers $+\infty$.

De même,

$$\left|\int_0^V y\,e^{-Ux-vy}s(U,\,v)\,dv\right| \leq \frac{\rho'}{\eta}[H_1+K\log U]\,e^{-U\xi}+\rho' K e^{-U\xi}\int_0^{+\infty} e^{-v\eta}|\log v|\,dv,$$

expression indépendante de V et qui tend vers zéro quand U tend vers $+\infty$.

Par ailleurs, l'intégrale $\iint xy\,e^{-ux-vy}s(u,v)\,du\,dv$ est absolument convergente puisque

$$|xy\,e^{-ux-vy}s(u,\,v)|\leq\rho\rho' e^{-u\xi-v\eta}[H_1+K|\log u|+K|\log v|].$$

Nous pouvons donc dire que, *si* $\overline{\omega}_s(\lambda,\,\mu)<+\infty$, *quels que soient* x *et* y *satisfaisant à* $\mathcal{R}x>0$ *et* $\mathcal{R}y>0$, *l'intégrale* $\iint e^{-ux-vy}ds(u,\,v)$ *est convergente et égale à*

$$\iint xy\,e^{-ux-vy}s(u,\,v)\,du\,dv.$$

4.3. On voit donc que, si $\overline{\omega}_s(\lambda,\,\mu)<+\infty$, $\Phi(x,\,y)$ existe encore ici pour $\mathcal{R}x$ et $\mathcal{R}y>0$, tout comme au chapitre 3, et est la même fonction.

Ceci montre que *l'on a ici des théorèmes d'énoncés identiques à ceux des théorèmes* 1, 1′ *et* 2 [mais qui sont distincts de ceux-ci, puisque $\Phi(x,\,y)$ n'y est pas défini de la même façon]. *Nous appellerons ces nouveaux théorèmes* 1 *a*, 1′ *a et* 2 *a*.

4.4. Par contre, pour les théorèmes 4 et 5, il faut ici introduire une hypothèse supplémentaire.

Nous établirons d'abord le théorème suivant :

Théorème 6. — *Supposons que la fonction* $s(u,\,v)$ *soit réelle et que :*

1. $\Phi(x,\,y)$ *existe pour* x *et* y *réels positifs;*
2. $\overline{\omega}_s(\lambda,\,\mu)<+\infty$;
3. *Il existe trois nombres positifs* u_0, v_0 *et* M *tels que :*

a. si $0<u<u'\leq u_0$, *on a quel que soit* $v>0$

$$s(u',\,v)-s(u,\,v)\geq -M;$$

b. si $0 < \varphi < \varphi' \leq \varphi_0$, *on a quel que soit* $u > 0$

$$s(u, \varphi') - s(u, \varphi) \geq -M.$$

Alors, $\Phi(x, y)$ *existe pour* $\mathcal{R}x$ *et* $\mathcal{R}y > 0$ *et est égal à l'intégrale absolument convergente*

$$\iint xy\, e^{-ux-\varphi y} s(u, \varphi)\, du\, d\varphi.$$

4.5. Nous poserons

$$\sigma_{x,y}(U, V) = \begin{cases} 0 & \text{si } U = 0 \text{ ou } V = 0, \\ \displaystyle\int_0^U \int_0^V e^{-ux-\varphi y}\, ds(u, \varphi) & \text{si } U \text{ et } V > 0. \end{cases}$$

Quels que soient x et y, d'après ce qui a été dit au paragraphe 1.8, la fonction $\sigma_{x,y}(U, V)$ est à variation bornée sur tout rectangle $0 \leq U \leq A$, $0 \leq V \leq B$.

Dire que $\Phi(x, y)$ existe équivaut à dire que $\sigma_{x,y}(U, V)$ tend vers une limite finie quand U et V tendent vers $+\infty$.

4.5.1. Nous allons montrer d'abord que les hypothèses 2 et 3 entraînent que, *pour* x *et* y *positifs fixés*, il existe une constante positive Q telle que, quels que soient U, V, U', V' satisfaisant à $0 < U < U'$, $0 < V < V'$, on a

$$\sigma_{x,y}(U', V') - \sigma_{x,y}(U, V) \geq -Q. \tag{35}$$

Remarquons en premier lieu que, si $0 < u_1 < u_2$ et $\varphi_1 > 0$, on a, d'après ce qui a été dit aux paragraphes 1.5.2 et 1.7.1,

$$\begin{aligned} \sigma_{x,y}(u_2, \varphi_1) - \sigma_{x,y}(u_1, \varphi_1) &= \int_{u_1}^{u_2} \int_0^{\varphi_1} e^{-ux-\varphi y}\, ds(u, \varphi), \\ &= \int_{u_1}^{u_2} \int_0^{\varphi_1} e^{-ux-\varphi y}\, d[s(u, \varphi) - s(u_1, \varphi)], \\ &= e^{-u_2 x - \varphi_1 y}[s(u_2, \varphi_1) - s(u_1, \varphi_1)] \\ &\quad + \int_{u_1}^{u_2} x\, e^{-ux-\varphi_1 y}[s(u, \varphi_1) - s(u_1, \varphi_1)]\, du \\ &\quad + \int_0^{\varphi_1} y\, e^{-u_2 x-\varphi y}[s(u_2, \varphi) - s(u_1, \varphi)]\, d\varphi \\ &\quad + \int_{u_1}^{u_2} \int_0^{\varphi_1} xy\, e^{-ux-\varphi y}[s(u, \varphi) - s(u_1, \varphi)]\, du\, d\varphi. \end{aligned}$$

Par suite, si, pour $u_1 \leq u \leq u_2$ et $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$, avec u_1 et $\varphi_1 > 0$,

$$s(u, \varphi) - s(u_1, \varphi) \geq -\psi(u),$$

où ψ est à variation bornée sur $[u_1, u_2]$, on a

$$\begin{aligned}\sigma_{x,y}(u_2, v_1) - \sigma_{x,y}(u_1, v_1) &\geqq -\left\{ e^{-u_2 x - v_1 y}\psi(u_2) + e^{-v_1 y}\int_{u_1}^{u_2} x\, e^{-ux}\psi(u)\, du \right. \\ &\qquad \left. + e^{-u_2 x}\psi(u_2)\int_0^{v_1} y\, e^{-vy}\, dv + \int_{u_1}^{u_2}\int_0^{v_1} xy\, e^{-ux-vy}\psi(u)\, du\, dv \right\}, \\ &\geqq -\left\{ e^{-u_2 x - v_1 y}\psi(u_2) + e^{-v_1 y}\int_{u_1}^{u_2} x\, e^{-ux}\psi(u)\, du \right. \\ &\qquad \left. + e^{-u_2 x}[1 - e^{-v_1 y}]\psi(u_2) + [1 - e^{-v_1 y}]\int_{u_1}^{u_2} x\, e^{-ux}\psi(u)\, du \right\}, \\ &\geqq -\left\{ \psi(u_2)\, e^{-u_2 x} + \int_{u_1}^{u_2} x\, e^{-ux}\psi(u)\, du \right\}, \\ &\geqq -\left\{ \psi(u_1)\, e^{-u_1 x} + \int_{u_1}^{u_2} e^{-ux}\, d\psi(u) \right\}.\end{aligned}$$

Or, comme l'hypothèse 2 entraîne que $s(u, v)$ satisfasse à (11), on a toujours pour $v \geqq 0$ et $0 < u_1 \leqq u$

$$s(u, v) - s(u_1, v) \geqq -\left[H' + K' \log \frac{u}{u_1} \right].$$

Donc, *quels que soient* u_1, u_2, v_1 *satisfaisant à* $0 < u_1 < u_2$, $v_1 > 0$, *on a*

$$\sigma_{x,y}(u_2, v_1) - \sigma_{x,y}(u_1, v_1) \geqq -\left[H' e^{-u_1 x} + K' \int_{u_1}^{u_2} e^{-ux}\frac{du}{u} \right]. \tag{36}$$

D'autre part, si $0 < u_1 < u_2 \leqq u_0$, on a pour $u_1 \leqq u \leqq u_2$ et $v \geqq 0$

$$s(u, v) - s(u_1, v) \geqq -M.$$

Donc, *quels que soient* u_1, u_2, v_1 *satisfaisant à* $0 < u_1 < u_2 \leqq u_0$ *et* $v_1 > 0$, *on a*

$$\sigma_{x,y}(u_2, v_1) - \sigma_{x,y}(u_1, v_1) \geqq -M e^{-u_1 x}. \tag{37}$$

Il résulte de là que, *quels que soient* u_1, u_2, v_1 *satisfaisant à* $0 < u_1 < u_2$ *et* $v_1 > 0$, *on a*

$$\begin{aligned}\sigma_{x,y}(u_2, v_1) - \sigma_{x,y}(u_1, v_1) &\geqq -\left[M + H' e^{-u_0 x} + K' \int_{u_0}^{+\infty} e^{-ux}\frac{du}{u} \right], \\ &\geqq -Q_1.\end{aligned}$$

En effet, si $u_2 \leqq u_0$, (37) donne

$$\sigma_{x,y}(u_2, v_1) - \sigma_{x,y}(u_1, v_1) \geqq -M e^{-u_1 x} \geqq -M.$$

Si $u_1 \geqq u_0$, (36) donne

$$\begin{aligned}\sigma_{x,y}(u_2, v_1) - \sigma_{x,y}(u_1, v_1) &\geqq -\left\{ H' e^{-u_1 x} + K' \int_{u_1}^{u_2} e^{-ux}\frac{du}{u} \right\}, \\ &\geqq -\left\{ H' e^{-u_0 x} + K' \int_{u_0}^{+\infty} e^{-ux}\frac{du}{u} \right\}.\end{aligned}$$

Si $u_1 < u_0 < u_2$, on a

$$\sigma_{x,y}(u_2, v_1) - \sigma_{x,y}(u_1, v_1) = [\sigma_{x,y}(u_2, v_1) - \sigma_{x,y}(u_0, v_1)] + [\sigma_{x,y}(u_0, v_1) - \sigma_{x,y}(u_1, v_1)],$$
$$\geqq -\left\{ H' e^{-u_0 x} + K' \int_{u_0}^{+\infty} e^{-ux} \frac{du}{u} \right\} - M.$$

On démontre de même que, *quels que soient* u_1, v_1, v_2 *satisfaisant à* $u_1 > 0$ *et* $0 < v_1 < v_2$, *on a*

$$\sigma_{x,y}(u_1, v_2) - \sigma_{x,y}(u_1, v_1) \geqq -Q_2,$$

avec

$$Q_2 = M + H' e^{-v_0 y} + K' \int_{v_0}^{+\infty} e^{-vy} \frac{dv}{v}.$$

Alors, si $0 < U < U'$, $0 < V < V'$, on peut écrire

$$\sigma_{x,y}(U', V') - \sigma_{x,y}(U, V) = [\sigma_{x,y}(U', V') - \sigma_{x,y}(U, V')] + [\sigma_{x,y}(U, V') - \sigma_{x,y}(U, V)],$$
$$\geqq -Q_1 - Q_2,$$

ce qui donne (35), en posant $Q_1 + Q_2 = Q$.

4.5.2. (35) montre que $\sigma_{x,y}(U, V)$ est borné inférieurement pour U et V > 0.

En effet, si U′ et V′ > 0, on peut écrire quels que soient U et V satisfaisant à $0 < U < U'$ et $0 < V < V'$,

$$\sigma_{x,y}(U', V') \geqq -Q + \sigma_{x,y}(U, V).$$

Mais, d'après ce qui a été dit au paragraphe 1.3.4, quand U et V tendent vers zéro par valeurs positives, $\sigma_{x,y}(U, V)$ tend vers une limite finie $\sigma_{x,y}(+0, +0)$.

On voit donc que, quels que soient U′ et V′ > 0,

$$\sigma_{x,y}(U', V') \geqq -Q + \sigma_{x,y}(+0, +0).$$

4.5.3. Si maintenant on tient compte de l'hypothèse 1, on voit que $\sigma_{x,y}(U, V)$ est aussi borné supérieurement pour U et V > 0.

En effet, pour U′ $> U$ et V′ $> V$,

$$\sigma_{x,y}(U, V) \leqq Q + \sigma_{x,y}(U', V').$$

En faisant tendre U′ et V′ vers $+\infty$, on obtient à la limite

$$\sigma_{x,y}(U, V) \leqq Q + \Phi(x, y).$$

4.5.4. En définitive, on a montré que les hypothèses du théorème 6 entraînent que, *pour x et y positifs fixés*, il existe une constante positive R telle que, quels que soient U et V > 0,

$$|\sigma_{x,y}(U, V)| \leqq R.$$

Cette inégalité vaut d'ailleurs pour U et V $\geqq 0$, puisque $\sigma_{x,y}(U, V) = 0$ si U ou V $= 0$.

4.5.5. Mais, quels que soient U et $V > 0$, on a, d'après ce qui a été dit aux paragraphes 1.8 et 1.5.3,

$$s(U, V) = \int_0^U \int_0^V e^{ux+vy}\, d\sigma_{x,y}(u, v),$$

d'où, d'après ce qui a été dit au paragraphe 1.7.1,

$$s(U, V) = e^{Ux+Vy}\sigma_{x,y}(U, V) - \int_0^U x\, e^{ux+Vy}\sigma_{x,y}(u, V)\, du - \int_0^V y\, e^{Ux+vy}\sigma_{x,y}(U, v)\, dv + \int_0^U \int_0^V xy\, e^{ux+vy}\sigma_{x,y}(u, v)\, du\, dv.$$

Par suite

$$|s(U, V)| \leq R\left\{e^{Ux+Vy} + \int_0^U x\, e^{ux+Vy}\, du + \int_0^V y\, e^{Ux+vy}\, dv + \int_0^U \int_0^V xy\, e^{ux+vy}\, du\, dv\right\},$$
$$< 4\, R\, e^{Ux+Vy}.$$

D'après ce qui a été dit au paragraphe 1.11, ceci entraîne que, pour $\mathcal{R}x' > x$ et $\mathcal{R}y' > y$, $\Phi(x', y')$ existe et est égal à l'intégrale absolument convergente

$$\iint x' y' e^{-ux'-vy'} s(u, v)\, du\, dv.$$

x et y pouvant être pris aussi petits que l'on veut, ceci a lieu quels que soient x' et y' satisfaisant à $\mathcal{R}x' > 0$ et $\mathcal{R}y' > 0$.

C'est bien le résultat annoncé.

4.6. En combinant le théorème 6 avec les théorèmes 4 et 5, on a les suivants :

Théorème 7. — *Supposons que la fonction $s(u, v)$ soit réelle et que :*

1. *$\Phi(x, y)$ existe et soit bornée en module pour x et y réels > 0 ;*

2. *$\Phi(x, y)$ tende vers une limite finie S quand x et y tendent vers zéro par valeurs réelles positives ;*

3. *On ait $\overline{\omega}_s(\lambda, \mu) < +\infty$;*

4. *Il existe trois nombres positifs u_0, v_0 et M tels que :*

a. Si $0 < u < u' \leq u_0$, on a quel que soit $v > 0$

$$s(u', v) - s(u, v) \geq -M ;$$

b. Si $0 < v < v' \leq v_0$, on a quel que soit $u > 0$

$$s(u, v') - s(u, v) \geq -M.$$

Alors, $s(u, v)$ est bornée pour u et $v > 0$, on a (26) et (28), et, quel que soit l'ensemble E, (27) *et* (29).

THÉORÈME 8. — *Supposons que la fonction $s(u, v)$ soit réelle et que :*

1. *$\Phi(x, y)$ existe et soit bornée en module pour x et y réels > 0;*

2. *Il existe deux nombres réels a et b satisfaisant à $0 < a < b$ tels que $\Phi(x, y)$ tende vers une limile finie S quand x et y tendent vers zéro par valeurs réelles positives satisfaisant à $a < \frac{y}{x} < b$;*

3. *On ait $\overline{\omega}_s(\lambda, \mu) < +\infty$;*

4. *Il existe trois nombres positifs u_0, v_0 et M tels que :*

a. Si $0 < u < u' \leq u_0$, on a quel que soit $v > 0$

$$s(u', v) - s(u, v) \geq -\mathrm{M},$$

b. Si $0 < v < v' \leq v_0$, on a quel que soit $u > 0$

$$s(u, v') - s(u, v) \geq -\mathrm{M}.$$

Alors, $s(u, v)$ est bornée pour u et $v > 0$ et l'on a (27) et (29) pour tout ensemble E *ayant la propriété suivante :*

Il existe deux nombres positifs ε et A *tels que, si le couple (u, v) appartient à* E *et si u et $v \geq$ A, on a $\varepsilon \leq \frac{v}{u} \leq \frac{1}{\varepsilon}$.*

4.6.1. En combinant le théorème 6 avec le théorème 4′, on obtiendrait un théorème 7′ que le lecteur pourra énoncer sans peine.

5. Théorèmes relatifs aux séries doubles de Dirichlet.

5.1. Nous allons maintenant considérer des séries doubles de la forme

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n} e^{-\lambda_m x - \mu_n y}, \tag{38}$$

où $\{\lambda_m\}$ et $\{\mu_n\}$ sont deux suites de nombres réels satisfaisant à

$$0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m < \ldots, \qquad \lim_{m \to +\infty} \lambda_m = +\infty,$$
$$0 \leq \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n < \ldots, \qquad \lim_{n \to +\infty} \mu_n = +\infty,$$

et les $a_{m,n}$ sont des coefficients réels ou complexes.

Il est entendu qu'une série double

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}$$

sera dite convergente si la somme partielle $\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} u_{j,k}$ tend vers une limite finie quand m et n tendent vers $+\infty$ indépendamment l'un de l'autre.

5.2. A la série (38) nous associerons la fonction $s(u, v)$ définie pour u et $v \geq 0$ de la façon suivante :

Si $u = 0$ ou $v = 0$, on prend $s(u, v) = 0$.

Si u et $v > 0$, on prend $s(u, v)$ égal à la somme des $a_{m,n}$ correspondant aux valeurs de m et n pour lesquelles $\lambda_m \leq u$ et $\mu_n \leq v$, cette somme étant considérée comme nulle s'il n'existe aucun couple (m, n) satisfaisant à la condition indiquée.

D'après ce qui a été dit au paragraphe 1.3.1, cette fonction est à variation bornée sur tout rectangle $0 \leq u \leq A$, $0 \leq v \leq B$.

De plus, d'après ce qui a été dit au paragraphe 1.6.1, on a pour U et $V > 0$

$$\int_0^U \int_0^V e^{-ux-vy}\, ds(u, v) = \sum_{\substack{\lambda_j \leq U \\ \mu_k \leq V}} a_{j,k}\, e^{-\lambda_j x - \mu_k y},$$

[la somme étant prise nulle s'il n'y a aucun couple (j, k) tel que $\lambda_j \leq U$ et $\mu_k \leq V$].

Il résulte de là que la série (38) est convergente ou non suivant que l'intégrale $\iint e^{-ux-vy}\, ds(u, v)$ existe ou non, et que, lorsqu'il y a convergence, la somme de la série est égale à la valeur de l'intégrale.

5.3. Ceci étant, il est clair que les théorèmes du chapitre précédent fournissent des théorèmes correspondants relatifs à la série (38).

Nous donnerons seulement ici des corollaires particuliers qui généralisent les théorèmes de Littlewood et de Hardy et Littlewood relatifs aux séries de Dirichlet simples.

5.4. Nous poserons

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{j,k} = S_{m,n}.$$

De plus, nous introduirons les quantités

$$p_{m,n} = \sum_{k=0}^{n} a_{m,k}, \qquad q_{m,n} = \sum_{j=0}^{m} a_{j,n}.$$

Par ailleurs, il nous sera commode de poser $\lambda_{-1} = \mu_{-1} = 0$.

5.5. Comme corollaires des théorèmes 1 *a* et 2 *a* on a les théorèmes suivants :

THÉORÈME 9. — *Supposons qu'il existe une constante positive* K *telle que l'on ait*

$$|p_{m,n}| \leq K \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m} \qquad \textit{pour} \quad \lambda_m > 0 \qquad \textit{et} \qquad n \geq 0$$

et

$$|q_{m,n}| \leq K \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_n} \qquad \text{pour} \quad \mu_n > 0 \qquad \text{et} \qquad m \geq 0.$$

Ceci entraîne la convergence de la série (38) *pour* $\mathcal{R}x$ *et* $\mathcal{R}y > 0$.

Si la somme $F(x, y)$ *de cette série tend vers une limite finie* S *quand* x *et* y *tendent vers zéro par valeurs réelles positives, la série* $\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}$ *est convergente et a pour somme* S.

Si en outre $F(x, y)$ *est bornée en module pour* x *et* y *réels positifs, les sommes partielles* $S_{m,n}$ *sont bornées en module.*

THÉORÈME 10. — *Supposons qu'il existe une constante positive* K *telle que l'on ait*

$$|p_{m,n}| \leq K \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m} \qquad \text{pour} \quad \lambda_m > 0 \qquad \text{et} \qquad n \geq 0,$$

et

$$|q_{m,n}| \leq K \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_n} \qquad \text{pour} \quad \mu_n > 0 \qquad \text{et} \qquad m \geq 0,$$

ce qui entraîne la convergence de la série (38) *pour* $\mathcal{R}x$ *et* $\mathcal{R}y > 0$.

S'il existe deux nombres réels a *et* b *satisfaisant à* $0 < a < b$ *tels que la somme* $F(x, y)$ *de cette série tende vers une limite finie* S *quand* x *et* y *tendent vers zéro par valeurs réelles positives satisfaisant à* $a < \frac{y}{x} < b$, $S_{m,n}$ *tend vers* S *pour toute suite de couples* (m, n) *telle que* m *et* n *tendent vers* $+\infty$ *de manière que les rapports* $\frac{\mu_n}{\lambda_m}$ *et* $\frac{\lambda_m}{\mu_n}$ *restent bornés.*

Si en outre $F(x, y)$ *est bornée pour* x *et* y *réels positifs, les sommes partielles* $S_{m,n}$ *sont bornées.*

5.6. Pour établir ces deux théorèmes, il suffit de montrer que les hypothèses faites sur $p_{m,n}$ et $q_{m,n}$ entraînent que la fonction $s(u, v)$ définie plus haut satisfasse à $\overline{\omega}_s(\lambda, \mu) < +\infty$ et $\omega_s(E, 1+0, 1+0) = 0$ pour E égal à l'ensemble des couples (λ_m, μ_n) où m et $n \geq 1$, et *a fortiori* pour E contenu dans cet ensemble.

En effet, si $\overline{\omega}_s(\lambda, \mu) < +\infty$, l'intégrale $\iint e^{-ux-vy}\, ds(u, v)$ existe pour $\mathcal{R}x$ et $\mathcal{R}y > 0$, de sorte que la série (38) est convergente pour ces valeurs de x et y et lui est égale, et l'on peut appliquer les théorèmes 1 *a* et 2 *a*.

Avec les hypothèses du théorème 9, le théorème 1 *a* permettra de conclure que l'on a (27) quel que soit l'ensemble E. En prenant E égal à l'ensemble des couples (λ_m, μ_n) où m et $n \geq 1$, on trouvera que $s(\lambda_m, \mu_n)$, c'est-à-dire $S_{m,n}$, tend vers S quand m et n tendent vers $+\infty$.

Avec les hypothèses du théorème 10, le théorème 2 *a* montrera que l'on a (27)

pour tout ensemble E ayant la propriété indiquée. Étant donné une suite de couples (m, n) telle que m et n tendent vers $+\infty$ de manière que les rapports $\frac{\mu_n}{\lambda_m}$ et $\frac{\lambda_m}{\mu_n}$ restent bornés, on peut prendre E égal à l'ensemble des couples (λ_m, μ_n) correspondants. (27) montrera alors que, pour cette suite de couples (m, n), $S_{m,n}$ tend vers S.

Dans les deux théorèmes, la remarque du paragraphe 3.9 montre que les suites partielles $S_{m,n}$ sont certainement bornées si $F(x, y)$ est bornée pour x et y réels positifs.

5.7. Nous montrerons que l'on a pour u et v positifs quelconques

$$W_s(u, v, \lambda, \mu) \leq K[2 + \log\lambda + \log\mu], \tag{39}$$

et pour m et $n \geq 1$

$$W_s(\lambda_m, \mu_n, \lambda, \mu) \leq K[\log\lambda + \log\mu]. \tag{40}$$

Il en résultera que

$$\overline{w}_s(\lambda, \mu) \leq K[2 + \log\lambda + \log\mu] < +\infty$$

et, pour E égal à l'ensemble des couples (λ_m, μ_n) où m et $n \geq 1$,

$$w_s(E, \lambda, \mu) \leq K[\log\lambda + \log\mu], \qquad \text{d'où} \qquad w_s(E, 1+0, 1+0) = 0.$$

5.7.1. Il suffit de montrer que, si $0 < u \leq u' \leq \lambda u$ et $0 < v \leq v' \leq \mu v$, on a

$$|s(u', v') - s(u, v)| \leq K[2 + \log\lambda + \log\mu], \tag{41}$$

et que, si $\lambda_m \leq u' \leq \lambda\lambda_m$ et $\mu_n \leq v' \leq \mu\mu_n$, avec m et $n \geq 1$, on a

$$|s(u', v') - s(\lambda_m, \mu_n)| \leq K[\log\lambda + \log\mu]. \tag{42}$$

On remarque d'abord que, quels que soient m tel que $\lambda_m > 0$ et $n \geq 0$, on a

$$|p_{m,n}| \leq K,$$

puisque, pour $\lambda_m > 0$,

$$\frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m} \leq 1.$$

D'autre part, pour $m \geq 1$ et $\lambda_{m-1} > 0$, on a quel que soit $n \geq 0$

$$|p_{m,n}| \leq K \log\frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}}.$$

Alors, on va voir que, si $0 < u \leq u' \leq \lambda u$ et $v > 0$, on a

$$|s(u', v) - s(u, v)| \leq K[1 + \log\lambda]. \tag{43}$$

Si $v < \mu_0$ (μ_0 étant > 0, évidemment), c'est évident car le premier membre est nul.

Supposons donc $\mu_n \leq v < \mu_{n+1}$, avec $n \geq 0$.

S'il n'y a aucun λ_j satisfaisant à $u < \lambda_j \leq u'$, on a $s(u', v) = s(u, v)$ et le premier membre de (43) est encore nul.

S'il y en a un, soit λ_{m_1}, on a

$$|s(u', v) - s(u, v)| = |p_{m_1,n}| \leq K.$$

S'il y en a plusieurs, soit $\lambda_{m_1}, \lambda_{m_1+1}, \ldots, \lambda_{m_2}$, on a

$$s(u', v) - s(u, v) = p_{m_1,n} + \sum_{m=m_1+1}^{m_2} p_{m,n},$$

d'où

$$\begin{aligned} |s(u', v) - s(u, v)| &\leq K + K \sum_{m_1+1}^{m_2} \log \frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}}, \\ &\leq K\left[1 + \log \frac{\lambda_{m_2}}{\lambda_{m_1}}\right], \\ &\leq K[1 + \log \lambda]. \end{aligned}$$

On voit de même que, si $u > 0$ et $0 < v \leq v' \leq \mu v$, on a

$$|s(u, v') - s(u, v)| \leq K[1 + \log \mu]. \tag{44}$$

Si $0 < u \leq u' \leq \lambda u$ et $0 < v \leq v' \leq \mu v$, (43) et (44) donnent (41) en écrivant

$$|s(u', v') - s(u, v)| \leq |s(u', v) - s(u, v)| + |s(u', v') - s(u', v)|.$$

Pour établir (42), nous remarquons d'abord que, si $\lambda_m \leq u' \leq \lambda\lambda_m$, avec $m \geq 1$, on a quel que soit $v > 0$,

$$|s(u', v) - s(\lambda_m, v)| \leq K \log \lambda.$$

En effet, si $u' < \lambda_{m+1}$ ou $v < \mu_0$,

$$s(u', v) - s(\lambda_m, v) = 0.$$

Si $\lambda_{m_1} \leq u' < \lambda_{m_1+1}$, avec $m_1 > m$, et $\mu_n \leq v < \mu_{n+1}$, avec $n \geq 0$, on a

$$s(u', v) - s(\lambda_m, v) = \sum_{j=m+1}^{m_1} p_{j,n},$$

d'où

$$\begin{aligned} |s(u', v) - s(\lambda_m, v)| &\leq \sum_{j=m+1}^{m_1} |p_{j,n}|, \\ &\leq K \sum_{m+1}^{m_1} \log \frac{\lambda_j}{\lambda_{j-1}} = K \log \frac{\lambda_{m_1}}{\lambda_m}, \\ &\leq K \log \lambda. \end{aligned}$$

De même, si $\mu_n \leq v' \leq \mu\mu_n$, avec $n \geq 1$, on a quel que soit $u > 0$

$$|s(u, v') - s(u, \mu_n)| \leq K \log \mu.$$

Alors, si $\lambda_m \leq u' \leq \lambda\lambda_m$ et $\mu_n \leq v' \leq \mu\mu_n$, avec m et $n \geq 1$, on a

$$|s(u', v') - s(\lambda_m, \mu_n)| \leq |s(u', \mu_n) - s(\lambda_m, \mu_n)| + |s(u', v') - s(u', \mu_n)|,$$
$$\leq K \log\lambda + K \log\mu.$$

La démonstration des théorèmes 9 et 10 est ainsi achevée.

5.8. Il est intéressant de remarquer que, *si* λ_0 *et* $\mu_0 > 0$, *les hypothèses sur* $p_{m,n}$ *et* $q_{m,n}$ *qui figurent dans ces théorèmes sont satisfaites en particulier si l'on a quels que soient* m *et* $n \geq 0$

$$|a_{m,n}| \leq M \frac{(\lambda_m - \lambda_{m-1})(\mu_n - \mu_{n-1})}{\lambda_m^2 + \mu_n^2} \quad (45) \quad (17).$$

En effet, si l'on a (45), on voit que, quels que soient m et $n \geq 0$,

$$|p_{m,n}| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_{m,k}|,$$
$$\leq M \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_m(\mu_k - \mu_{k-1})}{\lambda_m^2 + \mu_k^2},$$
$$\leq M \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m} \int_0^{\mu_n} \frac{\lambda_m\, dt}{\lambda_m^2 + t^2},$$
$$\leq M \frac{\pi}{2} \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m},$$

et de même

$$|q_{m,n}| \leq M \frac{\pi}{2} \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_n}.$$

Si λ_0 *ou* $\mu_0 = 0$, *les hypothèses sur* $p_{m,n}$ *et* $q_{m,n}$ *sont satisfaites si l'on a* (45) *pour tous les couples* (m, n) *tels que* λ_m *et* $\mu_n > 0$, *avec*

$$|a_{0,n}| \leq N \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_n} \quad \textit{pour} \quad \mu_n > 0, \quad \textit{si} \quad \lambda_0 = 0,$$

et

$$|a_{m,0}| \leq N \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m} \quad \textit{pour} \quad \lambda_m > 0, \quad \textit{si} \quad \mu_0 = 0.$$

En effet, si $\mu_0 > 0$, le calcul fait plus haut montre que l'on a pour $\lambda_m > 0$ et $n \geq 0$

$$|p_{m,n}| \leq M \frac{\pi}{2} \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m}.$$

Si $\mu_0 = 0$, on a pour $\lambda_m > 0$:

$$|p_{m,0}| = |a_{m,0}| \leq N \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m},$$

---

(17) Comme nous l'avons dit au paragraphe 5.4, nous posons $\lambda_{-1} = \mu_{-1} = 0$.

et pour $n > 0$

$$\begin{aligned}
|p_{m,n}| &\leq |a_{m,0}| + \sum_{k=1}^{n} |a_{m,k}|, \\
&\leq N\frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m} + \sum_{k=1}^{n} M\frac{(\lambda_m - \lambda_{m-1})(\mu_k - \mu_{k-1})}{\lambda_m^2 + \mu_k^2}, \\
&\leq \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m}\left\{N + M\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_m(\mu_k - \mu_{k-1})}{\lambda_m^2 + \mu_k^2}\right\}, \\
&\leq \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m}\left\{N + M\int_0^{\mu_n}\frac{\lambda_m\, dt}{\lambda_m^2 + t^2}\right\}, \\
&\leq \left(N + M\frac{\pi}{2}\right)\frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, dans tous les cas, on a pour $\lambda_m > 0$ et $n \geq 0$,

$$|p_{m,n}| \leq \left(N + M\frac{\pi}{2}\right)\frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m}.$$

De même, pour $\mu_n > 0$ et $m \geq 0$,

$$|q_{m,n}| \leq \left(N + M\frac{\pi}{2}\right)\frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_n}.$$

5.8.1. *Dans le cas particulier où $\lambda_m = m$ et $\mu_n = n$, on voit que les hypothèses sur $p_{m,n}$ et $q_{m,n}$ sont satisfaites si l'on a*

$$|a_{m,n}| \leq \frac{M}{m^2 + n^2} \qquad \textit{pour} \quad m \text{ et } n > 0,$$

avec

$$|a_{m,0}| \leq \frac{N}{m} \qquad \textit{pour} \quad m > 0 \qquad \textit{et} \qquad |a_{0,n}| \leq \frac{N}{n} \qquad \textit{pour} \quad n > 0,$$

ou, plus particulièrement encore, si l'on a

$$|a_{m,n}| \leq \frac{M}{m^2 + n^2} \qquad \textit{pour} \quad m^2 + n^2 > 0.$$

En posant $e^{-x} = X$ et $e^{-y} = Y$, le théorème 9 donne ainsi le théorème de Knopp cité dans l'introduction ([18]), avec en moins l'hypothèse que

$$\left|\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n} X^m Y^n\right| \leq K \text{ pour } X \text{ et } Y \text{ réels} \geq 0 \text{ et} < 1.$$

5.9. *Le théorème 1' a donne comme corollaire un théorème 9' déduit du théorème 9 en remplaçant l'hypothèse que $F(x, y)$ tend vers S quand x et y tendent*

([18]) [13], Satz 5, p. 584.

vers zéro par valeurs réelles positives par celle qu'il existe deux suites $\{x_m\}$ *et* $\{y_n\}$ *satisfaisant à*

$$x_m = r_m e^{i\theta_m}, \qquad y_n = r'_n e^{i\theta'_n}, \qquad r_m \text{ et } r'_n > 0, \qquad |\theta_m| \text{ et } |\theta_n| < \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{m\to+\infty} r_m = 0, \qquad \lim_{m\to+\infty} \frac{r_{m+1}}{r_m} = 1, \qquad \overline{\lim_{m\to+\infty}} |\theta_m| < \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{n\to+\infty} r'_n = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{r'_{n+1}}{r'_n} = 1, \qquad \overline{\lim_{n\to+\infty}} |\theta'_n| < \frac{\pi}{2},$$

telles que $F(x_m, y_n)$ *tende vers* S *quand m et n tendent vers* $+\infty$.

5.10. Comme corollaires des théorèmes 7 et 8 on a les théorèmes suivants :

THÉORÈME 11. — *Supposons que les* $a_{m,n}$ *soient réels et qu'il existe une constante positive* K *telle que l'on ait*

$$p_{m,n} \geqq -K\frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m} \qquad \text{pour} \quad \lambda_m > 0 \qquad \text{et} \qquad n \geqq 0$$

et

$$q_{m,n} \geqq -K\frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_n} \qquad \text{pour} \quad \mu_n > 0 \qquad \text{et} \qquad m \geqq 0.$$

Si la série (38) *est convergente pour x et y réels positifs et si sa somme* $F(x, y)$ *est bornée pour x et y réels positifs et tend vers une limite finie* S *quand x et y tendent vers zéro par valeurs réelles positives, les sommes partielles* $S_{m,n}$ *sont bornées* (19) *et l'on a*

$$(46) \qquad \overline{\lim_{m,n\to+\infty}} S_{m,n} = S \qquad \text{et} \qquad \underline{\lim_{m,n\to+\infty}} S_{m,n} \geqq S - K(2 - \alpha - \beta),$$

avec

$$\alpha = \lim_{m\to+\infty} \frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}} \qquad \text{et} \qquad \beta = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}.$$

En particulier, si $\frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m}$ *tend vers* 1 *quand m tend vers* $+\infty$ *et* $\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}$ *tend vers* 1 *quand n tend vers* $+\infty$, *la série* $\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}$ *est convergente et a pour somme* S.

THÉORÈME 12. — *Supposons que les* $a_{m,n}$ *soient réels et qu'il existe une constante positive* K *telle que l'on ait*

$$p_{m,n} \geqq -K\frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m} \qquad \text{pour} \quad \lambda_m > 0 \qquad \text{et} \qquad n \geqq 0$$

et

$$q_{m,n} \geqq -K\frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_n} \qquad \text{pour} \quad \mu_n > 0 \qquad \text{et} \qquad m \geqq 0.$$

(19) Ceci est vrai sans la dernière hypothèse.

Si la série (38) *est convergente pour x et y réels positifs, si sa somme* $F(x, y)$ *est bornée pour x et y réels positifs, et s'il existe deux nombres réels a et b satisfaisant à* $0 < a < b$ *tels que* $F(x, y)$ *tende vers une limite finie* S *quand x et y tendent vers zéro par valeurs réelles positives satisfaisant à* $a < \frac{y}{x} < b$, *les sommes partielles* $S_{m,n}$ *sont bornées* (19) *et l'on a pour toute suite de couples (m, n) telle que m et n tendent vers $+\infty$ de manière que les rapports* $\frac{\mu_n}{\lambda_m}$ *et* $\frac{\lambda_m}{\mu_n}$ *restent bornés*

$$(47) \qquad S - K(2 - \alpha - \beta) \leqq \underline{\lim} S_{m,n} \leqq \overline{\lim} S_{m,n} \leqq S,$$

avec

$$\alpha = \underline{\lim}_{m \to +\infty} \frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}} \qquad \text{et} \qquad \beta = \underline{\lim}_{n \to +\infty} \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}.$$

Si, de plus, α et β sont positifs, on peut affirmer qu'il existe de telles suites de couples (m, n) pour lesquelles $S_{m,n}$ *tend vers* S.

Si $\frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m}$ *tend vers* 1 *quand m tend vers $+\infty$ et* $\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}$ *tend vers* 1 *quand n tend vers $+\infty$,* $S_{m,n}$ *tend vers* S *quand m et n tendent vers $+\infty$ de manière que les rapports* $\frac{\mu_n}{\lambda_m}$ *et* $\frac{\lambda_m}{\mu_n}$ *restent bornés.*

5.11. Indiquons d'abord les conséquences des hypothèses communes aux deux théorèmes.

5.11.1. L'hypothèse que la série (38) est convergente pour x et y réels positifs, et égale à $F(x, y)$, se traduit par le fait que, $s(u, v)$ étant la fonction définie au paragraphe 5.2, l'intégrale $\iint e^{-ux-vy}\, ds(u, v)$ est convergente pour x et y réels positifs, et égale à $F(x, y)$.

Un raisonnement tout à fait semblable à celui par lequel nous avons montré plus haut que les hypothèses des théorèmes 9 et 10 impliquent

$$W_s(u, v, \lambda, \mu) \leqq K[2 + \log\lambda + \log\mu] \qquad \text{pour} \quad u \text{ et } v > 0$$

montre que l'on a ici

$$\Pi'_s(u, v, \lambda, \mu) \leqq K[2 + \log\lambda + \log\mu] \qquad \text{pour} \quad u \text{ et } v > 0.$$

Par conséquent, on a $\overline{\varpi}_s(\lambda, \mu) < +\infty$.

Par ailleurs, en prenant u_0 positif, et inférieur à λ_0 si $\lambda_0 > 0$ ou à λ_1 si $\lambda_0 = 0$, on voit que, si $0 < u < u' \leqq u_0$, on a quel que soit $v > 0$

$$s(u', v) - s(u, v) = 0.$$

De même, en prenant φ_0 positif, et inférieur à μ_0 si $\mu_0 > 0$ ou à μ_1 si $\mu_0 = 0$, on voit que, si $0 < \varphi < \varphi' \leq \varphi_0$, on a quel que soit $u > 0$

$$s(u, \varphi') - s(u, \varphi) = 0.$$

Les hypothèses 1, 3 et 4 des théorèmes 7 et 8 sont donc satisfaites.

5.11.2. D'autre part, un raisonnement semblable à celui par lequel nous avons montré plus haut que les hypothèses des théorèmes 9 et 10 impliquent

$$W_s(\lambda_m, \mu_n, \lambda, \mu) \leq K \log \lambda\mu \qquad \text{pour} \quad m \text{ et } n \geq 1$$

permet de montrer que l'on a ici, pour m et $n \geq 1$,

$$\Pi'_s(\lambda_m, \mu_n, \lambda, \mu) \leq K \log \lambda\mu.$$

Par conséquent, *pour tout ensemble* E *contenu dans l'ensemble des couples* (λ_m, μ_n) *où* m *et* $n \geq 1$, *on a*

$$\varpi'_s(E, \lambda, \mu) \leq K \log \lambda\mu, \quad d'où \quad \varpi'_s(E, 1+0, 1+0) = 0.$$

5.11.3. Posons maintenant, pour m et $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Max}[0, -p_{m,n}] &= p'_{m,n}, & \operatorname{Max}[0, -q_{m,n}] &= q'_{m,n}, \\ S_{m,n} - S_{m-1,n-1} &= \delta_{m,n}, & \operatorname{Max}[0, -\delta_{m,n}] &= \delta'_{m,n}, \end{aligned}$$

puis posons

$$\overline{\lim_{m,n \to +\infty}} p'_{m,n} = \mathfrak{P}, \qquad \overline{\lim_{m,n \to +\infty}} q'_{m,n} = \mathfrak{Q}, \qquad \overline{\lim_{m,n \to +\infty}} \delta'_{m,n} = \delta$$

et

$$\operatorname{Max}[\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \delta] = \rho.$$

Ces quatre derniers nombres sont finis, puisque les hypothèses faites sur $p_{m,n}$ et $q_{m,n}$ entraînent que, pour m et $n \geq 1$,

$$p_{m,n} \geq -K, \qquad q_{m,n} \geq -K,$$

et

$$\delta_{m,n} = p_{m,n-1} + q_{m,n} \geq -2K,$$

et par suite

$$p'_{m,n} \leq K, \qquad q'_{m,n} \leq K, \qquad \delta'_{m,n} \leq 2K.$$

Nous allons voir que, *pour tout ensemble* E *contenu dans l'ensemble des couples* (λ_m, μ_n) *où* m *et* $n \geq 1$, *on a*

$$\varpi''_s(E, \lambda, \mu) \leq K \log \lambda\mu + \rho. \tag{48}$$

Il en résultera évidemment que, *pour tout ensemble* E *satisfaisant à cette condition, on a*

$$\varpi''_s(E, 1+0, 1+0) \leq \rho.$$

5.11.4. λ et μ étant fixés, à tout couple (m, n) tel que $\lambda_m > \lambda\lambda_0$ et $\mu_n > \mu\mu_0$, faisons correspondre le couple (m', n') défini par

$$\lambda_{m'-1} \leqq \frac{\lambda_m}{\lambda} < \lambda_{m'} \qquad \text{et} \qquad \mu_{n'-1} \leqq \frac{\mu_n}{\mu} < \mu_{n'}.$$

Si u' et v' satisfont à

$$\frac{\lambda_m}{\lambda} \leqq u' \leqq \lambda_m \qquad \text{et} \qquad \frac{\mu_n}{\mu} \leqq v' \leqq \mu_n,$$

il existe m_1 et n_1 satisfaisant à

$$\lambda_{m_1} \leqq u' < \lambda_{m_1+1} \qquad \text{et} \qquad \mu_{n_1} \leqq v' < \mu_{n_1+1},$$

et l'on a évidemment

$$m'-1 \leqq m_1 \leqq m \qquad \text{et} \qquad n'-1 \leqq n_1 \leqq n.$$

On a toujours

$$s(u', v') = S_{m_1, n_1} = s(\lambda_{m_1}, \mu_{n_1}).$$

Nous envisagerons quatre cas suivant les valeurs de m_1 et n_1 :

(a) $m_1 \geqq m'$, $n_1 \geqq n'$.

Alors $\frac{\lambda_m}{\lambda} < \lambda_{m_1} \leqq \lambda_m$ et $\frac{\mu_n}{\mu} < \mu_{n_1} \leqq \mu_n$, et par suite

$$\lambda_{m_1} \leqq \lambda_m < \lambda\lambda_{m_1} \qquad \text{et} \qquad \mu_{n_1} \leqq \mu_n < \mu\mu_{n_1}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} s(u', v') - s(\lambda_m, \mu_n) &= -[s(\lambda_m, \mu_n) - s(\lambda_{m_1}, \mu_{n_1})], \\ &\leqq \Pi'_s(\lambda_{m_1}, \mu_{n_1}, \lambda, \mu), \\ &\leqq K \log \lambda\mu. \end{aligned}$$

(b) $m_1 = m'-1$ et $n_1 \geqq n'$.

Alors, on peut écrire

$$\begin{aligned} s(u', v') - s(\lambda_m, \mu_n) &= [s(\lambda_{m'}, \mu_{n_1}) - p_{m', n_1}] - s(\lambda_m, \mu_n), \\ &= -[s(\lambda_m, \mu_n) - s(\lambda_{m'}, \mu_{n_1})] - p_{m', n_1}, \end{aligned}$$

et, comme $\lambda_{m'} \leqq \lambda_m < \lambda\lambda_{m'}$ et $\mu_{n_1} \leqq \mu_n < \mu\mu_{n_1}$, ceci donne

$$\begin{aligned} s(u', v') - s(\lambda_m, \mu_n) &\leqq \Pi'_s(\lambda_{m'}, \mu_{n_1}, \lambda, \mu) + p'_{m', n_1}, \\ &\leqq K \log \lambda\mu + p'_{m', n_1}. \end{aligned}$$

(c) $m_1 \geqq m'$ et $n_1 = n'-1$.

Alors on peut écrire

$$\begin{aligned} s(u', v') - s(\lambda_m, \mu_n) &= [s(\lambda_{m_1}, \mu_{n'}) - q_{m_1, n'}] - s(\lambda_m, \mu_n), \\ &= -[s(\lambda_m, \mu_n) - s(\lambda_{m_1}, \mu_{n'})] - q_{m_1, n'}, \end{aligned}$$

et, comme $\lambda_{m_1} \leqq \lambda_m < \lambda\lambda_{m_1}$ et $\mu_{n'} \leqq \mu_n < \mu\mu_{n'}$, ceci donne

$$\begin{aligned} s(u', v') - s(\lambda_m, \mu_n) &\leqq \Pi'_s(\lambda_{m_1}, \mu_{n'}, \lambda, \mu) + q'_{m_1, n'}, \\ &\leqq K \log \lambda\mu + q'_{m_1, n'}. \end{aligned}$$

(d) $m_1 = m'-1$ et $n_1 = n'-1$.

Alors on a

$$\begin{aligned} s(u', v') - s(\lambda_m, \mu_n) &= [s(\lambda_{m'}, \mu_{n'}) - \delta_{m',n'}] - s(\lambda_m, \mu_n), \\ &= -[s(\lambda_m, \mu_n) - s(\lambda_{m'}, \mu_{n'})] - \delta_{m',n'}, \\ &\leqq \Pi'_s(\lambda_{m'}, \mu_{n'}, \lambda, \mu) + \delta'_{m',n'}, \\ &\leqq K \log \lambda\mu + \delta'_{m',n'}. \end{aligned}$$

5.11.5. Remarquons maintenant que, quel que soit ε positif, il existe deux entiers positifs m_0 et n_0 tels que, pour $m \geqq m_0$ et $n \geqq n_0$,

$$p'_{m,n} \leqq \rho + \varepsilon, \qquad q'_{m,n} \leqq \rho + \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \delta'_{m,n} \leqq \rho + \varepsilon.$$

Alors, ce qui précède montre que, si $\lambda_m \geqq \lambda\lambda_{m_0}$ et $\mu_n \geqq \mu\mu_{n_0}$, on a toujours, pour $\frac{\lambda_m}{\lambda} \leqq u' \leqq \lambda_m$ et $\frac{\mu_n}{\mu} \leqq v' \leqq \mu_n$,

$$s(u', v') - s(\lambda_m, \mu_n) \leqq K \log \lambda\mu + \rho + \varepsilon.$$

Autrement dit, pour $\lambda_m \geqq \lambda\lambda_{m_0}$ et $\mu_n \geqq \mu\mu_{n_0}$,

$$\Pi''_s(\lambda_m, \mu_n, \lambda, \mu) \leqq K \log \lambda\mu + \rho + \varepsilon.$$

On a donc bien (48) si E est contenu dans l'ensemble des couples (λ_m, μ_n) où m et $n \geqq 1$.

5.12. Ceci étant, supposons maintenant, en premier lieu, que $F(x, y)$ tende vers une limite finie S quand x et y tendent vers zéro par valeurs réelles positives; autrement dit, plaçons-nous dans les hypothèses du théorème 11.

On peut alors appliquer le théorème 7.

D'abord, $s(u, v)$ est bornée pour u et $v > 0$, donc les sommes partielles $S_{m,n}$ sont bornées.

Ensuite, en prenant pour E l'ensemble des couples (λ_m, μ_n) où m et $n \geqq 1$, (29) donne

$$S - \rho \leqq \varliminf_{m,n \to +\infty} S_{m,n} \leqq \varlimsup_{m,n \to +\infty} S_{m,n} \leqq S. \tag{49}$$

Si $\rho = 0$, ceci donne

$$\varliminf_{m,n \to +\infty} S_{m,n} = \varlimsup_{m,n \to +\infty} S_{m,n} = S.$$

Si $\rho > 0$, l'un au moins des nombres $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{L}$, δ est égal à ρ.

Si $\mathfrak{R} = \rho$, il existe une suite de couples (m_k, n_k) telle que m_k et n_k tendent vers $+\infty$ et que p'_{m_k,n_k} tende vers ρ. Pour k assez grand p'_{m_k,n_k} est positif, donc égal à $-p_{m_k,n_k}$. Par conséquent, p_{m_k,n_k} tend vers $-\rho$. Comme on a

$$S_{m_k,n_k} = S_{m_k-1,n_k} + p_{m_k,n_k},$$

ceci montre que

$$\varlimsup_{k \to +\infty} S_{m_k,n_k} = \varlimsup_{k \to +\infty} S_{m_k-1,n_k} - \rho \leqq \varlimsup_{m,n \to +\infty} S_{m,n} - \rho,$$

et par suite

$$\varlimsup_{m,n\to+\infty} S_{m,n} \leq \overline{\lim_{m,n\to+\infty}} S_{m,n} - \rho.$$

Si $\mathfrak{P} < \rho$ mais $\mathfrak{Q} = \rho$ ou $\delta = \rho$, un raisonnement analogue montre que l'on a encore la même inégalité.

En comparant avec (49), ceci donne

$$\overline{\lim_{m,n\to+\infty}} S_{m,n} = S \qquad \text{et} \qquad \varlimsup_{m,n\to+\infty} S_{m,n} = S - \rho.$$

Pour établir (46), il suffit donc de montrer que

$$\rho \leq K(2 - \alpha - \beta),$$

c'est-à-dire que $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ et δ sont au plus égaux à $K(2 - \alpha - \beta)$.

Pour m et $n \geq 1$, on a

$$p'_{m,n} \leq K\frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m} = K\left[1 - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right].$$

Donc

$$\mathfrak{P} \leq K(1 - \alpha) \leq K(2 - \alpha - \beta) \qquad (\text{puisque } \beta \leq 1).$$

De même,

$$\mathfrak{Q} \leq K(1 - \beta) \leq K(2 - \alpha - \beta).$$

Enfin, on a pour m et $n \geq 1$

$$\delta_{m,n} = p_{m,n-1} + q_{m,n} \geq -K\frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m} - K\frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_n},$$

et par suite

$$\delta'_{m,n} \leq K\left[\frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m} + \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_n}\right] = K\left[2 - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}\right].$$

Donc $\delta \leq K(2 - \alpha - \beta)$.

Dans le cas particulier où $\frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m}$ tend vers 1 quand m tend vers $+\infty$ et $\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, on a $\alpha = \beta = 1$ et (46) montre que $S_{m,n}$ tend vers S quand m et n tendent vers $+\infty$, c'est-à-dire que la série $\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}$ est convergente et a pour somme S.

Le théorème 11 est donc complètement démontré.

5.13. Supposons maintenant qu'il existe deux nombres réels a et b satisfaisant à $0 < a < b$, tels que $F(x, y)$ tende vers une limite finie S quand x et y tendent vers zéro par valeurs réelles positives satisfaisant à $a < \frac{y}{x} < b$; autrement dit, plaçons-nous dans les hypothèses du théorème 12.

On peut alors appliquer le théorème 8.

$s(u, v)$ est encore bornée pour u et $v > 0$, donc les sommes partielles $S_{m,n}$ sont encore bornées.

D'autre part, soit $\{m_k, n_k\}$ une suite de couples (m, n) telle que m_k et n_k tendent vers $+\infty$ de manière que les rapports $\frac{\mu_{n_k}}{\lambda_{m_k}}$ et $\frac{\lambda_{m_k}}{\mu_{n_k}}$ restent bornés.

Pour k au moins égal à un certain k_0, m_k et n_k sont ≥ 1.

De plus, l'ensemble des couples $(\lambda_{m_k}, \mu_{n_k})$ correspondants aux $k \geq k_0$ possède la propriété mentionnée dans l'énoncé du théorème 8.

On a donc (29) pour E égal à cet ensemble, ce qui donne

$$S - \rho \leq \varliminf_{k \to +\infty} S_{m_k, n_k} \leq \varlimsup_{k \to +\infty} S_{m_k, n_k} \leq S, \tag{50}$$

d'où, puisque $\rho \leq K(2 - \alpha - \beta)$,

$$S - K(2 - \alpha - \beta) \leq \varliminf_{k \to +\infty} S_{m_k, n_k} \leq \varlimsup_{k \to +\infty} S_{m_k, n_k} \leq S.$$

Dans le cas particulier où $\frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m}$ tend vers 1 quand m tend vers $+\infty$ et $\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, on a $\alpha = \beta = 1$ et ceci montre que S_{m_k, n_k} tend vers S.

5.14. Pour que le théorème 12 soit complètement établi, il reste à montrer que, si α et β sont > 0, il existe des suites de couples (m, n) où m et n tendent vers $+\infty$ de manière que les rapports $\frac{\mu_n}{\lambda_m}$ et $\frac{\lambda_m}{\mu_n}$ restent bornés, telles que $S_{m,n}$ tende vers S.

Nous montrerons plus précisément que, *si* α *et* $\beta > 0$, *quels que soient* A *et* B *positifs satisfaisant à*

$$\frac{B}{A} > \frac{1}{\alpha\beta\gamma}, \qquad \text{où} \quad \gamma = \operatorname{Max}(\alpha, \beta),$$

on peut trouver une suite de couples (m, n) *où* m *et* n *tendent vers* $+\infty$ *et satisfont à*

$$A < \frac{\mu_n}{\lambda_m} < B,$$

telle que $S_{m,n}$ *tende vers* S.

5.14.1. L'hypothèse que $\frac{B}{A} > \frac{1}{\alpha\beta\gamma}$ entraîne $\frac{A}{\beta\gamma} < \alpha B$.

Choisissons donc un nombre σ quelconque satisfaisant à

$$\frac{A}{\beta\gamma} < \sigma < \alpha B. \tag{51}$$

On voit d'abord que l'on peut trouver une suite de couples d'entiers (m_k, n_k) telle que m_k et n_k soient toujours ≥ 1 et tendent vers $+\infty$, et que l'on ait

$$\gamma\sigma \leq \varliminf_{k \to +\infty} \frac{\mu_{n_k}}{\lambda_{m_k}} \leq \varlimsup_{k \to +\infty} \frac{\mu_{n_k}}{\lambda_{m_k}} \leq \sigma, \tag{52}$$

suite pour laquelle on aura (50), d'après ce qui a été dit au paragraphe précédent.

Si $\beta = \gamma$, on peut prendre pour $\{m_k\}$ une suite croissante arbitraire, assujettie seulement à ce que $m_1 \geq 1$ et $\sigma\lambda_{m_1} \geq \mu_1$, puis déterminer n_k par

$$\mu_{n_k} \leq \sigma\lambda_{m_k} < \mu_{n_k+1}.$$

En effet, dans ces conditions, on a, quel que soit $k \geq 1$, m_k et $n_k \geq 1$ et

$$\frac{\mu_{n_k}}{\lambda_{m_k}} \leq \sigma < \frac{\mu_{n_k}}{\lambda_{m_k}} \frac{\mu_{n_k+1}}{\mu_{n_k}},$$

d'où

$$\frac{\mu_{n_k}}{\mu_{n_k+1}} \sigma < \frac{\mu_{n_k}}{\lambda_{m_k}} \leq \sigma,$$

ce qui donne bien (52).

Si $\beta < \gamma$, on a $\alpha = \gamma$. On peut alors prendre pour $\{n_k\}$ une suite croissante arbitraire, assujettie seulement à ce que $n_1 \geq 1$ et $\frac{1}{\gamma\sigma}\mu_{n_1} \geq \lambda_1$, puis déterminer m_k par

$$\lambda_{m_k} \leq \frac{1}{\gamma\sigma}\mu_{n_k} < \lambda_{m_k+1}.$$

En effet, on a ainsi, quel que soit $k \geq 1$, m_k et $n_k \geq 1$ et

$$1 \leq \frac{1}{\gamma\sigma} \frac{\mu_{n_k}}{\lambda_{m_k}} < \frac{\lambda_{m_k-1}}{\lambda_{m_k}},$$

d'où

$$\gamma\sigma \leq \frac{\mu_{n_k}}{\lambda_{m_k}} < \gamma\sigma \frac{\lambda_{m_k+1}}{\lambda_{m_k}},$$

ce qui donne encore (52).

5.14.2. Si $\lim_{k \to +\infty} S_{m_k, n_k} = S$, (50) montre que S_{m_k, n_k} tend vers S.

Comme $\gamma\sigma > A$ et $\sigma < B$, puisque l'on a (51), il suffit d'enlever éventuellement un certain nombre de termes au début de la suite $\{m_k, n_k\}$ pour avoir une suite répondant à la question.

5.14.3. Dans le cas contraire, d'après (50),

$$\lim_{k \to +\infty} S_{m_k, n_k} < S.$$

Si l'on pose $\lim_{k \to +\infty} S_{m_k, n_k} = S - \eta_1$, on aura $\eta_1 > 0$.

En appliquant le théorème 8, on voit que

$$\lim_{k \to +\infty} S_{m_k, n_k} \geq S - \varpi_s''(E, 1+0, 1-0),$$

où E est l'ensemble des couples $(\lambda_{m_k}, \mu_{n_k})$ correspondants aux $k \geq k_0$.

Par conséquent, pour E égal à cet ensemble,

$$\varpi_s''(E, 1-0, 1+0) \geq \eta,$$

et par suite, quels que soient λ et μ,

$$\varpi_s''(\mathrm{F}, \lambda, \mu) \geqq \eta.$$

Autrement dit, λ et μ étant fixés, on peut trouver une suite $\{m_k', n_k'\}$ extraite de la suite $\{m_k, n_k\}$ telle que $\Pi_s''(\lambda_{m_k'}, \mu_{n_k'}, \lambda, \mu)$ tende vers une limite ω au moins égale à η.

D'après (51), on peut choisir λ et μ assez voisins de 1 pour que

$$\sigma\lambda < \alpha\mathrm{B} \qquad \text{et} \qquad \frac{\sigma}{\mu} > \frac{\mathrm{A}}{\beta\gamma}.$$

D'autre part, on peut prendre la suite $\{m_k', n_k'\}$ telle que, pour toutes les valeurs de k, $\lambda_{m_k'} \geqq \lambda\lambda_0$ et $\mu_{n_k'} \geqq \mu\mu_0$.

5.14.4. Remarquons maintenant que, pour chaque k, il existe m_k'' et n_k'' tels que

$$\frac{\lambda_{m_k'}}{\lambda} < \lambda_{m_k''-1} \leqq \lambda_{m_k'+1}, \qquad \frac{\mu_{n_k'}}{\mu} < \mu_{n_k''-1} \leqq \mu_{n_k'+1},$$

et

$$\mathrm{S}_{m_k'', n_k''} = \mathrm{S}_{m_k', n_k'} + \Pi_s''(\lambda_{m_k'}, \mu_{n_k'}, \lambda, \mu) \quad (20).$$

Alors on a

$$\lim_{k \to +\infty} \mathrm{S}_{m_k'', n_k''} = \lim_{k \to +\infty} \mathrm{S}_{m_k', n_k'} + \omega \geqq \lim_{k \to +\infty} \mathrm{S}_{m_k, n_k} + \omega \geqq \mathrm{S}, \tag{53}$$

puisque

$$\lim_{k \to +\infty} \mathrm{S}_{m_k, n_k} = \mathrm{S} - \eta \qquad \text{et} \qquad \omega \geqq \eta.$$

D'autre part,

$$\frac{\mu_{n_k''}}{\lambda_{m_k''}} \leqq \frac{\mu_{n_k'}}{\lambda_{m_k''}} = \frac{\mu_{n_k'}}{\lambda_{m_k'}} \frac{\lambda_{m_k'}}{\lambda_{m_k''-1}} \frac{\lambda_{m_k''+1}}{\lambda_{m_k''}},$$

$$< \frac{\mu_{n_k'}}{\lambda_{m_k'}} \lambda \frac{\lambda_{m_k''+1}}{\lambda_{m_k''}}.$$

---

(20) En effet, comme la fonction $s(u, v) - s(\lambda_{m_k'}, \mu_{n_k'})$ prend un nombre fini de valeurs différentes pour

$$\frac{\lambda_{m_k'}}{\lambda} \leqq u \leqq \lambda_{m_k'} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mu_{n_k'}}{\mu} \leqq v \leqq \mu_{n_k'},$$

elle atteint sur cet ensemble sa borne supérieure $\Pi_s''(\lambda_{m_k'}, \mu_{n_k'}, \lambda, \mu)$.

Mais, pour $u \geqq \lambda_0$ et $v \geqq \mu_0$, ce qui est le cas ici, on a $s(u, v) = \mathrm{S}_{m,n}$ où m et n sont déterminés par

$$\lambda_m \leqq u < \lambda_{m+1} \qquad \text{et} \qquad \mu_n \leqq v < \mu_{n+1}.$$

Par suite,

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{\mu_{n_k''}}{\lambda_{m_k''}} \leqq \lambda \overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{\mu_{n_k'}}{\lambda_{m_k'}} \overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{\lambda_{m_k''+1}}{\lambda_{m_k''}},$$
$$\leqq \lambda\sigma \frac{1}{\alpha},$$
$$< B. \tag{54}$$

D'un autre côté,

$$\frac{\mu_{n_k''}}{\lambda_{m_k''}} \geqq \frac{\mu_{n_k''}}{\lambda_{m_k'}} = \frac{\mu_{n_k'}}{\lambda_{m_k'}} \frac{\mu_{n_k''+1}}{\mu_{n_k'}} \frac{\mu_{n_k''}}{\mu_{n_k''+1}},$$
$$> \frac{\mu_{n_k'}}{\lambda_{m_k'}} \frac{1}{\mu} \frac{\mu_{n_k''}}{\mu_{n_k''+1}},$$

et par suite

$$\underline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{\mu_{n_k''}}{\lambda_{m_k''}} \geqq \frac{1}{\mu} \underline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{\mu_{n_k'}}{\lambda_{m_k'}} \underline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{\mu_{n_k''}}{\mu_{n_k''+1}},$$
$$\geqq \frac{1}{\mu} \gamma\sigma\beta, \tag{55}$$
$$> A.$$

5.14.5. Maintenant, d'après ce que l'on a vu au paragraphe 5.13, on a

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}} S_{m_k'', n_k''} \leqq S.$$

Avec (53), ceci montre que $S_{m_k'', n_k''}$ tend vers S quand k tend vers $+\infty$.

(54) et (55) montrent qu'il suffit d'enlever éventuellement un nombre fini de termes au début de la suite $\{m_k'', n_k''\}$ pour obtenir une suite ayant les propriétés indiquées au paragraphe 5.14.

5.15 Remarquons que des raisonnements semblables à ceux du paragraphe 5.8 montrent que, *si* λ_0 *et* $\mu_0 > 0$, *les hypothèses sur* $p_{m,n}$ *et* $q_{m,n}$ *qui figurent dans les théorèmes* 11 *et* 12 *sont satisfaites en particulier si l'on a quels que soient* m *et* $n \geqq 0$

$$a_{m,n} \geqq -M \frac{(\lambda_m - \lambda_{m-1})(\mu_n - \mu_{n-1})}{\lambda_m^2 + \mu_n^2}. \quad (56)$$ [21]

Si λ_0 *ou* $\mu_0 = 0$, *les hypothèses sur* $p_{m,n}$ *et* $q_{m,n}$ *sont satisfaites si l'on a* (56) *pour tous les couples* (m, n) *tels que* λ_m *et* $\mu_n > 0$, *avec*

$$a_{0,n} \geqq -N \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_n} \qquad \textit{pour} \quad \mu_n > 0, \qquad \textit{si} \quad \lambda_0 = 0,$$

et

$$a_{m,0} \geqq -N \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m} \qquad \textit{pour} \quad \lambda_m > 0, \qquad \textit{si} \quad \mu_0 = 0.$$

---

(21) Cf. note (17), p. 90.

5.16. Dans le cas particulier où $\lambda_m = m$ et $\mu_n = n$, en posant $e^{-x} = X$ et $e^{-y} = Y$, le théorème 11 donne le théorème de Durañona y Vedia cité dans l'introduction ([22]).

D'autre part, *dans ce cas particulier, on voit que les hypothèses sur* $p_{m,n}$ *et* $q_{m,n}$ *sont certainement satisfaites si l'on a, pour* $m^2 + n^2 > 0$,

$$a_{m,n} \geq -\frac{M}{m^2 + n^2}.$$

5.17. Ajoutons qu'en utilisant le théorème 7′ auquel nous avons fait allusion au paragraphe 4.6.1 *on pourrait établir un théorème* 11′ *déduit du théorème* 11 *en remplaçant l'hypothèse que* $F(x, y)$ *tend vers* S *quand* x *et* y *tendent vers zéro par valeurs réelles positives par celle qu'il existe deux suites* $\{x_m\}$ *et* $\{y_n\}$ *satisfaisant à*

$$x_m = r_m e^{i\theta_m}, \qquad y_n = r'_n e^{i\theta'_n}, \qquad r_m \quad et \quad r'_n > 0, \qquad |\theta_m| \quad et \quad |\theta'_n| < \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{m \to +\infty} r_m = 0, \qquad \lim_{m \to +\infty} \frac{r_{m+1}}{r_m} = 1, \qquad \overline{\lim_{m \to +\infty}} |\theta_m| < \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{n \to +\infty} r'_n = 0, \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{r'_{n+1}}{r'_n} = 1, \qquad \overline{\lim_{n \to +\infty}} |\theta'_n| < \frac{\pi}{2},$$

telles que $F(x_m, y_n)$ *tende vers* S *quand* m *et* n *tendent vers* $+\infty$.

Bibliographie.

[1] Ananda-Rau, *On the converse of Abel's theorem* (*J. London Math. Soc.*, vol. 3, 1928, p. 200-205).

[2] Ananda-Rau, *An example in the theory of summation by Riesz typical means* [*Proc. London Math. Soc.*, (2), t. 30, 1930, p. 367-372].

[3] D. L. Bernstein, *The double Laplace integral* (*Duke Math. J.*, t. 8, 1941, p. 460-496).

[4] H. Delange, *Théorèmes taubériens pour les séries doubles* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 225, 1947, p. 855-856).

[5] H. Delange, *Théorèmes taubériens pour les séries multiples de Dirichlet* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 377-379).

[6] H. Delange, *The converse of Abel's theorem on power series* (*Ann. Math.*, t. 50, 1949. p. 94-109).

[7] H. Delange, *Sur les théorèmes inverses des procédés de sommation des séries divergentes* (premier Mémoire) [*Ann. Sc. Éc. Norm. Sup.*, (3), t. 67, 1950, p. 99-160].

[8] H. Delange, *Sur les théorèmes inverses des procédés de sommation des séries divergentes* (deuxième Mémoire) [*Ann. Sc. Éc. Norm. Sup.*, (3), t. 67, 1950, p. 199-242].

[9] Durañona y Vedia, *Teoremas abelianos y tauberianos de dos variables* [*Univ. Nac. de la Plata, Publ. de la Fac. de ciencias fisicomat.*, (2), t. 4, 1940, p. 291-324].

([22]) [9], Teorema XVIII, p. 323.

[10] HARDY et LITTLEWOOD, *Contributions to the arithmetic theory of series* [*Proc. London Math. Soc.*, (2), t. 11, 1913, p. 411-478].

[11] HARDY et LITTLEWOOD, *Some theorems concerning Dirichlet series* [*Messenger of Mathematics*, (2), t. 43, 1914, p. 134-147].

[12] KARAMATA, Bemerkung zur Note : *Ueber einige Inversionssätze der Limitierungsverfahren* (*Publ. Math. Univ. de Belgrade*, t. 4, 1935, p. 181-184).

[13] KNOPP, *Limitierungs-Umkehrsätze für Doppelfolgen* (*Math. Z.*, Bd 45, 1939, p. 573-589).

[14] E. LANDAU, *Ueber einen Satz des Herrn Littlewood* (*Rendiconti del Circolo Math. di Palermo*, vol. 35, 1913, p. 265-276).

[15] J. E. LITTLEWOOD, *The converse of Abel's theorem on power series* [*Proc. London Math. Soc.*, (2), t. 9, 1911, p. 434-448].

[16] O. SASZ, *Ueber Dirichletsche Reihen an der Konvergenzgrenze* (*Atti del Congresso internazionale dei mathematici*, Bologna, 1928, vol. III, p. 269-276).

[17] O. SASZ, *Verallgemeinerung und neuer Beweis einiger Sätze tauberscher Art* (*Sitz. Bayer. Akad. Wiss.*, 1929, p. 325-340).

[18] O. SASZ, *Converse theorems of summability for Dirichlet series* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 39, 1936, p. 117-130).

[19] A. TAUBER, *Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen* (*Monatsh. Math.*, vol. 8, 1897, p. 273-277).

[20] D. VOELKER et G. DOETSCH, *Die zweidimensionale Laplace-Transformation*, Verlag Birkhaüser Basel, 1950.

[21] W. H. YOUNG, *On multiple integration by parts and the second theorem of the mean* [*Proc. London Math. Soc.*, (2), t. 16, 1917, p. 273-293].

SUR UN ENSEMBLE FERMÉ D'ENTIERS ALGÉBRIQUES

PAR MM. J. DUFRESNOY ET CH. PISOT.

INTRODUCTION

Nous nous proposons d'étudier dans cet article un ensemble S d'entiers algébriques particuliers θ qui semblent devoir jouer un rôle fondamental en théorie des nombres. D'une part, ils permettent de préciser la structure des corps finis de nombres algébriques et d'obtenir des relations nouvelles entre corps différents. D'autre part, ils sont en liaison étroite avec l'approximation rationnelle, donc se rattachent aussi à certaines parties de la théorie des séries trigonométriques.

Les zéros d'un polynome à coefficients entiers, dont le terme du plus haut degré a comme coefficient ± 1, ont un produit dont le module est au moins égal à 1. Sauf dans le cas où tous les zéros sont sur $|z| = 1$, il y a donc un zéro au moins situé dans la région $|z| > 1$. Nous allons porter notre attention sur le cas où le polynome a un zéro et un seul dans la région $|z| > 1$, tous ses autres zéros (s'il y en a) étant *intérieurs* au cercle unité.

Le zéro de plus grand module est nécessairement réel et, quitte à changer z en $-z$, on peut toujours supposer qu'il est supérieur à 1. Nous désignerons ce zéro par θ et nous écrirons le polynome correspondant

$$P(z) \equiv p_0 + p_1 z + \ldots + p_{s-1} z^{s-1} + \varepsilon z^s,$$

où p_0 est un entier positif et $\varepsilon = \pm 1$.

Nous représenterons par S l'ensemble des nombres θ. L'étude de cet ensemble a été entreprise par plusieurs auteurs (1); dans le présent travail nous allons la poursuivre, ce qui nous conduira à des résultats nouveaux.

(1) CH. PISOT, *Ann. R. Sc. Norm. Sup. Pisa*, sér. II, t. 7, 1938, p. 205-248; R. SALEM, *Duke Math. J.*, t. 11, 1944, p. 103-108 et t. 12, 1945, p. 153-172; C. L. SIEGEL, *Duke Math. J.*, t. 11, 1944, p. 597-602.

Remarquons d'abord que le polynome $P(z)$ est *irréductible* (²), car s'il se décomposait en un produit de facteurs, l'un de ceux-ci aurait tous ses zéros intérieurs au cercle unité et son terme de plus haut degré aurait comme coefficient ± 1, ce qui est impossible. Au polynome $P(z)$, nous associerons le polynome

$$Q(z) \equiv \varepsilon z^s P\left(\frac{1}{z}\right) \equiv 1 + q_1 z + \ldots + q_{s-1} z^{s-1} + q_s z^s.$$

Les polynomes $P(z)$ et $Q(z)$ étant irréductibles sont sans zéros communs ou ils sont identiques. Ce dernier cas exige que $P(z)$ ait $\frac{1}{\theta}$ comme seul zéro intérieur au cercle unité, donc que $s = 2$, $p_0 = 1$ et $\varepsilon = 1$, c'est-à-dire que

$$P(z) \equiv 1 + p_1 z + z^2, \qquad \text{avec} \quad p_1 \leq -3;$$

les nombres θ correspondants, à savoir $\theta = \frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4}}{2}$, croissent avec $-p_1$ et tendent vers $+\infty$ quand p_1 tend vers $-\infty$. Ces nombres θ particuliers seront écartés dans nos raisonnements généraux (sans que nous le précisions explicitement) et devront toujours être étudiés à part.

Suivant une idée de M. Salem, à chaque nombre θ de S nous ferons correspondre la fraction rationnelle $\frac{P(z)}{Q(z)}$. Nous établirons que *les fonctions* $\frac{P(z)}{Q(z)}$ *correspondant à un ensemble borné de nombres* θ *de* S *constituent une famille normale de fonctions méromorphes dans* $|z| < 1$. En utilisant une méthode due à l'un de nous (³), nous montrerons que *les fonctions limites sont des fractions rationnelles*. Nous retrouverons, en passant, un résultat remarquable de M. Salem : l'ensemble S est fermé; le nombre 1 n'appartient pas à son ensemble dérivé S'. Nous établirons ensuite le critère suivant :

Pour qu'un nombre θ *de* S *appartienne à* S' *il faut et il suffit qu'il existe un polynome* $A(z)$ *à coefficients entiers tel que, sur* $|z| = 1$, *on ait* $|A(z)| \leq |P(z)|$, *l'égalité n'étant vérifiée qu'en un nombre fini de points.*

De ce critère, nous tirerons les deux conséquences suivantes :

1° *Les puissances entières* θ^n *des nombres* θ *de* S *appartiennent, pour* $n \geq 2$, *à l'ensemble* S';

2° *Les nombres* θ *de* S *qui sont totalement réels appartiennent à* S'.

La seconde partie de notre travail est consacrée à l'étude des petits éléments de S. On voit aussitôt que le nombre $\theta_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, racine de l'équation

(²) Dans l'ensemble des polynomes à coefficients entiers.
(³) Pisot, *loc. cit.*

$1+z-z^2=0$, appartient à S'. M. Siegel a signalé l'intérêt qui s'attacherait à la détermination du plus petit élément de l'ensemble S' et il a indiqué qu'il n'avait pu décider si ce plus petit élément était θ_0. Nous établissons qu'il en est bien ainsi. Notre démonstration, assez compliquée dans le détail, repose essentiellement sur le critère cité plus haut et sur une proposition qui se déduit du lemme de Schwarz. Cette proposition nous permet aussi de déterminer aisément les quatre plus petits éléments de l'ensemble S (4).

Nos principaux résultats ont déjà été résumés dans deux Notes (5).

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DE L'ENSEMBLE S.

La fraction rationnelle $\frac{P(z)}{Q(z)}$, associée au nombre θ de l'ensemble S, jouit des propriétés suivantes :

1° elle a un module égal à 1 sur $|z|=1$;

2° elle a un pôle et un seul dans la région $|z|<1$; c'est le pôle simple $z=\frac{1}{\theta}$;

3° dans $|z|<\frac{1}{\theta}$, elle peut être développée en série de puissances :

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n, \tag{1}$$

où les u_n sont des entiers;

4° dans $|z|\leq 1$, après mise en évidence du pôle $z=\frac{1}{\theta}$, elle peut être développée sous la forme

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{\lambda}{1-\theta z}+\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n z^n. \tag{2}$$

En rapprochant les relations (1) et (2) on obtient immédiatement

$$u_n=\lambda\theta^n+\varepsilon_n. \tag{3}$$

Enfin, si l'on calcule la valeur moyenne de $\left|\frac{P(z)}{Q(z)}(1-\theta z)\right|^2$ sur $|z|=1$, on trouve, en utilisant la relation (1),

$$u_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-\theta u_{n-1})^2=1+\theta^2; \tag{4}$$

---

(4) M. Siegel (*loc. cit.*) avait déterminé les deux plus petits éléments et prévu les deux suivants. Notre travail démontre l'exactitude de cette prévision.

(5) *C. R. Acad. Sc.*, t. 235, 1952, p. 1592-1593 et t. 236, 1953, p. 30-31.

tandis que, si l'on calcule la valeur moyenne de $\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right|^2$ sur $|z|=1$, on trouve, en utilisant la relation (2),

$$\frac{\lambda^2}{\theta^2-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n^2=1. \tag{5}$$

Cette dernière relation entraîne l'inégalité

$$\lambda<\sqrt{\theta^2-1}<\theta, \tag{6}$$

utilisée par M. Salem. Mais cet auteur ne semble pas avoir remarqué que l'on a aussi

$$\lambda>\frac{1}{2(\theta+1)}. \tag{7}$$

Pour établir ce dernier point, on tire de (3) et (5)

$$|u_0-\lambda|=|\varepsilon_0|<1,$$

d'où, puisque $u_0=p_0\geqq 1$,

$$\lambda>0 \qquad \text{et} \qquad u_0<\lambda+1.$$

Si l'on avait $\lambda\leqq\frac{1}{2(\theta+1)}$, λ serait inférieur à $\frac{1}{4}$, donc u_0 serait égal à 1; l'inégalité (4) entraînerait alors

$$|u_1-\theta|<\theta,$$

d'où $u_1\geqq 1$ et, compte tenu de (3) et (5),

$$\frac{\lambda^2}{\theta^2-1}+(1-\lambda)^2+(1-\lambda\theta)^2<1,$$

soit

$$\frac{\lambda^2\theta^4}{\theta^2-1}-2\lambda(1+\theta)+1<0,$$

en contradiction avec l'hypothèse faite.

Des inégalités (6) et (7) on déduit

$$\sqrt{\theta^2-1}>\frac{1}{2(\theta+1)},$$

ce qui montre que la borne inférieure de l'ensemble S est supérieure à 1, résultat que M. Salem a établi par une autre méthode.

Étude des suites convergentes de nombres de S.

Considérons une suite de nombres θ_μ de S tendant vers une limite finie θ'; l'ensemble des nombres λ_μ qui leur sont associés, est borné inférieurement et supérieurement, de sorte qu'on peut toujours supposer, quitte à extraire de la

suite précédente une suite partielle, que les λ_μ tendent vers une limite finie non nulle λ'. En appliquant la relation (2) au nombre θ_μ nous obtenons

$$\frac{P_\mu(z)}{Q_\mu(z)} = \frac{\lambda_\mu}{1-\theta_\mu z} + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{\mu,n} z^n.$$

Les fonctions $\sum \varepsilon_{\mu,n} z^n$, holomorphes pour $|z| \leq 1$, sont bornées en module dans leur ensemble sur $|z| = 1$ puisqu'on a, sur ce cercle,

$$\left| \sum \varepsilon_{\mu,n} z^n \right| \leq 1 + \frac{\lambda_\mu}{\theta_\mu - 1} \qquad \text{qui tend vers} \quad 1 + \frac{\lambda'}{\theta' - 1}.$$

Il en résulte que les fonctions $\sum \varepsilon_{\mu,n} z^n$ constituent une famille normale. Les fonctions $\frac{P_\mu(z)}{Q_\mu(z)}$ constituent donc, dans $|z| < 1$, une famille normale de fonctions méromorphes. De la suite $\frac{P_\mu(z)}{Q_\mu(z)}$ nous pouvons donc extraire une suite partielle convergente dans $|z| < 1$, suite partielle que nous désignerons encore par $\frac{P_\mu(z)}{Q_\mu(z)}$ pour ne pas alourdir inutilement les notations. Quand μ tend vers l'infini, on a alors

$$(8) \qquad \theta_\mu \to \theta', \quad \lambda_\mu \to \lambda' \neq 0, \quad \varepsilon_{\mu,n} \to \varepsilon'_n, \quad u_{\mu,n} \to u'_n,$$

et la fonction limite $R(z)$, qui est méromorphe dans $|z| < 1$, présente les développements

$$(9) \qquad \begin{cases} R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n z^n & \text{dans} \quad |z| < \frac{1}{\theta'}; \\ R(z) = \frac{\lambda'}{1-\theta' z} + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon'_n z^n & \text{dans} \quad |z| < 1. \end{cases}$$

Il résulte de (8) que les u'_n sont des entiers et que, pour un n fixé, on a $u_{\mu,n} = u'_n$ dès que μ est assez grand.

D'autre part, l'inégalité (4) appliquée à θ_μ, entraîne pour un N fixé quelconque

$$u_{\mu,0}^2 + \sum_{n=1}^{N} (u_{\mu,n} - \theta_\mu u_{\mu,n-1})^2 < 1 + \theta_\mu^2;$$

d'où, en faisant tendre μ vers l'infini,

$$u_0'^2 + \sum_{n=1}^{N} (u'_n - \theta' u'_{n-1})^2 \leq 1 + \theta'^2;$$

cette relation étant satisfaite quel que soit N, il en résulte immédiatement

$$(4\,bis) \qquad u_0'^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (u'_n - \theta' u'_{n-1})^2 \leq 1 + \theta'^2.$$

A partir de (5), on obtiendrait de même

$$\frac{\lambda'^2}{\theta'^2-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n'^2\leqq 1. \tag{5 bis}$$

La relation (3), enfin, entraîne

$$u'_n=\lambda'\theta'^n+\varepsilon'_n. \tag{3 bis}$$

En s'appuyant sur la relation (4 *bis*), on montre (6) que le déterminant

$$\begin{vmatrix} u'_0 & u'_1 & \dots & u'_n \\ u'_1 & u'_2 & \dots & u'_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u'_n & u'_{n+1} & \dots & u'_{2n} \end{vmatrix}$$

tend vers zéro quand n augmente indéfiniment. Or, c'est un entier ; il est donc nul dès que n est assez grand. Il résulte alors d'un théorème de Kronecker que, à partir d'un certain rang, les u'_n sont liés par une récurrence linéaire, homogène, à coefficients constants. Fatou a montré que pour une telle suite d'entiers u'_n, on peut toujours prendre une relation de récurrence à coefficients entiers, le coefficient du terme de plus grand indice étant $+1$.

La fonction $R(z)$, donnée par (9), est donc une fraction rationnelle à coefficients entiers, qui s'écrit

$$R(z)\equiv\frac{A(z)}{Q^*(z)},$$

avec $Q^*(0)=1$. Nous pouvons supposer cette fraction rationnelle irréductible (7). D'autre part, d'après sa définition, $R(z)$ a dans $|z|<1$ un pôle et un seul, à savoir $z=\frac{1}{\theta'}$.

Nous allons montrer maintenant que, sur $|z|=1$, on a $|R(z)|\leqq 1$. En effet, pour tout point z intérieur au cercle unité,

$$\left|\frac{P_\mu(z)}{Q_\mu(z)}\,\frac{1-\theta_\mu z}{z-\theta_\mu}\right|\leqq 1, \tag{10}$$

puisqu'il s'agit du module d'une fonction holomorphe et que le module est égal à 1 sur $|z|=1$. Laissant z fixe, faisons augmenter μ indéfiniment ; la relation (10) donne

$$\left|R(z)\,\frac{1-\theta' z}{z-\theta'}\right|\leqq 1 \qquad \text{pour} \quad |z|<1.$$

---

(6) La méthode suivie ici, qui a été utilisée par R. Salem (*loc. cit.*), a été exposée pour la première fois par Ch. Pisot (*loc. cit.*).

(7) S'il n'en était pas ainsi, on formerait le P. G. C. D. du numérateur et du dénominateur et l'on mettrait ce P. G. C. D. sous forme d'un polynome à coefficients entiers, premiers entre eux dans leur ensemble. $A(z)$ et $Q^*(z)$ seraient divisibles par ce P. G. C. D. et l'on sait (théorème de Gauss) que les quotients seraient à coefficients entiers.

Faisons alors tendre z vers une valeur quelconque de module 1 ; la dernière relation entraîne

$$|R(z)| \leq 1 \qquad \text{pour} \quad |z| = 1. \tag{11}$$

La fonction $R(z)$ n'a donc pas de pôle sur $|z| = 1$. Il en résulte que le polynome $Q^*(z)$ a un zéro et un seul, $z = \frac{1}{\theta'}$, dans $|z| < 1$, tous ses autres zéros étant de modules strictement supérieurs à 1. Puisque $Q^*(0) = 1$, le nombre θ' appartient donc à S(8) et le polynome $Q(z)$ qui lui est associé est justement le polynome $Q^*(z)$. Nous écrirons donc θ au lieu de θ', $Q(z)$ au lieu de $Q^*(z)$ et u_n au lieu de u'_n.

Caractérisation des nombres de l'ensemble dérivé S'.

Établissons que, dans (11), l'égalité ne peut avoir lieu qu'en un nombre fini de points. L'égalité, pour $|z| = 1$, se traduit, en effet, par

$$A(z)\,A\left(\frac{1}{z}\right) - Q(z)\,Q\left(\frac{1}{z}\right) = 0$$

et cette équation algébrique n'a qu'un nombre fini de racines, à moins qu'elle ne soit identiquement vérifiée, auquel cas on aurait $|R(z)| = 1$ pour $|z| = 1$. Il nous reste à montrer que cette dernière hypothèse ne peut se réaliser.

Soient σ, σ_μ et σ'_μ les valeurs moyennes sur $|z| = 1$ de $|R(z)(1 - \theta z)^2|^2$, de $|R(z)(1 - \theta_\mu z)(1 - \theta z)|^2$ et de $\left|\frac{P_\mu(z)}{Q_\mu(z)}(1 - \theta_\mu z)(1 - \theta z)\right|^2$; nous obtenons (en convenant de poser, pour simplifier l'écriture, $u_{\mu,-2} = u_{\mu,-1} = u_{-2} = u_{-1} = 0$)

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} [u_n - 2\theta u_{n-1} + \theta^2 u_{n-2}]^2, \tag{12}$$

$$\sigma_\mu = \sum_{n=0}^{\infty} [u_n - (\theta_\mu + \theta) u_{n-1} + \theta_\mu \theta u_{n-2}]^2, \tag{13}$$

$$\sigma'_\mu = \sum_{n=0}^{\infty} [u_{\mu,n} - (\theta_\mu + \theta) u_{\mu,n-1} + \theta_\mu \theta u_{\mu,n-2}]^2, \tag{14}$$

avec

$$\sigma'_\mu = 1 + (\theta_\mu + \theta)^2 + \theta_\mu^2 \theta^2.$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, on peut, d'après (12), trouver N tel que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n - 2\theta u_{n-1} + \theta^2 u_{n-2}]^2 < \varepsilon. \tag{15}$$

(8) Nous retrouvons ici le résultat fondamental de M. Salem : l'ensemble S est fermé.

D'autre part, d'après sa définition, σ_μ tend vers σ quand μ augmente indéfiniment; on peut donc trouver m tel que $\mu > m$ entraîne

$$|\sigma_\mu - \sigma| < \varepsilon, \tag{16}$$

et aussi (puisque N est fixé et que θ_μ tend vers θ)

$$\left| \sum_{n=0}^{N} [u_n - (\theta_\mu + \theta) u_{n-1} + \theta_\mu \theta u_{n-2}]^2 - \sum_{n=0}^{N} [u_n - 2\theta u_{n-1} + \theta^2 u_{n-2}]^2 \right| < \varepsilon. \tag{17}$$

De (12), (13), (15), (16) et (17), on déduit aussitôt

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} [u_n - (\theta_\mu + \theta) u_{n-1} + \theta_\mu \theta u_{n-2}]^2 < 3\varepsilon \qquad \text{pour} \quad \mu > m. \tag{18}$$

Si nous choisissons pour μ une valeur assez grande (et supérieure à m) nous aurons

$$u_{\mu,n} = u_n \qquad \text{pour} \quad n < M$$

et

$$u_{\mu,M} \neq u_M,$$

où M est un nombre supérieur à N. De l'inégalité

$$|u_M - (\theta_\mu + \theta) u_{M-1} + \theta_\mu \theta u_{M-2}| < \sqrt{3\varepsilon},$$

conséquence immédiate de (18), on déduit alors, si l'on a pris au début $\varepsilon < \frac{1}{3}$,

$$|u_{\mu,M} - (\theta_\mu + \theta) u_{\mu,M-1} + \theta_\mu \theta u_{\mu,M-2}| > 1 - \sqrt{3\varepsilon}. \tag{19}$$

De (13), (14), (18) et (19), on tire

$$\sum_{n=M}^{\infty} [u_{\mu,n} - (\theta_\mu + \theta) u_{\mu,n-1} + \theta_\mu \theta u_{\mu,n-2}]^2 - \sum_{n=M}^{\infty} [u_n - (\theta_\mu + \theta) u_{n-1} + \theta_\mu \theta u_{n-2}]^2$$
$$= \sigma'_\mu - \sigma_\mu \geq (1 - \sqrt{3\varepsilon})^2 - 3\varepsilon.$$

Faisons tendre μ vers l'infini; $\sigma'_\mu = 1 + (\theta_\mu + \theta)^2 + \theta_\mu^2 \theta^2$ tend vers $1 + 4\theta^2 + \theta^4$, tandis que σ_μ tend vers σ. La dernière inégalité entraîne

$$\sigma \leq 1 + 4\theta^2 + \theta^4 - (1 - \sqrt{3\varepsilon})^2 + 3\varepsilon,$$

d'où, puisque ε est arbitrairement petit,

$$\sigma \leq 4\theta^2 + \theta^4.$$

Cette inégalité montre en particulier que l'on ne peut avoir $|R(z)| = 1$ pour $|z| = 1$, car, s'il en était ainsi, σ, d'après sa définition, aurait pour valeur $1 + 4\theta^2 + \theta^4$.

Si l'on remarque enfin que, sur $|z| = 1$, on a $|P(z)| = |Q(z)|$, on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Pour qu'un nombre* θ *de l'ensemble* S *appartienne à l'ensemble dérivé* S', *il faut et il suffit qu'il existe un polynome* $A(z)$ *à coefficients entiers tel que, si* $P(z)$ *est le polynome associé à* θ, *on ait, sur* $|z|=1$, *l'inégalité* $|A(z)|\leq|P(z)|$, *l'égalité n'étant vérifiée qu'en un nombre fini de points.*

Nous venons, en effet, de voir que la condition est nécessaire (9). Montrons qu'elle est suffisante. Supposons donc qu'il existe un tel polynome $A(z)$. S'il y a, sur $|z|=1$, des points où $|A(z)|=|P(z)|$, ces points sont en nombre fini; nous les désignerons par $z_k=e^{2\pi i\varphi_k}(k=1,2,\ldots,p)$ et nous poserons $\frac{Q(z_k)}{A(z_k)}=e^{2\pi i\omega_k}$. Pour chaque valeur de k, l'expression $n\varphi_k-\omega_k$, où n est un entier positif, ne prendra une valeur entière que pour une valeur de n au plus, si φ_k est irrationnel. Si φ_k est rationnel, z_k est racine de l'unité, donc zéro d'un certain polynome $E_k(z)$ irréductible, avec $E_k(0)=1$; on peut toujours supposer que c'est pour les valeurs $1, 2, \ldots, q$ de k qu'il en est ainsi.

Considérons alors les équations

$$Q(z)-z^nA(z)=0, \tag{20}$$

où n a une valeur entière assez grande. Une telle équation ne peut avoir pour racines sur $|z|=1$ que certains des nombres $z_1, z_2, \ldots, z_q$ et ces racines ne peuvent être multiples (10). Si, pour une valeur de n, cela a effectivement lieu, le premier membre de l'équation (20) se décompose en un produit de facteurs distincts, comprenant certains des polynomes $E_1(z), E_2(z), \ldots, E_q(z)$ et un polynome $Q_n(z)$ ne se réduisant pas à une constante et ne s'annulant pas sur $|z|=1$.

Il résulte du théorème de Rouché que l'équation

$$Q(z)-\rho z^nA(z)=0$$

a une racine et une seule dans $|z|<1$ lorsque la constante ρ a un module inférieur à 1. En faisant tendre ρ vers 1, on en déduit que l'équation (20) a au plus une racine dans $|z|<1$. Le polynome $Q_n(z)$ a donc au plus un zéro de module inférieur à 1. Mais $Q_n(0)=1$; par conséquent (*voir* l'Introduction) le polynome $Q_n(z)$ a un zéro et un seul de module inférieur à 1 et ce polynome est irréductible. Ce zéro est donc l'inverse $\frac{1}{\theta_n}$ d'un nombre θ_n de l'ensemble S.

---

(9) Il importe de remarquer qu'aucune difficulté ne peut provenir de l'existence des éléments de S appartenant à la catégorie particulière signalée dans l'introduction. Ceux-ci sont en nombre fini dans tout intervalle borné, de sorte que, sauf peut-être un nombre fini d'entre eux, les θ_μ n'appartiennent pas à cette catégorie.

(10) On ne peut, en effet, avoir

$$Q'(z_k)-z_k^nA'(z_k)-nz_k^{n-1}A(z_k)=0$$

si n est assez grand, car alors

$$n|A(z_k)|>|Q'(z_k)|+|A'(z_k)|.$$

L'équation (20) a $\frac{1}{\theta_n}$ comme racine unique dans $|z|<1$. Il en résulte, d'une part, que ces nombres θ_n sont tous différents, car, sinon, $Q(z)$ et $A(z)$ auraient un zéro commun; $Q(z)$ étant irréductible, $A(z)$ serait donc divisible par $Q(z)$; le quotient, polynome à coefficients entiers, devrait avoir un module au plus égal à 1 sur $|z|=1$, l'égalité n'étant pas toujours satisfaite; ce qui est impossible. D'autre part, dans tout domaine fermé intérieur au cercle unité, le premier membre de (20), quand n tend vers l'infini, tend uniformément vers $Q(z)$ qui présente $\frac{1}{\theta}$ comme zéro; il en résulte que θ_n tend vers θ; le nombre θ est donc bien un élément limite. Le théorème 1 est complètement démontré.

Premières applications.

Voici deux applications de la condition suffisante énoncée dans le théorème 1.

THÉORÈME 2. — *Les puissances entières θ^n des nombres θ de l'ensemble* S *appartiennent, pour $n\geq 2$, à l'ensemble dérivé* S'.

Soit θ un nombre de S, $P(z)$ et $Q(z)$ les polynomes associés. Désignons par $1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{n-1}$ les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. On voit immédiatement que $Q(z)\,Q(\zeta z)\,Q(\zeta^2 z)\ldots Q(\zeta^{n-1}z)$ est un polynome à coefficients entiers et que c'est un polynome en z^n. Nous le noterons $Q^*(z^n)$. Le polynome $Q^*(z)$ a pour zéros les puissances $n^{\text{ièmes}}$ de $\frac{1}{\theta}$ et de ses conjugués; puisque $Q^*(0)=1$, le nombre θ^n appartient à S et $Q^*(z)$ est le polynome Q qui lui est associé.

Soit h l'un des nombres $0, 1, 2, \ldots, n-1$; considérons l'expression

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\zeta^{-hk}\frac{P(\zeta^k z)}{Q(\zeta^k z)}.$$

En vertu de (1), elle a comme développement, au voisinage de l'origine, $\sum_m u_{h+mn}z^{h+mn}$; comme, d'autre part, c'est une fraction rationnelle, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\zeta^{-hk}\frac{P(\zeta^k z)}{Q(\zeta^k z)}\equiv z^h\frac{A_h(z^n)}{Q^*(z^n)},$$

où A_h est un polynome à coefficients entiers, non identiquement nul car, en vertu de (3) et (5), on a $|u_p-\lambda\theta^p|<1$, ce qui montre que les u_{h+mn} ne peuvent être tous nuls.

De la dernière identité, on déduit aisément que, pour $|z|=1$,

$$|A_0(z)|^2+|A_1(z)|^2+\ldots+|A_{n-1}(z)|^2=|Q^*(z)|^2.$$

Nous avons ainsi mis en évidence n polynomes $A(z)$ différents, satisfaisant

aux conditions du théorème 1. En général, les polynomes que nous venons de trouver ne sont d'ailleurs pas les seuls.

THÉORÈME 3. — *Les nombres* θ *de l'ensemble* S *qui sont totalement réels appartiennent à l'ensemble dérivé* S'.

On entend par nombre algébrique totalement réel, un nombre dont tous les conjugués sont réels. Supposons donc que le polynome $P(z)$ ait tous ses zéros réels et montrons qu'on peut alors trouver un polynome $A(z)$ satisfaisant aux conditions du théorème 1.

Première méthode. — Soient α_j les zéros de $P(z)$, parmi lesquels se trouve θ. Sur $|z|=1$, on a, en posant $z=e^{i\varphi}$,

$$w=\operatorname{Log}|P(z)|^2=\sum \operatorname{Log}(1+\alpha_j^2-2\alpha_j\cos\varphi);$$

d'où

$$\frac{dw}{d\varphi}=2\sin\varphi\sum\frac{\alpha_j}{1+\alpha^2-2\alpha_j\cos\varphi}$$

et

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2}-\frac{dw}{d\varphi}\operatorname{colg}\varphi=-4\sin^2\varphi\sum\left(\frac{\alpha_j}{1+\alpha_j^2-2\alpha_j\cos\varphi}\right)^2.$$

Il en résulte que, si $\frac{dw}{d\varphi}$ s'annule pour une valeur de φ non multiple de π, on a $\frac{d^2w}{d\varphi^2}<0$: pour une telle valeur de φ, la fonction de w passe par un maximum. Le minimum absolu de w est donc atteint pour $\varphi=0$ ou $\varphi=\pi$. Or $P(1)$ et $P(-1)$ sont des entiers non nuls. Par conséquent, sur $|z|=1$, on a $|P(z)|\geq 1$, l'égalité ne pouvant avoir lieu qu'aux points $z=\pm 1$. Nous avons ainsi trouvé un polynome $A(z)\equiv 1$.

Deuxième méthode. — Sur $|z|=1$, on a

$$\left|\frac{z-\alpha_j}{z-1}\right|\geq\frac{1+\alpha_j}{2}\qquad\text{si}\quad\alpha_j>0$$

et

$$\left|\frac{z-\alpha_j}{z+1}\right|\geq\frac{1-\alpha_j}{2}\qquad\text{si}\quad\alpha_j<0,$$

de sorte que, si p des α_j sont positifs et q sont négatifs,

$$|P(z)|\geq|z-1|^p|z+1|^q\prod\frac{1+|\alpha_j|}{2},$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu qu'aux points $z=\pm 1$. En remarquant que

$$\prod\frac{1+|\alpha_j|}{2}>\left|\prod\alpha_j\right|^{\frac{1}{2}}\geq 1,$$

on voit que nous avons ainsi mis en évidence un autre polynome

$$A(z) \equiv (z-1)^p (z+1)^q,$$

pour lequel on a même l'inégalité stricte $|A(z)| < |P(z)|$ sur $|z| = 1$.

COROLLAIRE. — *Les nombres* θ *de l'ensemble* S *qui sont du premier et du second degré appartiennent à l'ensemble dérivé* S'.

Ces nombres sont très faciles à trouver. Les nombres θ du premier degré sont les entiers supérieurs à 1. Quant aux nombres θ du second degré, ils correspondent aux polynomes

$$P(z) \equiv \varepsilon(z^2 + q_1 z + q_2)$$

qui ont un zéro compris entre -1 et $+1$ et un zéro supérieur à $+1$, ce qui se traduit par $1 - q_1 + q_2 > 0$ et $1 + q_1 + q_2 < 0$; ils sont donc donnés par la formule

$$\theta = \frac{-q_1 + \sqrt{q_1^2 - 4q_2}}{2},$$

où les entiers q_1 et q_2 vérifient $q_1 + |1 + q_2| < 0$.

Le plus petit de ceux de ces nombres correspondant à une valeur fixée de q_1 est celui pour lequel q_2 est le plus grand possible; on trouve

$$q_2 = -q_1 - 2 \qquad \text{et} \qquad \theta = \frac{-q_1 + \sqrt{q_1^2 + 4q_1 + 8}}{2},$$

q_1 étant un entier négatif; ce nombre θ est, à son tour, le plus petit possible quand $q_1 = -1$ et il vaut alors

$$\theta_0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Tel est le plus petit nombre de l'ensemble S' que le corollaire précédent nous permette de découvrir.

PROPRIÉTÉS DES PETITS ÉLÉMENTS DE L'ENSEMBLE S.

Le but essentiel de l'étude qui va suivre est de démontrer que ce nombre θ_0, racine de $1 + z - z^2 = 0$, est le plus petit élément de l'ensemble S'.

Applications du lemme de Schwarz.

LEMME 1. — *Soit* $C(z) \equiv c_0 + c_1 z + \ldots + c_k z^k$ *un polynome à coefficients entiers, tel que* $c_0 \geqq 1$ *et que* $|C(z)| \leqq |Q(z)|$ *sur* $|z| = 1$. *Si* $\theta < 2$, *on a* $c_0 = 1$; *si* $\theta < \theta_0$, *on a de plus* $c_1 = q_1 + 1$ *à moins que* $C(z) \equiv Q(z)$.

En effet, la fonction

$$\varphi(z) \equiv \frac{C(z)}{Q(z)} \frac{1-\theta z}{\theta - z}$$

est holomorphe pour $|z| \leq 1$ et elle a, sur $|z| = 1$, un module au plus égal à 1. Il en résulte, en particulier, que $|\varphi(0)| \leq 1$, soit $|c_0| \leq \theta$. Si $\theta < 2$, on a donc $c_0 = 1$.

Si cette condition est réalisée, $\varphi(0) = \frac{1}{\theta}$. Suivant une méthode classique, nous considérerons alors la fonction

$$\varphi_1(z) \equiv \frac{1}{z} \frac{\varphi(z) - \varphi(0)}{1 - \varphi(z)\varphi(0)};$$

elle est holomorphe pour $|z| \leq 1$ et elle a, sur $|z| = 1$, un module au plus égal à 1; il en résulte que $|\varphi_1(0)| \leq 1$, soit $|\varphi'(0)| \leq 1 - |\varphi(0)|^2$, l'égalité ne pouvant avoir lieu que si $\varphi_1(z)$ est une constante de module 1, cas que nous écartons momentanément. Un calcul simple donne

$$\varphi'(0) = \frac{c_1 - q_1}{\theta} - \left(1 - \frac{1}{\theta^2}\right),$$

d'où l'inégalité

$$\left|\frac{c_1 - q_1}{\theta} - \left(1 - \frac{1}{\theta^2}\right)\right| < 1 - \frac{1}{\theta^2},$$

soit

$$0 < \frac{c_1 - q_1}{\theta} < 2\left(1 - \frac{1}{\theta^2}\right).$$

Si $\theta \leq \theta_0$, on a $\theta\left(1 - \frac{1}{\theta^2}\right) \leq 1$, d'où $c_1 = q_1 + 1$ puisque c_1 et q_1 sont des entiers.

Il reste à étudier le cas particulier où φ_1 est une constante K de module 1. On a alors

$$\varphi(z) \equiv \frac{\varphi(0) + Kz}{1 + K\varphi(0)z}, \qquad \text{avec} \quad \varphi(0) = \frac{1}{\theta},$$

d'où

$$\frac{C(z)}{Q(z)} \equiv \frac{\theta - z}{1 - \theta z} \frac{1 + K\theta z}{\theta + Kz}.$$

Les polynomes $C(z)$ et $Q(z)$ sont donc de même degré. Puisque $Q(z)$ est irréductible et que $C(0) = Q(0) = 1$, deux cas seulement sont possibles :

ou bien $C(z) \equiv Q(z)$, cas banal écarté dans l'énoncé du lemme;

ou bien $C(z)$ et $Q(z)$ sont premiers entre eux; mais alors $Q(z)$ est au plus du second degré et nous avons montré plus haut que cela ne peut avoir lieu si $\theta < \theta_0$.

On peut poursuivre l'étude précédente et, en supposant toujours $\theta < \theta_0$,

trouver des limitations pour les coefficients c_2, c_3, ... Faisons-le dans le cas ([11]) $C(z) \equiv P(z)$.

Rappelons la relation (1)

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n;$$

on en déduit

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n.$$

avec

$$\begin{aligned}
d_0 &= \frac{u_0}{\theta}, \\
d_1 &= \frac{1}{\theta}\left[u_1 + \left(\frac{1}{\theta} - \theta\right)u_0\right], \\
d_2 &= \frac{1}{\theta}\left[u_2 + \left(\frac{1}{\theta} - \theta\right)\left(u_1 + \frac{u_0}{\theta}\right)\right], \\
d_3 &= \frac{1}{\theta}\left[u_3 + \left(\frac{1}{\theta} - \theta\right)\left(u_2 + \frac{u_1}{\theta} + \frac{u_0}{\theta^2}\right)\right], \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

et le lemme 1 montre que $u_0 = u_1 = 1$.

On peut remarquer que, la fonction $\varphi(z)$ étant holomorphe et de module au plus égal à 1 dans $|z| \leq 1$, il en sera de même, pour tout entier positif k, de la fonction

$$\psi_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_{nk} z^n, \qquad \text{puisque} \quad \psi_k(z^k) \equiv \frac{1}{k}\sum \varphi(\zeta_j z),$$

les ζ_j étant les racines $k^{\text{ièmes}}$ de l'unité. L'inégalité classique

$$|\psi_k'(0)| \leq 1 - |\psi_k(0)|^2$$

donne

$$|d_k| \leq 1 - |d_0|^2.$$

Si l'on applique ce résultat pour $k = 2$ et 3, on obtient aussitôt

$$(21) \qquad \frac{1}{\theta}\left(\theta - \frac{1}{\theta}\right) \leq u_2 \leq \left(\theta - \frac{1}{\theta}\right)\left(2 + \frac{1}{\theta}\right),$$

$$(22) \qquad \left(\theta - \frac{1}{\theta}\right)\left(u_2 - 1 + \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\right) \leq u_3 \leq \left(\theta - \frac{1}{\theta}\right)\left(u_2 + 1 + \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\right).$$

Ces inégalités peuvent être améliorées en suivant un algorithme classique que nous ne ferons qu'amorcer : on forme la fonction $\varphi_1(z)$, déjà utilisée, et l'on exprime

$$|\varphi_1'(0)| \leq 1 - |\varphi_1(0)|^2,$$

([11]) Il peut sembler que ce soit là un cas très particulier. Il n'en est rien, car nous montrerons plus loin que, pour $\theta < \theta_0$, le seul polynome $C(z)$ satisfaisant aux conditions du lemme 1 est le polynome $P(z)$, le cas banal $C(z) \equiv Q(z)$ étant écarté.

ce qui conduit à une double inégalité plus précise que (21); nous n'en retiendrons qu'une partie, à savoir

$$d_2 \leq 1 - d_0^2 - \frac{d_1^2}{1 - d_0},$$

soit

$$(23) \qquad u_2 \leq \left(\theta - \frac{1}{\theta}\right)\left(2 + \frac{1}{\theta}\right) - \frac{1}{\theta - 1}\left(1 + \frac{1}{\theta} - \theta\right)^2 = \frac{\theta^3 - \theta^2 - 1}{\theta(\theta - 1)} + 2.$$

Le polynome $1 + z^2 - z^3$, présente un zéro réel et un seul, θ^*, qui est supérieur à 1; ses deux autres zéros sont par suite imaginaires conjugués et de module inférieur à 1. Le nombre θ^* appartient donc à S. Par simple substitution, on s'assure que $\theta^* < \theta_0$.

Pour $\theta < \theta_0$, la double inégalité (21) entraîne

$$0 < u_2 < 2 + \frac{1}{\theta} < 3,$$

donc $u_2 = 1$ ou $u_2 = 2$; la relation (23) montre que seul le cas $u_2 = 1$ se réalise si $\theta < \theta^*$. Pour $u_2 = 1$, la double inégalité (22) entraîne

$$0 < u_3 \leq 2\theta + 1 - \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^3} < 2\theta_0 + 1 - \frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_0^2} - \frac{1}{\theta_0^3} = 3,$$

donc $u_3 = 1$ ou $u_3 = 2$; tandis que pour $u_2 = 2$, la double inégalité (22) entraîne

$$1 < u_3 \leq 3\theta + 1 - \frac{2}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^3} < 3\theta_0 + 1 - \frac{2}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_0^2} - \frac{1}{\theta_0^3} = 4,$$

donc $u_3 = 2$ ou $u_3 = 3$. Résumons ces résultats :

LEMME 2. — *Les nombres* θ *de* S *qui sont inférieurs à* θ_0, *se répartissent en deux familles; pour la première famille, on a*

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = 1 + z + z^2 + u_3 z^3 + \ldots, \qquad \textit{avec} \quad u_3 = 1 \quad \textit{ou} \quad 2;$$

pour la seconde famille, on a

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = 1 + z + 2z^2 + u_3 z^3 + \ldots, \qquad \textit{avec} \quad u_3 = 2 \quad \textit{ou} \quad 3.$$

Les nombres θ *inférieurs à* θ^* *appartiennent à la première famille.*

Étude d'une famille particulière de nombres θ.

On peut déterminer aisément tous les nombres θ de la première famille du lemme 2. En effet, de

$$Q(z) \equiv 1 + q_1 z + q_2 z^2 + \ldots,$$

on déduit alors

$$P(z) \equiv 1 + (q_1 + 1)z + (q_2 + q_1 + 1)z^2 + \ldots,$$

d'où

$$(1-z^2)\,P(z)-(1+z-z^2)\,Q(z)\equiv z^2+\dots.$$

D'après le théorème de Rouché (puisque $|1-z^2|<|1+z-z^2|$ sur $|z|=1$), le premier membre a, dans $|z|<1$, deux zéros; l'expression du second membre montre que ceux-ci sont confondus en $z=0$ et que les autres zéros ont un produit des modules au plus égal à 1; ces derniers ne peuvent donc être situés que sur $|z|=1$; comme le premier membre ne peut s'annuler sur $|z|=1$, on en conclut que ces autres zéros n'existent pas; d'où

$$(1-z^2)\,P(z)-(1+z-z^2)\,Q(z)\equiv z^2.$$

Si, dans cette identité, on change z en $\frac{1}{z}$ et qu'on multiplie par $-\varepsilon z^{s+2}$, on obtient

$$(1-z^2)\,Q(z)-(1-z-z^2)\,P(z)\equiv-\varepsilon z^s.$$

Des deux dernières relations, on tire

$$\begin{aligned}(24)\qquad P(z)&\equiv 1-z^2-\varepsilon z^{s-2}(1+z-z^2),\\ Q(z)&\equiv 1-z-z^2-\varepsilon z^{s-2}(1-z^2)\end{aligned}$$

et l'on devra avoir $s>2$. Le théorème de Rouché permet de vérifier que $Q(z)$ a bien un zéro et un seul intérieur au cercle unité; de $Q(0)=1$, $Q(1)=-1$, on déduit que ce zéro est compris entre 0 et 1. Le polynome $P(z)$ défini par (24) a donc pour zéro un nombre θ de l'ensemble S.

En formant $P(\theta_0)$, on voit que ce nombre θ est inférieur à θ_0 si $\varepsilon=-1$. Plaçons-nous dans ce cas et désignons par θ_{s-2} le nombre θ qui est zéro du polynome (24). Par substitution, on voit que θ_{s-2} croît avec s et que $\theta_3<\theta^*<\theta_4$. La dernière propriété énoncée dans le lemme 2 entraîne donc la proposition suivante :

Les quatre plus petits éléments de S *sont* $\theta_1<\theta_2<\theta_3<\theta^*$, *où*

θ_1	*est racine de*	$1+z-z^3=0,$
θ_2	» »	$1+z^3-z^4=0,$
θ_3	» »	$1-z^2+z^3+z^4-z^5=0,$
θ^*	» »	$1+z^2-z^3=0.$

Recherche du plus petit élément de S′.

Nous avons vu que $\theta_0=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est un élément de S′. Nous allons montrer maintenant qu'un nombre θ inférieur à θ_0 ne peut appartenir à S′. Soient $P(z)$ et $Q(z)$ les polynomes associés à θ; en vertu du théorème 1, il nous suffira de prouver qu'il n'existe pas de polynome $A(z)$ à coefficients entiers tel que $|A(z)|\leq|Q(z)|$ sur $|z|=1$, l'égalité n'ayant pas lieu partout. Après quelques

généralités, nous démontrerons l'impossibilité de l'existence d'un tel polynome $A(z)$ dont le degré sera successivement supposé supérieur, inférieur et enfin égal à celui de $Q(z)$.

Généralités.

Rappelons tout d'abord que tout nombre $\theta < \theta_0$ est de degré $s \geq 3$. Dans la suite cette inégalité interviendra à plusieurs reprises sans que nous l'indiquions explicitement.

Nous prendrons $A(z)$ sous la forme

$$A(z) \equiv a_0 + a_1 z + \ldots + a_h z^h, \qquad \text{avec} \quad a_0 > 0.$$

En vertu des conditions qui lui sont imposées par le théorème 1, le polynome $A(z)$ est nécessairement distinct de $P(z)$ et dé $Q(z)$. Comme $\theta < \theta_0$, le lemme 1 montre que

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = q_1 + 1. \tag{25}$$

Le polynome

$$B(z) \equiv \varepsilon'(a_h + a_{h-1} z + \ldots + a_1 z^{h-1} + a_0 z^h) \equiv \varepsilon' z^h A\left(\frac{1}{z}\right),$$

où $\varepsilon' = \pm 1$ est tel que $\varepsilon' a_h > 0$, vérifie aussi $|B(z)| \leq |Q(z)|$ sur $|z| = 1$. Le lemme 1 donne donc encore

$$\varepsilon' a_h = 1, \qquad \varepsilon' a_{h-1} = q_1 + 1. \tag{26}$$

Enfin, le polynome $P(z)$ vérifie $|P(z)| = |Q(z)|$ sur $|z| = 1$; donc, en vertu du lemme 1, on a aussi

$$\varepsilon q_s = 1, \qquad \varepsilon q_{s-1} = q_1 + 1, \tag{27}$$

d'où

$$Q(z) \equiv 1 + q_1 z + q_2 z^2 + \ldots + q_{s-2} z^{s-2} + \varepsilon(q_1 + 1) z^{s-1} + \varepsilon z^s. \tag{28}$$

Posons alors

$$A(z) - Q(z) \equiv z\,U(z), \qquad B(z) - Q(z) \equiv z\,V(z). \tag{29}$$

Les relations (25) et (26) montrent que $U(0) = V(0) = 1$.

Puisque, sur $|z| = 1$, on a $|A(z)| \leq |Q(z)|$ et $|B(z)| \leq |Q(z)|$, il résulte du théorème de Rouché que, si $|\rho| < 1$, les équations $\rho A(z) - Q(z) = 0$ et $\rho B(z) - Q(z) = 0$ ont exactement autant de racines dans $|z| < 1$ que $Q(z) = 0$, c'est-à-dire *une* racine. En raison de la continuité des racines de ces équations quand $\rho \to 1$, on voit que les polynomes (29) ont au plus un zéro dans $|z| < 1$. Or, ces polynomes s'annulent effectivement pour $z = 0$. Les modules des zéros des polynomes $U(z)$ et $V(z)$ sont donc tous au moins égaux à 1 ; par suite leur produit est au moins égal à 1. D'autre part, ce produit est l'inverse d'un entier;

il est donc égal à 1 et tous les zéros de $U(z)$ et de $V(z)$ se trouvent sur $|z|=1$. On a, par conséquent,

$$(30)\quad U(z)\equiv\varepsilon''z^{u}U\left(\frac{1}{z}\right),\qquad V(z)\equiv\varepsilon'''z^{v}V\left(\frac{1}{z}\right),\qquad \text{avec}\quad \varepsilon''=\pm 1,\quad \varepsilon'''=\pm 1,$$

u et v étant les degrés de U et V.

Lemme 3. — *Les zéros de* $U(z)$ *et de* $V(z)$ *sont tous simples.*

En effet, pour $|\rho|<1$ et $|z|=1$,

$$(31)\qquad |\arg(\rho A-Q)-\arg Q|<\frac{\pi}{2}.$$

Si $U(z)=0$ a une racine ζ d'ordre 2 au moins, deux racines au moins de $\rho A-Q=0$ tendent vers ζ quand $\rho\to 1$. Ces racines sont toutes deux dans la région $|z|>1$, car la seule racine de $\rho A-Q=0$ dans $|z|\leq 1$ tend vers zéro. Au voisinage de cette valeur ζ, l'argument de $\rho A-Q$, pour ρ voisin de 1, variera au moins d'une quantité voisine de 2π. Au contraire, $\arg Q(z)$ variera très peu. Il y a donc contradiction avec l'inégalité (31).

Signalons enfin le résultat suivant :

Lemme 4. — *L'équation* $Q(z)\pm z^{m}P(z)=0$, *où* m *est un entier positif ou négatif possède au moins* $|m+s-2|$ *racines distinctes sur* $|z|=1$.

En effet, $\left|\frac{z^{m}P}{Q}\right|=1$ sur $|z|=1$; si $\arg z$ augmente de 2π, $\arg\left(\frac{z^{m}P}{Q}\right)$ augmente de $(m+s-2)2\pi$ et prend donc au moins $|m+s-2|$ fois une valeur déterminée, en particulier la valeur zéro ou π.

Étude du cas $h>s$.

D'après (29), U et V sont de degré $h-1$ et $\varepsilon''=\varepsilon'''=\varepsilon'$. Le changement de z en $\frac{1}{z}$ dans (29) donne, après multiplication par $\varepsilon' z^{h}$,

$$B(z)-\varepsilon\varepsilon' z^{h-s}P(z)\equiv U(z),\qquad A(z)-\varepsilon\varepsilon' z^{h-s}P(z)\equiv V(z).$$

En ajoutant ces relations aux relations (29), on obtient

$$A+B-Q-\varepsilon\varepsilon' z^{h-s}P\equiv(1+z)U\equiv(1+z)V,$$

d'où

$$U\equiv V\qquad\text{et}\qquad A-Q\equiv zU\equiv zV\equiv z(A-\varepsilon\varepsilon' z^{h-s}P)$$

et enfin

$$A\equiv\frac{Q-\varepsilon\varepsilon' z^{h-s+1}P}{1-z}.$$

L'équation $Q+\varepsilon\varepsilon' z^{h-s+1}P=0$, d'après le lemme 4, a au moins

$|(h-s+1)+s-2|=h-1$ racines ζ distinctes sur $|z|=1$. Pour une telle valeur ζ, on a

$$A(\zeta)=\frac{2}{1-\zeta}Q(\zeta);$$

or, $|A(\zeta)|\leq|Q(\zeta)|$, donc $\zeta=-1$ et $h-1\leq 1$. Mais $h\leq 2$ est incompatible avec l'hypothèse $h>s\geq 3$.

Étude du cas $h<s$.

D'après (29), U et V sont alors de degrés $s-1$ et $\varepsilon''=\varepsilon'''=-\varepsilon$. Le changement de z en $\frac{1}{z}$ dans (29) donne, après multiplication par $-\varepsilon z^s$,

$$P(z)-\varepsilon\varepsilon' z^{s-h}B(z)\equiv U(z),\qquad P(z)-\varepsilon\varepsilon' z^{s-h}A(z)\equiv V(z).$$

En retranchant de ces relations les relations (29) multipliées par $\varepsilon\varepsilon' z^{s-h}$, on obtient

$$P-\varepsilon\varepsilon' z^{s-h}(A+B-Q)\equiv(1-\varepsilon\varepsilon' z^{s-h+1})U\equiv(1-\varepsilon\varepsilon' z^{s-h+1})V,$$

d'où

$$U\equiv V \quad\text{et}\quad A-Q\equiv zU\equiv zV\equiv z(P-\varepsilon\varepsilon' z^{s-h}A) \tag{32}$$

et enfin

$$A\equiv\frac{Q+zP}{1+\varepsilon\varepsilon' z^{s-h+1}}. \tag{33}$$

L'équation $Q-zP=0$ a, d'après le lemme 4, *au moins* $s-1$ racines distinctes ζ sur $|z|=1$. Comme

$$|A(\zeta)|=\left|\frac{2}{1+\varepsilon\varepsilon'\zeta^{s-h+1}}\right||Q(\zeta)|\leq|Q(\zeta)|,$$

on a

$$1-\varepsilon\varepsilon'\zeta^{s-h+1}=0$$

pour toutes ces racines; donc $s-h+1\geq s-1$, c'est-à-dire $h\leq 2$, et toutes les racines de module 1 de $Q-zP=0$ sont aussi racines de $1-\varepsilon\varepsilon' z^{s-h+1}=0$.

On a d'ailleurs, d'après (32),

$$Q-zP\equiv A-zU-z(\varepsilon\varepsilon' z^{s-h}A+U)\equiv A(1-\varepsilon\varepsilon' z^{s-h+1})-2zU.$$

Toutes les racines de module 1 de $Q-zP=0$, sont donc racines de $U=0$. Or, U est de degré $s-1$; il en résulte que $Q-zP$ a *exactement* $s-1$ zéros distincts de module 1. Examinons successivement les trois cas $h=2, 1, 0$.

1° *Étude de $h=2$.* — Ici $Q-zP$ est divisible par $1-\varepsilon\varepsilon' z^{s-1}$ et d'autre part, d'après (33), $Q+zP\equiv(1+\varepsilon\varepsilon' z^{s-1})A$. Par identification des coefficients des termes constants, des termes en z et des termes en z^{s+1}, on obtient

$$Q-zP\equiv(1-\varepsilon\varepsilon' z^{s-1})[1+(q_1-1)z+\varepsilon' z^2],$$
$$Q+zP\equiv(1+\varepsilon\varepsilon' z^{s-1})[1+(q_1+1)z+\varepsilon' z^2].$$

On en tire

$$Q \equiv 1 + q_1 z + \varepsilon' z^2 + \varepsilon\varepsilon' z^s, \qquad \text{d'où} \qquad \varepsilon' = +1.$$

L'inégalité $Q(1) < 0$, soit $Q(1) \leq -1$, entraîne $q_1 \leq -3 - \varepsilon \leq -2$. D'autre part, en vertu de (28), le coefficient de z^{s-1} dans Q doit être $\varepsilon(q_1+1)$. Pour $s \geq 4$, on a donc $\varepsilon(q_1+1) = 0$, d'où $q_1 = -1$, en contradiction avec $q_1 \leq -2$. Pour $s = 3$, on a $\varepsilon(q_1+1) = 1$, d'où $q_1 = -1+\varepsilon$, ce qui exige $\varepsilon = -1$ et $q_1 = -2$; finalement,

$$Q(z) \equiv 1 - 2z + z^2 - z^3 \equiv (1 - z - z^2)(1 - z + z^2 - z^3) - z^5,$$

d'où

$$Q\left(\frac{1}{\theta_0}\right) = -\theta_0^{-5} < 0,$$

en contradiction avec l'hypothèse $\theta < \theta_0$.

2° *Étude de* $h = 1$. — Ici $A \equiv 1 + \varepsilon' z$, donc, d'après (25), $\varepsilon' = q_1 + 1$, d'où $q_1 = -1 + \varepsilon'$. Soit η celui des zéros de $1 - \varepsilon\varepsilon' z^s$ qui n'est pas zéro de $Q - zP$; η est réel (donc $\eta = \pm 1$), sinon son imaginaire conjugué, lui non plus, ne serait pas zéro de $Q - zP$.

On a alors

$$(1 - \eta z)(Q - zP) \equiv (1 - \varepsilon\varepsilon' z^s)[1 - (\eta - q_1 + 1)z - \varepsilon'\eta z^2]$$

et, d'après (33),

$$(1 - \eta z)(Q + zP) \equiv (1 + \varepsilon\varepsilon' z^s)[1 - (\eta - q_1 - 1)z - \varepsilon'\eta z^2].$$

On en tire

$$(1 - \eta z)Q \equiv 1 - (\eta - q_1)z - \varepsilon'\eta z^2 + \varepsilon\varepsilon' z^{s+1},$$

d'où, en identifiant les termes de plus haut degré, $\varepsilon' = -\eta$. En tenant compte aussi de $q_1 = -1 + \varepsilon'$, la dernière identité s'écrit

$$(1 + \varepsilon' z)\,Q(z) \equiv 1 + (2\varepsilon' - 1)z + z^2 + \varepsilon\varepsilon' z^{s+1}.$$

Pour $z = \varepsilon'$, on obtient

$$2Q(\varepsilon') = 4 - \varepsilon' + \varepsilon(\varepsilon')^{s+2} > 0$$

et, par suite, $\varepsilon' = -1$. Il en résulte

$$(1 - z)\,Q(z) \equiv 1 - 3z + z^2 - \varepsilon z^{s+1} \equiv (1 - z - z^2)(1 - 2z) - 2z^3 - \varepsilon z^{s+1}.$$

La substitution de $\frac{1}{\theta_0}$ donne

$$\left(1 - \frac{1}{\theta_0}\right) Q\left(\frac{1}{\theta_0}\right) = -2\theta_0^{-3} - \varepsilon\theta_0^{-(s+1)} < 0,$$

en contradiction avec l'hypothèse $\theta < \theta_0$.

3° *Étude de* $h=0$. — Ici $A\equiv 1$, donc $\varepsilon'=+1$ et, d'après (25), $q_1+1=0$, soit $q_1=-1$. Le binome $1-\varepsilon z^{s+1}$ a deux zéros non communs avec $Q-zP$; ce sont donc les zéros d'un polynome à coefficients entiers $1+cz+\eta_1 z^2$, avec $\eta_1=\pm 1$, et l'on a

$$(1+cz+\eta z^2)(Q-zP)\equiv(1-\varepsilon z^{s+1})[1+(c-2)z+\eta z^2].$$

D'autre part, (33) donne

$$(1+cz+\eta z^2)(Q+zP)\equiv(1+\varepsilon z^{s+1})(1+cz+\eta z^2).$$

On en tire

$$(1+cz+\eta z^2)Q\equiv 1+(c-1)z+\eta z^2+\varepsilon z^{s+2}.$$

L'égalité des coefficients de z^{s+1} donne $\varepsilon\eta_1(q_1+1)+\varepsilon c=0$, d'où, comme $q_1=-1$, $c=0$; l'égalité des coefficients de z^{s+2} donne $\eta_1=1$. Pour $z=1$, il vient alors $2Q(1)=1+\varepsilon$, en contradiction avec le fait que $Q(1)<0$.

Étude du cas $h=s$.

Les relations (29) montrent que les degrés u et v de U et V ne dépassent pas $s-1$. Si l'on avait $u=s-1$, les coefficients des termes en z^s vérifieraient $\varepsilon'-\varepsilon=\varepsilon''$, ce qui est impossible. Donc $u\leq s-2$ et $\varepsilon'=\varepsilon$. Les relations (25), (26) et (27) montrent alors que le coefficient de z^{s-2} dans U est nul, donc que $u\leq s-3$. On voit de même que $v\leq s-3$.

Le changement de z en $\frac{1}{z}$ dans les relations (29) donne, après multiplication par εz^s et en tenant compte de ce que $\varepsilon'=\varepsilon$,

$$B(z)-P(z)\equiv\varepsilon\varepsilon'' z^{s-u-1}U(z),\qquad A(z)-P(z)\equiv\varepsilon\varepsilon''' z^{s-v-1}V(z),$$

soit

$$B-P\equiv zXU,\qquad A-P\equiv zYV, \tag{34}$$

en posant

$$X(z)\equiv\varepsilon\varepsilon'' z^{s-u-2},\qquad Y(z)\equiv\varepsilon\varepsilon''' z^{s-v-2}. \tag{35}$$

On a alors, en ajoutant les relations (29) et (34),

$$A+B-Q-P\equiv z(1+X)U\equiv z(1+Y)V,$$

d'où

$$(1+X)U\equiv(1+Y)V. \tag{36}$$

Il existe, par suite, deux polynomes $U^*(z)$ et $V^*(z)$, premiers entre eux, avec $U^*(0)=V^*(0)=1$, et deux polynomes $W(z)$ et $D(z)$ tels que

$$U\equiv U^*W,\qquad V\equiv V^*W,\qquad 1+X\equiv V^*D,\qquad 1+Y\equiv U^*D. \tag{37}$$

D'un autre côté, les relations (29) et (34) donnent

$$AB-PQ\equiv zV[zU+(1+Y)Q],$$

d'où, en tenant compte des relations (37),

$$AB - PQ \equiv zU^*V^*W(zW + DQ). \tag{38}$$

Puisque

$$B(z) \equiv \varepsilon z^s A\left(\frac{1}{z}\right) \qquad \text{et} \qquad P(z) \equiv \varepsilon z^s Q\left(\frac{1}{z}\right),$$

on a, pour $|z| = 1$ $\left(\text{car alors } z \text{ et } \frac{1}{z} \text{ sont imaginaires conjugués}\right)$,

$$AB - PQ \equiv \varepsilon z^s(|A|^2 - |Q|^2). \tag{39}$$

Or, $|A| \leq |Q|$ sur $|z| = 1$; le premier membre de (39), quand il n'est pas nul, a donc même argument que $(-\varepsilon z^s)$. Il en résulte, en particulier, que les zéros de $AB - PQ$ situés sur $|z| = 1$ ont une multiplicité paire.

Enfin, d'après le lemme 3, les zéros de U et V qui sont, comme on sait, tous sur $|z| = 1$, sont simples. Il en est de même, d'après (37), des zéros de U^*, V^* et W; de plus ces zéros sont tous différents. Les zéros de $AB - PQ$ situés sur $|z| = 1$ ayant une multiplicité paire, (38) montre que $zW + DQ$ est divisible par U^*V^*W. Il existe donc deux polynomes $D^*(z)$ et $G(z)$ avec $D^*(0) = G(0) = 1$ tels que

$$D \equiv D^*W \qquad \text{et} \qquad z + D^*Q \equiv U^*V^*G. \tag{40}$$

La relation (38) s'écrit alors

$$AB - PQ \equiv zU^{*2}V^{*2}W^2G. \tag{41}$$

En tenant compte de (39), (37) et (36), on en déduit que, pour $|z| = 1$,

$$\varepsilon z^s(|A|^2 - |Q|^2) = zUV\frac{(1+X)(1+Y)}{D^2}G = z\left[\frac{U(1+X)}{D}\right]^2 G. \tag{42}$$

Les identités (30) et (35) entraînent

$$U(z)[1+X(z)] \equiv \varepsilon'' z^u U\left(\frac{1}{z}\right)\varepsilon\varepsilon'' z^{s-u-2}\left[1+X\left(\frac{1}{z}\right)\right] \equiv \varepsilon z^{s-2}U\left(\frac{1}{z}\right)\left[1+X\left(\frac{1}{z}\right)\right].$$

La relation (42) peut donc se mettre sous la forme

$$\varepsilon z^s D^2(|A|^2 - |Q|^2) = \varepsilon z^{s-1}|U(1+X)|^2 G \qquad \text{sur} \quad |z| = 1.$$

Nous en déduisons que

$$\arg G = \arg(-zD^2) \qquad \text{sur} \quad |z| = 1. \tag{43}$$

Lemme 5. — *Le polynome* $D(z)$ *ne peut pas se réduire à une constante.*

En effet, si $D(z)$ était une constante, celle-ci aurait pour valeur $D(0) = 1$; les relations (40) et (37) entraîneraient successivement

$$D^* \equiv W \equiv 1, \qquad U^* \equiv U, \qquad V^* \equiv V, \qquad 1 + X \equiv V, \qquad 1 + Y \equiv U$$

et, enfin, d'après (40),

$$z + Q \equiv UVG \equiv (1+X)(1+Y)G. \tag{44}$$

Puisque $1+X \equiv V$, on a $u+v=s-2$; d'après (44), G est donc du second degré, soit $G(z) \equiv 1 + gz + \varepsilon\varepsilon''\varepsilon'''z^2$. Comme $D \equiv 1$, la relation (43) montre que, sur $|z|=1$, on a $\arg G = \arg(-z)$, donc $g + \frac{1}{z} + \varepsilon\varepsilon''\varepsilon'''z$ réel, négatif ou nul. Il en résulte que $\varepsilon\varepsilon''\varepsilon''' = +1$ et $g \leq -2$. Par suite, (44) s'écrit

$$Q(z) \equiv [1+X(z)][1+Y(z)](1+gz+z^2) - z. \tag{45}$$

Pour $z = \frac{1}{\theta_0}$, on a

$$0 < 1 + X\left(\frac{1}{\theta_0}\right) \leq 1 + \frac{1}{\theta_0} = \theta_0$$

et, de même,

$$0 < 1 + Y\left(\frac{1}{\theta_0}\right) \leq \theta_0.$$

Enfin $G\left(\frac{1}{\theta_0}\right) \leq \left(1 - \frac{1}{\theta_0}\right)^2 = \theta_0^{-1}$, car $g \leq -2$. De (45) on déduit

$$Q\left(\frac{1}{\theta_0}\right) \leq \theta_0^{-2} - \theta_0^{-1} < 0,$$

en contradiction avec $\theta < \theta_0$. Le lemme 5 est ainsi établi.

Par définition, le polynome $D(z)$ est le P. G. C. D. des deux binomes

$$1 + X \equiv 1 + \varepsilon\varepsilon'' z^{s-u-2} \qquad \text{et} \qquad 1 + Y \equiv 1 + \varepsilon\varepsilon''' z^{s-v-2}.$$

L'application de l'algorithme d'Euclide montre que $D(z)$ est de la forme $D(z) \equiv 1 + \eta z^d$ où d entier ≥ 1 et $\eta = \pm 1$.

Posons

$$D(z) \equiv 1 - Z(z), \qquad \text{avec} \quad Z(z) \equiv -\eta z^d. \tag{46}$$

Les relations (37) entraînent alors

$$1 + X \equiv V^* D \equiv 1 - Z^n, \qquad 1 + Y \equiv U^* D \equiv 1 - Z^m, \tag{47}$$

où $m \geq 1$, $n \geq 1$, sont des entiers.

Revenant à (40), nous définirons la fraction rationnelle $F(z)$ par

$$zF(z) \equiv z + D^*(z)Q(z) \equiv U^*(z)V^*(z)G(z). \tag{48}$$

De (46), nous tirons $D^2 \equiv -Z\left(2 - Z - \frac{1}{Z}\right)$, d'où, d'après (43),

$$\arg G = \arg(zZ) \qquad \text{sur} \quad |z|=1. \tag{49}$$

Les relations (48) et (49) montrent que

$$\arg F = \arg(U^*V^*Z), \qquad \text{sur} \quad |z|=1. \tag{50}$$

D'autre part, des identités (46) et (47) on tire

$$U^* \equiv \frac{1 - Z^m}{1 - Z} \qquad \text{et} \qquad V^* \equiv \frac{1 - Z^n}{1 - Z}.$$

Pour $Z = 1$, c'est-à-dire pour les zéros de $D(z)$, les polynomes U^* et V^* prennent donc les valeurs m et n. Compte tenu de (50), nous en déduisons le résultat suivant :

Lemme 6. — *Pour tous les zéros de* $D(z)$, *on a* $U^* = m$, $V^* = n$ *et* F *est réel positif ou nul.*

Faisons alors décrire à z, dans le sens direct, le cercle $|z| = 1$. D'après (46), $\arg Z$ est croissant. Il en est de même de

$$\arg(U^*) = \arg\left(\frac{1 - Z^m}{1 - Z}\right) \qquad \text{et} \qquad \arg(V^*) = \arg\left(\frac{1 - Z^n}{1 - Z}\right),$$

du moins sur les arcs où ces derniers arguments sont continus. Il en sera donc ainsi de $\arg F(z)$. Soit (Γ) la courbe décrite par $w = F(z)$; elle est continue et le point $w = F(z)$ ne peut traverser le demi-axe réel positif que du bas vers le haut.

La relation (48) montre que, sur $|z| = 1$, les seuls nombres pour lesquels $F(z) = 1$ sont les zéros δ_i de $D^*(z)$, car $Q(z) \neq 0$. Soit alors (γ_ε) la courbe déduite du cercle $|z| = 1$, en remplaçant les arcs intérieurs aux cercles de rayon ε, centrés aux divers points δ_i, par les arcs de ces petits cercles situés dans $|z| \leq 1$. Lorsque z parcourt la courbe (γ_ε) dans le sens direct, $w = F(z)$ décrira une courbe (Γ_ε) ne passant pas par le point $w = 1$ et ne différant de (Γ) que dans le voisinage de ce point.

De plus, si ε croît à partir de la valeur zéro, la courbe (Γ_ε), d'abord confondue avec (Γ), se déplace vers sa gauche (relativement au sens dans lequel elle est parcourue); de sorte que la partie $w > 1$ de l'axe réel sera toujours coupée en allant du bas vers le haut, et elle le sera le même nombre n de fois par (Γ_ε) que par (Γ) si ε est assez petit. Or, dans le domaine intérieur à (γ_ε), la fonction $\frac{D^*Q}{z} \equiv F(z) - 1$ a un pôle $(z = 0)$ et un zéro $\left(z = \frac{1}{\theta}\right)$; il en résulte que $\arg[F(z) - 1]$ revient à sa valeur initiale quand z décrit (γ_ε); on a donc $n = 0$. Par conséquent, (Γ) ne peut couper l'axe réel en un point d'abscisse supérieure à 1.

Or, d'après le lemme 6 et la relation (40), $F(z)$ est réel positif ou nul pour tous les zéros ζ de $W(z)$, ces derniers zéros étant distincts des zéros δ_i de $D^*(z)$. Donc $F(\zeta) \neq 1$, et finalement $0 \leq F(\zeta) < 1$. Mais ζ étant zéro de W, on a $D(\zeta) = 0$, donc, d'après le lemme 6,

$$U^*(\zeta) = m \qquad \text{et} \qquad V^*(\zeta) = n.$$

La relation (48) donne alors

$$\zeta F(\zeta) = mn G(\zeta), \qquad \text{d'où} \qquad |G(\zeta)| = \frac{1}{mn} F(\zeta) < 1.$$

Considérons un zéro ζ_1 de W et tous ses conjugués ζ_j; le nombre $\left|\prod G(\zeta_j)\right|$ est inférieur à 1; c'est un entier rationnel, car ζ_1 est entier algébrique; donc il est nul. Par suite, pour un certain indice j_0, on a $G(\zeta_{j_0}) = 0$. On en conclut que le polynome $G(z)$ est divisible par le polynome irréductible ayant pour zéro ζ_{j_0}, donc aussi tous les ζ_j. Il en résulte que $G(z)$ est divisible par $W(z)$.

Mais d'après (41), $G(z)$ est un diviseur de $AB - PQ$; ce dernier polynome n'a, sur $|z| = 1$, que des zéros de multiplicité paire. D'après le lemme 3 et l'identité (37), les zéros de $W(z)$ sont tous simples et situés sur $|z| = 1$; $G(z)$ est donc divisible par $W^2(z)$. Les relations (40) et (37) donnent alors

$$z + D^* Q \equiv U^* V^* G \equiv U^* V^* W^2 H = UVH, \tag{51}$$

où $H(z)$ est un polynome avec $H(0) = 1$.

Montrons que $D^*(z)$ ne peut se réduire à une constante. En effet, si $D^*(z)$ était une constante, celle-ci aurait pour valeur $D^*(0) = 1$. On aurait, d'après (40), $D \equiv W$; d'après (37),

$$U = U^* W \equiv U^* D \equiv 1 + Y; \qquad V \equiv V^* W \equiv V^* D = 1 + X$$

et, d'après (51),

$$z + Q \equiv UVH, \qquad G = W^2 H \equiv D^2 H.$$

Le polynome H serait donc du second degré et la relation (43) montrerait que $\arg H = \arg(-z)$ sur $|z| = 1$. La démonstration s'achève alors comme celle du lemme 5.

Pour poursuivre l'étude, nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME 7. — *Soient* $\eta_{1}, \ldots, \eta_{n}$ *des nombres de module* 1 *; alors* $\left|\prod_{k \neq h} (\eta_h - \eta_k)\right| \leq n^n$.

En effet, on peut toujours supposer les $\eta_1, \ldots, \eta_n$ rangés dans l'ordre de leurs indices sur le cercle $|z| = 1$. Soit m un entier fixe avec $1 \leq m \leq n-1$; posons

$$\eta_{n+k} = \eta_k \qquad \text{et} \qquad 2\omega_{m,h} = \arg(\eta_{h+m}) - \arg(\eta_h), \qquad \text{avec} \quad 0 \leq \omega_{m,h} < \pi.$$

On a

$$|\eta_{h+m} - \eta_h| = 2 \sin \omega_{m,h}.$$

Posons encore

$$\rho_m = \prod_{h=1}^{n} |\eta_{h+m} - \eta_h| = 2^n \sin(\omega_{m,1}) \ldots \sin(\omega_{m,n});$$

alors

$$\operatorname{Log}\rho_m = n\operatorname{Log}2 + \sum_{h=1}^{n} \operatorname{Log}\sin(\omega_{m,h}).$$

La fonction $y = -\operatorname{Log}\sin x$ est convexe pour $0 < x < \pi$, car $y'' = \frac{1}{\sin^2 x} > 0$. On a donc

$$\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n} \operatorname{Log}\sin(\omega_{m,h}) \leq \operatorname{Log}\sin\left(\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\omega_{m,h}\right) = \operatorname{Log}\sin\frac{m\pi}{n}.$$

Par suite

$$\rho_m \leq 2^n\left(\sin\frac{m\pi}{n}\right)^n \qquad \text{et} \qquad \left|\prod_{k\neq h}(\eta_h - \eta_k)\right| = \rho_1\rho_2\ldots\rho_{n-1} \leq \rho^n,$$

avec

$$\rho = 2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

Or

$$\rho = \prod_{m=1}^{n-1}\left[i\left(e^{-i\frac{m\pi}{n}} - e^{i\frac{m\pi}{n}}\right)\right] = \prod_{m=1}^{n-1}(1-\zeta^m), \qquad \text{où} \quad \zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}.$$

Ce dernier produit est égal à la valeur pour $z=1$ de la dérivée de $z^n - 1$, c'est-à-dire à n; ce qui démontre le lemme.

Les relations (37) et (40) donnent

$$1 + Y \equiv 1 + \varepsilon\varepsilon''' z^{s-v-2} \equiv U^* D \equiv U^* D^* W \equiv UD^*.$$

Soient $a \geq 1$ le degré et δ_i les zéros de $D^*(z)$; on a $s - v - 2 = u + a \geq 1$. Soient ξ_j les zéros de $U(z)$, (si $u = 0$, il n'y a pas de ξ_j). Les nombres δ_i et ξ_j sont tous différents et $|\delta_i| = |\xi_j| = 1$, car ils constituent l'ensemble des zéros de $1 + Y$. On a

$$\prod_i (z - \delta_i)\prod_j (z - \xi_j) = \pm(1 + \varepsilon\varepsilon''' z^{s-v-2}) \tag{52}$$

(si $u = 0$, le facteur $\prod_j (z - \xi_j)$ est à remplacer par 1). En dérivant les deux membres de (52) par rapport à z et en remplaçant ensuite z par δ_k, k étant un indice fixe, on obtient

$$\prod_{i\neq k}(\delta_k - \delta_i)\prod_j (\delta_k - \xi_j) = \pm\varepsilon\varepsilon'''(u+a)\,\delta_k^{u+a-1},$$

d'où

$$\left|\prod_{i\neq k}(\delta_k - \delta_i)\right| \cdot |U(\delta_k)| = u + a.$$

Formons le produit membre à membre de ces relations pour toutes les valeurs de k, et appliquons le lemme 7 : il vient

$$(u+a)^a = \left|\prod_{l\neq k}(\delta_k-\delta_l)\right|\left|\prod_{k=1}^{a} U(\delta_k)\right| \leq a^a \left|\prod_{k=1}^{a} U(\delta_k)\right|.$$

Or $\frac{u+a}{a} \geq 1$, l'égalité n'ayant lieu que pour $u=0$. On a donc $\left|\prod_{k=1}^{a} U(\delta_k)\right| \geq 1$, l'égalité n'ayant lieu que pour $u=0$. On verrait de même que $\left|\prod_{k=1}^{a} V(\delta_k)\right| \geq 1$, l'égalité n'ayant lieu que pour $v=0$. Enfin $H(z)$ est un polynome à coefficients entiers et les δ_k sont des entiers algébriques conjugués; $\prod_{k=1}^{a} H(\delta_k)$ est donc un entier rationnel.

Or l'égalité (51) donne, pour $z=\delta_k$, zéro de $D^*(z)$,

$$\delta_k = U(\delta_k)V(\delta_k)H(\delta_k), \qquad \text{donc} \quad 1 = \prod_{k=1}^{a} |U(\delta_k)V(\delta_k)H(\delta_k)|.$$

Les inégalités que nous venons d'obtenir montrent que cette relation exige $u=v=0$, donc

$$U(z) \equiv V(z) \equiv 1.$$

Il ne nous reste donc plus qu'à étudier le cas $U \equiv V \equiv 1$. Les relations (29), (30), (34) et (35) montrent que $\varepsilon''=\varepsilon'''=1$, que $X \equiv Y \equiv \varepsilon z^{s-2}$ et que

$$A \equiv B \equiv Q+z \equiv P+\varepsilon z^{s-1}. \tag{53}$$

Pour $k\neq 1$ et $k\neq s-1$, on a donc $q_k=\varepsilon q_{s-k}$; d'autre part rappelons la relation (27)

$$q_{s-1}=\varepsilon(q_1+1).$$

On a

$$\frac{P}{Q} = \frac{Q+z-\varepsilon z^{s-1}}{Q} = 1+z+u_2z^2+u_3z^3+\dots,$$

avec

$$u_2=-q_1; \qquad u_3=q_1^2-q_2-\varepsilon \quad \text{si} \quad s=3; \qquad u_3=q_1^2-q_2 \quad \text{si} \quad s\geq 4, \tag{54}$$

Le lemme 2 nous apprend enfin que

$$u_2=-q_1=1 \quad \text{ou} \quad 2 \qquad \text{et} \qquad u_3\leq 3. \tag{55}$$

L'inégalité $|A|\leq|Q|$ sur $|z|=1$ s'écrit $|Q+z|\leq|Q|$, donc

$$\begin{cases} \mathcal{R}\left(\dfrac{Q}{z}+\dfrac{1}{2}\right) = \mathcal{R}\left[\dfrac{1}{z}+\left(q_1+\dfrac{1}{2}\right)+q_2z+\dots+\varepsilon(q_1+1)z^{s-2}+\varepsilon z^{s-1}\right] \leq 0 \\ \text{sur} \quad |z|=1. \end{cases} \tag{56}$$

Écrivons cette relation pour tous les zéros de $1-\varepsilon z^{s-1}$ et sommons; il vient

$$q_1+\frac{1}{2}+1\leq 0, \qquad \text{d'où} \qquad q_1\leq -2.$$

Mais, d'après (55), on a $q_1=-1$ ou -2; par suite

$$q_1=-2. \tag{57}$$

De plus (54), (55) et (57) donnent alors

$$\begin{cases} \text{pour } s=3: & u_3=4-q_2-\varepsilon\leq 3, & \text{donc} \quad q_2\geq 1-\varepsilon; \\ \text{pour } s\geq 4: & u_3=4-q_2\leq 3, & \text{donc} \quad q_2\geq 1. \end{cases} \tag{58}$$

Or, si $s=3$, on a $q_2=\varepsilon(q_1+1)=-\varepsilon$ en vertu de (27) et de (57); il y a contradiction avec (58); par suite $s=3$ est impossible.

Si $s=4$, on a

$$Q(z)\equiv 1-2z+q_2z^2-\varepsilon z^3+\varepsilon z^4, \qquad \text{donc} \quad Q(1)=q_2-1\geq 0$$

d'après (58), et par suite $s=4$ est aussi impossible.

Il ne reste plus qu'à examiner $s\geq 5$. En tenant compte de (57), on peut alors écrire la relation (56) sous la forme

$$\mathcal{R}\left[\frac{1}{z}-\frac{3}{2}+\ldots+\varepsilon q_3 z^{s-4}+\varepsilon q_2 z^{s-3}-\varepsilon z^{-2}+\varepsilon z^{s-1}\right]\leq 0 \qquad \text{sur} \quad |z|=1. \tag{56 bis}$$

Cette relation, sommée pour les zéros de $1-\varepsilon z^{s-3}$ donne

$$\begin{aligned} &\text{pour } s=5: && -\frac{3}{2}+q_2+\varepsilon\leq 0, && \text{donc} \quad q_2\leq 1-\varepsilon, \\ &\text{pour } s\geq 6: && -\frac{3}{2}+q_2\leq 0, && \text{donc} \quad q_2\leq 1. \end{aligned}$$

Il en résulte, d'après (58), que

$$\text{pour } s=5: \quad q_2=1 \quad \text{ou} \quad 2, \qquad \varepsilon=-1, \tag{59}$$

$$\text{pour } s\geq 6: \quad q_2=1. \tag{60}$$

La relation (56 *bis*), sommée pour les zéros de $1+\varepsilon z^{s-4}$ donne

$$\text{pour } s=6: \quad -\frac{3}{2}-q_3-\varepsilon\leq 0, \qquad \text{donc} \quad q_3\geq -1-\varepsilon, \tag{61}$$

$$\text{pour } s=7: \quad -\frac{3}{2}-q_3+\varepsilon\leq 0, \qquad \text{donc} \quad q_3\geq -1+\varepsilon, \tag{62}$$

$$\text{pour } s\geq 8: \quad -\frac{3}{2}-q_3\leq 0, \qquad \text{donc} \quad q_3\geq -1. \tag{63}$$

Enfin, remarquons que sur $|z|=1$, la quantité

$$\left(z+1+\frac{1}{z}\right)^2\equiv z^2+2z+3+\frac{2}{z}+\frac{1}{z^2}$$

est réelle et positive ou nulle. On peut donc multiplier par cette quantité le premier membre de (56 *bis*) sous le signe $\mathcal{R}$. En sommant pour les zéros de $1-\varepsilon z^{s-1}$ l'inégalité ainsi obtenue, il vient, en tenant compte de (60),

(64) pour $s\geq 6$: $\left(2-\frac{9}{2}+2+q_3\right)+(1-2+3)\leq 0$, donc $q_3\leq -2$.

Pour $s\geq 8$, cette inégalité est en contradiction avec (63).

Il ne subsiste donc que les cas suivants :

Cas $s=5$. — On a, d'après (59), deux possibilités :

ou bien $q_2=1$; alors

$$Q(z)\equiv 1-2z+z^2-z^3+z^4-z^5\equiv(1-z-z^2)(1-z)(1+z^2+z^4)-z^7,$$

donc $Q\left(\frac{1}{\theta_0}\right)=-\theta_0^{-7}<0$ en contradiction avec $\theta<\theta_0$;

ou bien $q_2=2$; alors

$$Q(z)\equiv 1-2z+2z^2-2z^3+z^4-z^5\equiv(1-z+z^2)(1-z-z^3),$$

en contradiction avec l'irréductibilité de Q.

Cas $s=6$. — On a, d'après (60), (61) et (64),

$$q_2=1,\quad q_3=-2,\quad \varepsilon=1,$$

d'où

$$Q(z)\equiv 1-2z+z^2-2z^3+z^4-z^5+z^6\equiv(1-z-z^2)(1-z+z^2-2z^3-3z^5)-2z^6-3z^7,$$

donc $Q\left(\frac{1}{\theta_0}\right)=-2\theta_0^{-6}-3\theta_0^{-7}<0$, en contradiction avec $\theta<\theta_0$.

Cas $s=7$. — On a, d'après (60), (62) et (64),

$$q_2=1,\quad q_3=-2,\quad \varepsilon=-1,$$

d'où

$$Q(z)\equiv 1-2z+z^2-2z^3+2z^4-z^5+z^6-z^7\equiv(1-z-z^2)(1-z+z^2-2z^3+z^4-2z^5)-3z^7,$$

donc $Q\left(\frac{1}{\theta_0}\right)=-3\theta_0^{-7}<0$, en contradiction avec $\theta<\theta_0$.

Nous avons ainsi démontré que, si $\theta<\theta_0$, il n'existe pas de polynome $A(z)$ satisfaisant aux conditions du théorème 1. Le nombre $\theta_0=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est donc le plus petit élément de l'ensemble S′.

SUR

QUELQUES PROPRIÉTÉS FRONTIÈRES DES FONCTIONS HOLOMORPHES DÉFINIES PAR CERTAINS PRODUITS DANS LE CERCLE-UNITÉ

PAR MM. F. BAGEMIHL, P. ERDÖS ET W. SEIDEL.

1. C'est un fait connu qu'une fonction d'une variable complexe z, holomorphe dans le cercle-unité, ne peut pas tendre uniformément vers l'infini, lorsque z s'approche de la circonférence. Il est donc intéressant de montrer qu'il existe des fonctions holomorphes dans le cercle-unité qui tendent uniformément vers l'infini sur une suite de courbes de Jordan dont chacune contient la précédente à son intérieur. Un exemple de cette nature a été donné par Fatou ([3], p. 262) pour la fonction de Kœnigs $K(z)$ définie de la manière suivante : soit s un nombre réel, $0 < s < 1$, et soient

$$R_1(z) = \frac{z(z-s)}{1-sz}, \qquad R_n(z) = R_1(R_{n-1}(z)) \qquad (n \geq 2).$$

La suite des fonctions $\{R_n(z)\}$ tend alors uniformément vers zéro dans chaque cercle $|z| \leq \rho < 1$ et

$$K(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{R_n(z)}{s^n}.$$

On ne sait pas si la suite de courbes de Jordan, dans le cas de $K(z)$, peut être remplacée par une suite de circonférences concentriques. Lusin et Priwaloff ([5], p. 147) ont cependant construit un exemple, dans lequel ces courbes de Jordan sont des circonférences concentriques. Une simplification considérable de cet exemple a été récemment obtenue par Davydov ([7], p. 167).

Fatou a découvert de plus ces propriétés remarquables de la fonction de

Kœnigs : autour de chaque zéro z_n de $K(z)$, il existe une courbe de Jordan C_n dans $|z|<1$, telle que toutes les C_n soient extérieures l'une à l'autre et $|K(z)|\to\infty$ lorsque $|z|\to 1$ et reste extérieur aux courbes C_n([3], p. 262). On a encore ([3], p. 265).

$$\lim_{r\to 1}|K(re^{i\theta})|=\infty$$

pour presque tous les θ dans l'intervalle $0\leq\theta<2\pi$. Des exemples de fonctions jouissant de telles propriétés ont été donnés aussi par Lusin et Priwaloff ([5], p. 152 et 185).

Collingwood et Cartwright ont récemment noté ([2], p. 94) que $|K(z)|\to\infty$ sur une spirale dans $|z|<1$ s'approchant de $|z|=1$ asymptotiquement. Des exemples d'un tel comportement ont été antérieurement discutés par Valiron [8]. Valiron a démontré en outre ([1], p. 64) que $|K(z)|+|K'(z)|\to\infty$ lorsque z s'approche de la circonférence $|z|=1$ de manière quelconque.

Dans l'article présent, nous démontrons par des méthodes directes et élémentaires que la fonction

$$\prod_{j=1}^{\infty}\left\{1-\left(\frac{z}{1-\frac{1}{n_j}}\right)^{n_j}\right\}$$

pour des entiers positifs $n_j\to\infty$ convenables, jouit de toutes les propriétés ci-dessus mentionnées, certaines sous une forme plus simple ou plus précise, et aussi d'autres. Par des méthodes analogues, nous obtenons aussi des exemples, dont quelques-uns sont déjà connus et d'autres nouveaux, concernant les limites radiales des fonctions holomorphes.

2. Soit $n_k(k=1, 2, \ldots)$, une suite croissante d'entiers positifs tels que

$$\text{(A)}\qquad \lim_{k\to\infty}\frac{n_k}{n_{k-1}}=\infty, \qquad n_1>1.$$

Nous considérons le produit infini

$$\text{(1)}\qquad f(z)=\prod_{j=1}^{\infty}\left\{1-\left(\frac{z}{1-\frac{1}{n_j}}\right)^{n_j}\right\}$$

qui converge absolument et uniformément dans chaque cercle $|z|\leq\rho<1$ et définit par conséquent une fonction holomorphe dans le cercle-unité $|z|<1$ qui a n_j zéros simples sur la circonférence $|z|=1-\frac{1}{n_j}$ pour $j=1, 2, \ldots$. Autour de chaque zéro de $f(z)$ sur la circonférence $|z|=1-\frac{1}{n_j}$ $(j=1, 2, \ldots)$, nous décrivons une circonférence de rayon égal à $\frac{1}{j^2 n_j}$; nous désignerons chacune de ces n_j circonférences par γ_j, et γ_j avec son intérieur par Γ_j.

Puisqu'au plus un nombre fini de tous les Γ_j ($j=1, 2, \ldots$), peuvent empiéter les uns sur les autres, il existe un entier $j_0>0$ tel que tous les cercles Γ_j, pour $j\geq j_0$, soient disjoints. Ainsi, si l'on enlève les Γ_j, $j\geq j_0$ du cercle $|z|<1$, l'ensemble qui reste est un domaine Δ. Nous démontrons d'abord le

THÉORÈME 1. — *Lorsque z tend vers la circonférence $|z|=1$ en restant dans le domaine Δ,*

$$\lim_{|z|\to 1} |f(z)|=\infty$$

uniformément en z.

Pour le prouver, nous allons démontrer que si z_0 se trouve dans Δ suffisamment près de la circonférence $|z|=1$ et si k est l'entier pour lequel

$$1-\frac{1}{n_k}\leq |z_0|<1-\frac{1}{n_{k+1}},$$

on a l'inégalité

$$|f(z_0)|>\frac{c_1}{k^2(k+1)^2}\left(\frac{3}{4}e-1\right)^{k-1}, \tag{2}$$

où c_1, aussi bien que $c_2, \ldots, c_{12}$ dans la suite, désigne une constante positive universelle. Séparons le produit (1) en quatre produits composés de facteurs qui correspondent à $1\leq j\leq k-1$, $j=k$, $j=k+1$, $j\geq k+2$:

$$f(z)=\prod_{\nu=1}^{4} P_\nu(z), \tag{3}$$

et déterminons la borne inférieure de chacun des produits $P_\nu(z)$ au point $z=z_0$.

Tout d'abord, nous avons

$$|P_1(z_0)|\geq\prod_{j=1}^{k-1}\left\{\left(\frac{|z_0|}{1-\frac{1}{n_j}}\right)^{n_j}-1\right\}\geq\prod_{j=1}^{k-1}\left\{\left(\frac{1-\frac{1}{n_k}}{1-\frac{1}{n_j}}\right)^{n_j}-1\right\}. \tag{4}$$

Pour k suffisamment grand, on a de plus

$$\left(\frac{1-\frac{1}{n_k}}{1-\frac{1}{n_j}}\right)^{n_j}\geq e\left(1-\frac{1}{n_k}\right)^{n_j}\geq e\left(1-\frac{1}{n_k}\right)^{n_{k-1}}\geq e^{-\frac{2n_{k-1}}{n_k}+1}\geq\frac{3}{4}e,$$

où la dernière inégalité résulte de la condition (A). Ainsi, en tenant compte de (4), on obtient

$$|P_1(z_0)|\geq\left(\frac{3}{4}e-1\right)^{k-1}. \tag{5}$$

Pour le second produit, on a

$$|P_2(z_0)|=\left|\left(\frac{z_0}{1-\frac{1}{n_k}}\right)^{n_k}-1\right|,$$

et, puisque z_0 se trouve dans Δ, il reste à l'extérieur de tous les cercles γ_k. D'après le principe du minimum, $|P_2(z_0)|$ doit être plus grand que la valeur que $|P_2(z)|$ prend en quelque point,

$$\zeta=\left(1-\frac{1}{n_k}\right)e^{\frac{2\pi il}{n_k}}+\frac{1}{k^2 n_k}e^{i\alpha},$$

de l'une des circonférences γ_k, où l est un des nombres $0, 1, \ldots, n_k-1$, et α est un nombre réel. Ainsi, on a

$$|P_2(z_0)|>|P_2(\zeta)|=\left|\left(e^{\frac{2\pi il}{n_k}}+\frac{1}{k^2(n_k-1)}e^{i\alpha}\right)^{n_k}-1\right|\geqq\frac{c_2}{k^2}. \tag{6}$$

Par un raisonnement tout à fait analogue, on obtient l'inégalité

$$|P_3(z_0)|>\frac{c_3}{(k+1)^2}. \tag{7}$$

Enfin, pour estimer $|P_4(z_0)|$, nous notons que

$$\left(\frac{1-\frac{1}{n_{k+1}}}{1-\frac{1}{n_j}}\right)^{n_j}\leqq 4\left(1-\frac{1}{n_{k+1}}\right)^{n_j}\leqq 4e^{-\frac{n_j}{n_{k+1}}}, \tag{8}$$

pour $j\geqq k+2$, puisque

$$\left(1-\frac{1}{n_j}\right)^{-n_j}\leqq 4. \tag{9}$$

Or, si k est choisi assez grand pour que, pour tous les $\nu\geqq k$,

$$\frac{n_{\nu+2}}{n_{\nu+1}}>2,$$

ce qui est possible à cause de la condition (A), on trouve pour $j\geqq k+2$,

$$\frac{n_j}{n_{k+1}}>2^{j-k-1}$$

et par conséquent,

$$|P_4(z_0)|\geqq\prod_{j=k+2}^{\infty}(1-4e^{-2^{j-k-1}})=\prod_{\mu=2}^{\infty}(1-4e^{-2^{\mu-1}})=c_4>0. \tag{10}$$

En tenant compte de (3), (5), (6), (7) et (10), on obtient l'inégalité (2), ce qui achève la démonstration.

On voit sans peine que la mesure superficielle du complément de Δ par rapport à $|z|<1$, peut être rendue arbitrairement petite. Il est clair, cependant, que l'ensemble sur lequel une fonction holomorphe dans $|z|<1$ tend vers l'infini uniformément lorsque $|z|\to 1$ ne peut pas être de mesure superficielle π.

Nous remarquons que $\frac{1}{f(z)}$ est méromorphe dans $|z|<1$ et tend uniformé-

ment vers zéro, lorsque $|z| \to 1$, $z \in \Delta$. Une fonction de cette nature a été construite par Lusin et Priwaloff ([5], p. 175) pour un Δ plus compliqué.

3. Puisque le domaine Δ possède une structure particulièrement simple, quelques autres théorèmes résultent immédiatement du théorème 1.

THÉORÈME 2. — *La fonction $f(z)$ définie par (1), satisfait à la relation*

$$\lim_{r \to 1} |f(re^{i\theta})| = \infty \tag{11}$$

pour toutes les valeurs de θ dans l'intervalle $0 \leq \theta < 2\pi$, sauf un ensemble de valeurs de θ de mesure nulle.

En effet, on voit tout de suite que, pour presque tout θ, le rayon $re^{i\theta}$ du cercle-unité $|z| < 1$ jouit de la propriété suivante : il existe un nombre $0 < \rho(\theta) < 1$ tel que pour $r > \rho(\theta)$ la partie correspondante du rayon $re^{i\theta}$ est intérieure à Δ.

Il résulte facilement de la définition de Δ que l'ensemble des valeurs de θ qui satisfont à (11) est de première catégorie; cela est, en effet, une conséquence nécessaire du fait que cet ensemble est aussi de mesure 2π (*cf.* [5], p. 189).

THÉORÈME 3. — *Il existe une suite de circonférences $|z| = \rho_k$, $0 < \rho_k < 1$, $\lim_{k \to \infty} \rho_k = 1$, telles que, en posant $m_k = \min_{|z| = \rho_k} |f(z)|$, on ait $\lim_{k \to \infty} m_k = \infty$.*

En faisant

$$\rho_k = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{n_k} - \frac{1}{n_{k+1}}\right), \tag{12}$$

on trouve, par suite de la condition (A), que

$$1 - \frac{1}{n_k} + \frac{1}{k^2 n_k} < \rho_k < 1 - \frac{1}{n_{k+1}} - \frac{1}{(k+1)^2 n_{k+1}}$$

pour toutes les valeurs de k suffisamment grandes. Ainsi, pour ces valeurs de k, chaque circonférence $|z| = \rho_k$, à mi-chemin entre les cercles concentriques $|z| = 1 - \frac{1}{n_k}$ et $|z| = 1 - \frac{1}{n_{k+1}}$, est tout entière intérieure au domaine Δ.

THÉORÈME 4. — *Il existe une famille de $2^{\aleph_0}$ spirales S_t, $0 < t < 1$, dans $|z| < 1$, chacune s'approchant de $|z| = 1$ asymptotiquement, qui sont disjointes sauf à leur point initial commun $z = 0$, telles que pour chaque t,*

$$\lim_{\substack{|z| \to 1 \\ z \in S_t}} |f(z)| = \infty,$$

et que chacun des deux sous-domaines de $|z| < 1$ déterminés par deux spirales quelconques de la famille, contient une infinité de zéros de $f(z)$.

D'après le théorème 3 et la continuité, il résulte qu'à chaque $k = 1, 2, \ldots$

correspond un $\delta_k > 0$, $\delta_1 < \rho_1$ tel que, pour $\rho_k - \delta_k < |z| < \rho_k + \delta_k$, $|f(z)| > \frac{m_k}{2}$. Si nous posons

$$g_n(\theta) = \inf_{1-\frac{1}{n} < r < 1} |f(re^{i\theta})|,$$

il vient, d'après le théorème 2,

$$\lim_{n\to\infty} g_n(\theta) = \infty$$

pour presque tout θ dans l'intervalle $0 \leqq \theta < 2\pi$. De là, en appliquant le théorème d'Egoroff à la suite $\{g_n(\theta)\}$, pour un ε donné, $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, il existe un sous-ensemble parfait E de $0 \leqq \theta < 2\pi$ de mesure $> 2\pi - \varepsilon$ pour lequel

$$\lim_{r\to 1} |f(re^{i\theta})| = \infty, \qquad \theta \in E,$$

uniformément en θ.

Soient E_1 et E_2 les deux sous-ensembles de E dans $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ et $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, respectivement. Alors, il existe des ensembles $A_1 \subset E_1$ et $A_2 \subset E_2$ semblables (au sens des ensembles ordonnés) à l'intervalle-unité $0 < t < 1$ ([4], p. 76). Il s'ensuit qu'ils peuvent s'écrire $A_1 = \{\theta_t\}_{0<t<1}$, $A_2 = \{\varphi_t\}_{0<t<1}$, de sorte que, si $0 < t_1 < t_2 < 1$, alors $\theta_{t_1} < \theta_{t_2}$ et $\varphi_{t_1} < \varphi_{t_2}$. De plus, pour chaque $k = 1, 2, \ldots$, en désignant par I_k l'intervalle $\rho_k - \delta_k < r < \rho_k + \delta_k$, on peut écrire

$$I_k = \{\sigma_t^{(k)}\}_{0<t<1},$$

de sorte que, si $0 < t_1 < t_2 < 1$, alors $\sigma_{t_1}^{(k)} > \sigma_{t_2}^{(k)}$. Nous définissons maintenant S_t comme se composant des segments et des arcs circulaires suivants :

$$\begin{array}{ll} \rho e^{i\theta_t}, & 0 \leqq \rho \leqq \sigma_t^{(1)}, \quad \sigma_t^{(2k)} \leqq \rho \leqq \sigma_t^{(2k+1)}; \\ \tau e^{i\varphi_t}, & \sigma_t^{(2k-1)} \leqq \tau \leqq \sigma_t^{(2k)}; \\ \sigma_t^{(2k-1)} e^{i\psi}, & \theta_t + 2(k-1)\pi \leqq \psi \leqq \varphi_t + 2(k-1)\pi; \\ \sigma_t^{(2k)} e^{i\chi}, & \varphi_t + 2(k-1)\pi \leqq \chi \leqq \theta_t + 2k\pi; \\ & (k = 1, 2, \ldots). \end{array}$$

Il résulte immédiatement de cette définition que la famille possède toutes les propriétés spécifiées dans le théorème 4.

4. En faisant tendre la suite $\{n_k\}$ vers l'infini suffisamment vite, nous démontrerons que, pour la fonction $f(z)$, définie par (1), on peut faire croître vers l'infini le maximum du module sur les cercles concentriques aussi lentement que l'on veut.

LEMME 1. — *Si la suite $\{n_k\}$ satisfait à la condition*

$$n_k \geqq k n_{k-1}, \qquad n_1 > 1, \tag{B}$$

alors, sur la circonférence $|z| = \rho_k$, où ρ_k est donné par (12), on a

$$|f(z)| < c_5 . 5^k. \tag{13}$$

En tenant compte de (3), il résulte immédiatement de (9) que sur $|z| = \rho_k$,

$$|P_1(z)P_2(z)P_3'(z)| \leq 2.5^k.$$

Par des raisonnements analogues à ceux qui ont été employés pour obtenir (8) et en appliquant la condition (B), on voit que

$$(14) \qquad |P_4(z)| < \prod_{j=k+2}^{\infty} \left(1 + 4e^{-\frac{n_j}{n_{k+1}}}\right) < e^{4\sum_{j=1}^{\infty} e^{-j}} = \frac{c_5}{2}.$$

Cela établit (13).

En posant $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, $0 \leq r < 1$, nous allons maintenant démontrer le

Théorème 5. — *Soit $\mu(r)$ une fonction positive, strictement croissante, quelconque, dans l'intervalle $0 \leq r < 1$ telle que $\lim_{r>1} \mu(r) = \infty$. Il existe alors une suite $\{n_k\}$ satisfaisant à (B), telle que pour la fonction $f(z)$, définie dans (1), on ait*

$$(15) \qquad M(r) < \mu(r), \qquad 1 - \frac{1}{n_1} \leq r < 1.$$

Nous définissons la suite $\{n_k\}$ par induction complète comme suit. Déterminons $n_1 > 1$ de sorte que

$$\mu(\rho_1) > c_5.5^2$$

soit vérifié, où ρ_1 est donné par (12) et c_5 est la constante dans (14). Supposons que n_{k-1} ait été déjà déterminé et choisissons n_k de sorte que (B) soit satisfait, aussi bien que

$$\mu(\rho_k) > c_5.5^{k+1}.$$

Si r se trouve dans l'intervalle $\rho_k \leq r \leq \rho_{k+1}$, on obtient

$$M(r) \leq M(\rho_{k+1}) < c_5.5^{k+1} < \mu(\rho_k) \leq \mu(r),$$

ce qui démontre (15).

Il y a lieu de noter que, puisque (B) implique (A), la fonction $f(z)$ du théorème 5 jouit de toutes les propriétés spécifiées dans les théorèmes 1 à 4.

Ces propriétés sont aussi possédées par les fonctions définies par des produits de la forme

$$g(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \left\{1 - \left(\frac{z}{1 - \frac{1}{n_j}}\right)^{m_j}\right\},$$

où la suite $\{m_k\}$ croît si vite en comparaison de $\{n_k\}$, que le maximum du module de $g(z)$ sur les cercles concentriques tend aussi rapidement que l'on veut vers l'infini, lorsque r s'approche de 1.

5. Théorème 6. — *Soit* $\{n_k\}$ *une suite croissante d'entiers positifs tels que*

$$\text{(C)} \qquad \left(\sum_{j=1}^{k-1} n_j\right)^2 < n_k, \quad n_1 > 1.$$

Alors la fonction (1) *jouit de la propriété suivante,*

$$\lim_{|z|\to 1} \{|f(z)| + |f'(z)|\} = \infty,$$

uniformément en z.

Puisque la condition (A) est une conséquence de la condition (C), il suffit, d'après le théorème 1, de démontrer que

$$\text{(16)} \qquad \lim_{\substack{k\to\infty \\ z\in\Gamma_k}} |f'(z)| = \infty$$

uniformément en z.

La dérivée de (1) est

$$f'(z) = -\sum_{h=1}^{\infty}\left[\frac{n_h}{\left(1-\frac{1}{n_h}\right)^{n_h}} z^{n_h-1} \prod_{j\neq h}\left\{1-\left(\frac{z}{1-\frac{1}{n_j}}\right)^{n_j}\right\}\right],$$

d'où, pour z dans Γ_k, on obtient

$$\text{(17)} \qquad |f'(z)| \geqq \frac{n_k}{\left(1-\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}} |z|^{n_k-1} \prod_{j\neq k}\left|1-\left(\frac{z}{1-\frac{1}{n_j}}\right)^{n_j}\right| - \sum_{h\neq k}\left[\frac{n_h}{\left(1-\frac{1}{n_h}\right)^{n_h}} |z|^{n_h-1} \prod_{j\neq h}\left|1-\left(\frac{z}{1-\frac{1}{n_j}}\right)^{n_j}\right|\right] = T_1 - T_2.$$

Par un raisonnement analogue à celui employé dans la démonstration du théorème 1, on voit sans peine que, pour $z\in\Gamma_k$, où k est suffisamment grand,

$$\prod_{j\neq k}\left|1-\left(\frac{z}{1-\frac{1}{n_j}}\right)^{n_j}\right| > c_6\left(\frac{3}{4}e-1\right)^{k-1},$$

de sorte que, pour le premier nombre T_1 de la partie droite de l'inégalité (17), on obtient la borne inférieure

$$T_1 > c_7 n_k \left(\frac{3}{4}e-1\right)^{k-1}.$$

Pour le deuxième nombre T_2 dans (17), on a

$$T_2 < \sum_{h\neq k}\left[\frac{n_h}{\left(1-\frac{1}{n_h}\right)^{n_h}} |z|^{n_h-1} \prod_{j=1}^{\infty}\left\{1+\left(\frac{|z|}{1-\frac{1}{n_j}}\right)^{n_j}\right\}\right].$$

Puisque la condition (B) est une conséquence de la condition (C), le

théorème 5 s'applique quand $\mu(r) = \frac{1}{\sqrt{1-r}}$, dont la démonstration montre que

$$\prod_{j=1}^{\infty}\left\{1+\left(\frac{|z|}{1-\frac{1}{n_j}}\right)^{n_j}\right\} \leq \frac{1}{\sqrt{1-|z|}}$$

pour $|z|$ suffisamment proche de l'unité. Donc, pour $z \in \Gamma_k$, où k est suffisamment grand, on obtient

$$\begin{aligned} T_2 &< c_8\sqrt{n_k}\left\{\sum_{n=1}^{k-1} n_h + \sum_{h=k+1}^{\infty} n_h\left(1-\frac{1}{n_k}+\frac{1}{k^2 n_k}\right)^{n_h-1}\right\} \\ &< c_9\sqrt{n_k}\left\{\sum_{h=1}^{k-1} n_h + \sum_{h=k+1}^{\infty} n_h e^{-\frac{n_h}{2n_k}}\right\} \\ &< c_9\sqrt{n_k}\left\{\sum_{h=1}^{k-1} n_h + \sum_{h=k+1}^{\infty} n_h e^{-\frac{\sqrt{n_h}}{2}}\right\}, \end{aligned}$$

la dernière inégalité résultant de (C). Par conséquent, pour k suffisamment grand,

$$T_2 < c_9\sqrt{n_k}\left(\sum_{h=1}^{k-1} n_h + 1\right).$$

En revenant à (17), on obtient finalement

$$|f'(z)| > c_7 n_k\left(\frac{3}{4}e-1\right)^{k-1} - c_{10}\sqrt{n_k}\sum_{h=1}^{k-1} n_h,$$

dont (16) est une conséquence immédiate d'après la condition (C).

6. Nous allons maintenant établir l'existence d'une fonction $f(z)$ qui satisfait au théorème 3, mais qui ne possède aucune limite radiale. Nous allons démontrer d'abord un lemme élémentaire sur les polynomes :

Lemme 2. — *Soit n un entier positif quelconque et posons*

$$p_n(w) = 1 - w^n.$$

Il existe alors un ε, $0 < \varepsilon < 1$, et un δ, $\frac{1}{4} < \delta < \frac{1}{3}$, où ε et δ sont indépendants de n, tels que $|p_n(w)| < \varepsilon$ sur chaque arc A de la circonférence $|w| = 1$ autour d'un zéro de $p_n(w)$ comme milieu, de longueur égale à $\frac{2\pi\delta}{n}$.

En effet, l étant un entier quelconque inclus entre 0 et $n-1$, considérons

le zéro $e^{\frac{2\pi i l}{n}}$ de $p_n(w)$. Désignons par B l'arc autour de ce zéro comme point milieu qui sous-tend l'angle

$$\frac{2\pi l}{n} - \frac{\pi}{3n} \leq \theta \leq \frac{2\pi l}{n} + \frac{\pi}{3n}$$

à l'origine. Pour w sur B, on a donc

$$-\frac{\pi}{3} \leq \arg w^n \leq +\frac{\pi}{3},$$

d'où $|p_n(w)| \leq 1$. L'existence de l'arc A du lemme en résulte par continuité.

Nous sommes maintenant à même de démontrer le

THÉORÈME 7. — *Soit* $\{n_k\}$ *une suite croissante d'entiers positifs tels que*

$$k^2 n_{k-1}^8 < n_k, \qquad n_1 > 4. \tag{D}$$

Alors

$$f(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \prod_{h=1}^{4} \left\{ 1 - \left(\frac{z\, e^{i(h-1)\alpha_j}}{1 - \frac{1}{hn_j}} \right)^{n_j^3} \right\}^{n_j^{3h-1}}, \tag{18}$$

pour des nombres réels α_j *convenables, représente une fonction holomorphe dans* $|z| \leq 1$ *dont le module tend uniformément vers l'infini sur la suite de circonférences* $|z| = 1 - \frac{2}{n_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, *mais qui ne possède aucune limite radiale.*

Nous allons d'abord spécifier les nombres réels α_j. Supposons que le nombre n dans le lemme 2 ait la valeur n_j^2 et désignons la réunion des arcs correspondants A par A_{n_j}. Puisque $\delta > \frac{1}{4}$, la mesure de A_{n_j} est $2\pi\delta > \frac{\pi}{2}$. Désignons par $A_{n_j}(\alpha)$ l'ensemble obtenu en assujettissant A_{n_j} à une rotation $w' = w e^{-i\alpha}$. Alors il est évidemment possible de trouver un nombre réel α_j tel que $\bigcup_{h=1}^{4} A_{n_j}((h-1)\alpha_j)$ couvre la circonférence $|w| = 1$ entière.

Soit $0 \leq \theta_0 < 2\pi$. Pour chaque j, il existe au moins un entier h_j, $1 \leq h_j \leq 4$ (au cas où il y en a plus d'un, pour préciser, nous prendrons le plus petit), tel que

$$w_0 = \frac{\left\{ \left(1 - \frac{1}{h_j n_j} \right) e^{i\theta_0} \right\} e^{i(h_j - 1)\alpha_j}}{1 - \frac{1}{h_j n_j}} \in A_{n_j}((h_j - 1)\alpha_j). \tag{19}$$

Il est évident que la convergence absolue et uniforme du produit (18) dans chaque cercle $|z| \leq \rho < 1$ résulte de la condition (D).

En posant $|z| = 1 - \frac{2}{n_k}$ pour quelque k fixé, il résulte de (18) que

$$|f(z)| \geqq \left[\prod_{j=1}^{k-1}\prod_{h=1}^{4}\left\{\left(\frac{1-\frac{2}{n_k}}{1-\frac{1}{hn_j}}\right)^{n_j^3} - 1\right\}^{n_j^{3h-1}}\right]\left[\prod_{j=k}^{\infty}\prod_{h=1}^{4}\left\{1-\left(\frac{1-\frac{2}{n_k}}{1-\frac{1}{hn_j}}\right)^{n_j^3}\right\}^{n_j^{3h-1}}\right]$$
$$= R_1(k)R_2(k),$$

d'où, par des raisonnements bien connus, on voit sans peine que

$$\lim_{k\to\infty} R_1(k) = \infty, \qquad \lim_{k\to\infty} R_2(k) = 1.$$

Donc, pour achever la démonstration du théorème 7, on n'a qu'à démontrer que $f(z)$ ne possède aucune limite radiale. Puisqu'une limite radiale, si elle existait, devrait être infinie, il suffit de montrer l'existence, sur chaque rayon, d'une suite de points s'approchant de $|z| = 1$, sur laquelle $f(z)$ tend vers zéro.

Soit $re^{i\theta_0}$, $0 \leqq r < 1$, un rayon quelconque du cercle-unité $|z| < 1$. Nous allons montrer que

$$\lim_{k\to\infty} f\left[\left(1-\frac{1}{h_k n_k}\right)e^{i\theta_0}\right] = 0, \tag{20}$$

où les entiers h_k sont choisis selon (19). Pour chaque k et

$$z = \left(1-\frac{1}{h_k n_k}\right)e^{i\theta_0},$$

on a

$$|f(z)| \leqq \left[\prod_{j=1}^{k-1}\prod_{h=1}^{4}\left\{1+\left(\frac{1-\frac{1}{h_k n_k}}{1-\frac{1}{hn_j}}\right)^{n_j^2}\right\}^{n_j^{3h-1}}\right]\left[\prod_{h=1}^{4}\left|1-\left(\frac{z\,e^{i(h-1)\alpha_k}}{1-\frac{1}{hn_k}}\right)^{n_k^2}\right|^{n_k^{3h-1}}\right]$$
$$\times\left[\prod_{j=k+1}^{\infty}\prod_{h=1}^{4}\left\{1+\left(\frac{1-\frac{1}{h_k n_k}}{1-\frac{1}{hn_j}}\right)^{n_j^2}\right\}^{n_j^{3h-1}}\right] = S_1(k)S_2(k)S_3(k).$$

Considérons le facteur décisif, $F(k)$, dans $S_2(k)$, qui correspond à $h = h_k$. En appliquant le lemme 2 et (19), on voit que ce facteur est inférieur à $\varepsilon^{n_k^{3h_k-1}}$. Le produit $S_1(k)$ et le produit des facteurs (s'il y en a) dans $S_2(k)$ correspondant à $h < h_k$ tendent vers l'infini, lorsque $k \to \infty$, mais, d'après la condition (D), avec un ordre plus bas que celui de $\{F(k)\}^{-1}$. D'autre part, le produit des facteurs (s'il y en a) dans $S_2(k)$ correspondant à $h > h_k$, et le produit $S_3(k)$ tendent vers l'unité, lorsque $k \to \infty$. Cela démontre (20).

7. Il est aussi possible d'obtenir une fonction satisfaisant au théorème 2 mais qui ne tend uniformément vers l'infini sur aucune suite de courbes de

Jordan dans $|z|<1$ dont chacune contient la précédente dans son intérieur. C'est une conséquence immédiate du

THÉORÈME 8. — *Il existe une suite* $\{n_k\}$ *satisfaisant à la condition* (B) *telle que* $(1-z)f(z)$, *où* $f(z)$ *est défini par* (1), *tend vers l'infini sur presque tous les rayons du cercle-unité, et tend vers zéro sur le rayon* $\arg z = 0$.

En effet, il suffit de prendre $\mu(r) = \frac{1}{\sqrt{1-r}}$ dans le théorème 5.

Un exemple d'une fonction holomorphe, non bornée, dans $|z|<1$ qui n'a aucune limite radiale et qui ne tend vers l'infini sur aucune suite de courbes de Jordan, dont chacune contient la précédente dans son intérieur, est fourni par le

THÉORÈME 9. — *Soit* $\{n_k\}$ *une suite croissante d'entiers positifs tels que*

$$k^2 n_{k-1}^8 < n_k < n_{k-1}^9. \tag{E}$$

Alors, la fonction $h(z) = f(z)g(z)$, *où* $f(z)$ *est donné par* (18) *et*

$$g(z) = e^{-e^{-\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^4}},$$

est holomorphe et non bornée dans $|z|<1$, *ne possède aucune limite radiale et tend vers zéro lorsque* z *s'approche du point* $z=1$ *sur l'arc* $|z+i| = \sqrt{2}$.

Puisque la condition (E) entraîne la condition (D), il résulte du théorème 7 que $f(z)$ ne possède aucune limite radiale. De plus, $g(z)$ tend vers 1 sur le rayon $\arg z = 0$ et tend vers des limites finies, différentes de zéro, sur tous les autres rayons. Ainsi, $h(z)$ n'a aucune limite radiale.

Pour achever la démonstration, il suffit de noter que, lorsque $z \to 1$ sur l'arc $|z+i| = \sqrt{2}$, $g(z) \to 0$ comme $e^{-e^{\frac{c_{11}}{1-|z|}}}$, tandis que

$$|f(z)| = O\left(e^{\frac{c_{12}}{(1-|z|)^9}}\right),$$

celui-ci étant une conséquence de la deuxième inégalité dans (E).

Si une fonction holomorphe, non bornée dans $|z|<1$ reste bornée sur un chemin spiralique qui s'approche de $|z|=1$ asymptotiquement (*cf.* Valiron [8]), alors elle possède aussi les propriétés constatées dans le paragraphe antérieur au théorème 9.

Après l'achèvement de cet article, les auteurs ont connu deux mémoires de J. WOLFF, *On the boundary limit infinite of a holomorphic function* (*Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Proceedings of the Section of Sciences*, t. 31, 1928, p. 718-720) et *Sur les limites radiales d'une fonction*

holomorphe dans un cercle (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 56, 1928, p. 167-173) dans lesquels M. Wolff obtient les résultats de nos théorèmes 1, 2, 3, ainsi que notre remarque à la fin du paragraphe 4. Ces résultats ont été obtenus par M. Wolff par l'emploi de produits infinis très semblables aux nôtres.

Bibliographie.

[1] H. Cartan, *Sur les variétés définies par une relation entière* (*fin*) (*Bull. Sc. Math.*, (2), t. 55, 1931, p. 47-64).

[2] E. F. Collingwood et M. L. Cartwright, *Boundary theorems for a function meromorphic in the unit circle* (*Acta Mathematica*, t. 87, 1952, p. 83-146).

[3] P. Fatou, *Sur les équations fonctionnelles* (troisième Mémoire) (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 48, 1920, p. 208-314).

[4] E. Kamke, *Theory of Sets*, New-York, 1950.

[5] N. Lusin et J. Priwaloff, *Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, (3), t. 42, 1925, p. 143-191).

[6] P. Montel, *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe*, Paris, 1910.

[7] J. J. Priwaloff, *Propriétés frontières des fonctions analytiques* (en russe), 2e édition, Moscou-Léningrad, 1950.

[8] G. Valiron, *Sur les singularités des fonctions holomorphes dans un cercle* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 198, 1934, p. 2065-2067).

SUR LES FONCTIONS HOLOMORPHES ADMETTANT DES VALEURS EXCEPTIONNELLES

PAR M. KING-LAI HIONG.

1. Nous considérons les fonctions holomorphes dans le cercle unité, ne s'annulant que p fois et admettant 1 comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel ou au sens de R. Nevanlinna; et nous nous proposons de trouver, pour une telle fonction $f(z)$, une limitation qui ne dépend que de $f(0)$ et $|z|$ et qui est valable pour tout l'intérieur du cercle unité, sauf peut-être en certains points isolés.

Il est naturel de partir du second théorème fondamental de M. R. Nevanlinna (1). Mais alors une difficulté réside dans l'élimination de la seconde valeur initiale qui figure dans son inégalité, comme A. Bloch a déjà remarqué (2) pour tout problème ayant pour but la traduction en termes finis de ce théorème. Et puis, nous observons que la méthode utilisée par M. Valiron dans sa nouvelle démonstration du théorème de M. Schottky (3) ne s'applique pas. Car ici l'origine ne doit pas, peut-être, être déplacée et la fonction prend la valeur 1.

Au lieu de l'inégalité fondamentale sous sa forme définitive, nous prenons pour point de départ l'inégalité

$$\sum_{\nu}^{q} m(r, \alpha_\nu) < m\left(r, \frac{1}{f}\right) + m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + m\left(r, \sum \frac{f'}{f-\alpha_\nu}\right) + q \log \frac{2q}{d} + \log 3$$

et nous parvenons à établir un lemme qui fournit pour $m\left(r, \frac{f}{f'}\right)$ une limitation ne dépendant pas de la valeur à éliminer. Grâce à ce lemme et à d'autres lemmes, nous arrivons aisément à un résultat en vue.

(1) R. NEVANLINNA, *Théorème de Picard-Borel*, Paris, 1929.
(2) Voir *Mém. Soc. Math.*, t. 20, p. 48.
(3) VALIRON, *Actual. Scient. et Ind.*, n° 570, 1937, p. 12–15.

Les théorèmes ainsi obtenus sont assez simples et les énoncés sont proches de celui du théorème de M. Schottky.

Dans chacun des deux cas considérés, au moyen du théorème établi et à l'aide d'un résultat important de M. Montel, nous trouvons ensuite pour une famille de fonctions holomorphes dans le cercle unité, des critères de normalité en liaison avec la valeur exceptionnelle, puis un critère de quasi-normalité qui généralise un théorème classique dû à M. Montel. Pour le dernier critère, il convient de remarquer qu'il peut être aussi démontré et d'une façon très simple par ce théorème même.

Les résultats obtenus ainsi dans le cas des fonctions holomorphes s'étendent aisément à celui des fonctions méromorphes ainsi qu'à celui d'un domaine connexe quelconque.

En ce qui concerne la croissance d'une fonction, à part de l'inégalité que nous utilisons dans chaque cas pour l'étude de la normalité ou de la quasi-normalité, nous en établissons encore d'autres dont deux (une pour une fonction holomorphe et une pour une fonction méromorphe) sont analogues à celles données par M. Valiron dans le cas où la valeur 1 n'est prise qu'un nombre fini de fois par la fonction.

Enfin, nous constatons que les mêmes résultats que dans les deux cas envisagés peuvent s'obtenir dans un cas plus général où 1 n'est pas nécessairement une valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel ou au sens de R. Nevanlinna, mais l'indice $N(r, 1)$ satisfait à une certaine condition ([4]).

Je tiens à exprimer ici ma vive gratitude à M. Paul Montel pour l'intérêt qu'il m'a témoigné; de ses entretiens bienveillants qui eurent lieu au début de ces recherches, j'ai tiré grand profit pour mon problème en ce qui concerne la belle théorie de familles normales fondée par lui. Je remercie également M. Georges Valiron d'avoir bien voulu me faire une remarque importante au premier résultat de ce travail. Qu'il me soit permis encore d'adresser mes remerciements au Centre National de la Recherche Scientifique et à l'Aide à la Recherche Scientifique qui m'ont aidé dans un état de santé difficile.

PRÉLIMINAIRES.

1. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle unité; si a_ν et b_μ désignent respectivement ses zéros et ses pôles compris dans le cercle $|z| < R$,

---

([4]) Une partie des résultats contenus dans ce Mémoire a fait l'objet d'une Note aux *C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 1322. Mais nous avons ici quelques améliorations.

on a pour $|z|<R$ la formule de Poisson-Jensen établie par M. R Nevanlinna :

$$(1)\qquad \log f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}d\varphi - \sum_{\nu}\log\frac{R^2-\bar{a}_\nu z}{R(z-a_\nu)}+\sum_{\mu}\log\frac{R^2-\bar{b}_\mu z}{R(z-b_\mu)}+iC,$$

où a est la conjuguée de a et C une constante ([5]).

Si l'on prend les parties réelles des deux membres de (1), il vient, en posant $z=re^{i\theta}$,

$$(2)\qquad \log|f(z)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\varphi})|\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)}d\varphi - \sum_{\nu}\log\left|\frac{R^2-a_\nu z}{R(z-a_\nu)}\right|+\sum_{\mu}\log\left|\frac{R^2-\bar{b}_\mu z}{R(z-b_\mu)}\right|.$$

En remarquant que les logarithmes sous les signes $\sum$ sont positifs, on déduit de (2) l'inégalité

$$(3)\qquad \log|f(z)|\leq\frac{R+r}{R-r}m(R,f)-\frac{R-r}{R+r}m\left(R,\frac{1}{f}\right)+\sum_{\mu}\log\left|\frac{R^2-\bar{b}_\nu z}{R(z-b_\mu)}\right|$$

pour $|z|=r<R<1$. Si $f(z)$ est holomorphe, le dernier terme disparaîtra.

2. En ce qui concerne la théorie des familles normales, rappelons un résultat de M. Montel qui nous sera important dans la suite et qui peut s'énoncer ainsi :

I. *Soit une famille de fonctions $f(z)$ holomorphes dans un domaine* D, *qui s'y annulent chacune p fois au plus; de toute suite infinie $f_n(z)$ des fonctions de la famille, on peut extraire une suite partielle $f_{\lambda_n}(z)$ et trouver au plus p point* $A_i(i=1,\ldots,p)$ *tels qu'en traçant de chaque* A_i *comme centre un cercle (σ_i) de rayon η_i arbitrairement petit, chaque $f_{\lambda_n}(z)$ de la suite ait un zéro dans chaque (σ_i) et n'en ait pas à l'extérieur des (σ_i), les zéros étant comptés avec leur ordre de multiplicité.*

Rappelons encore la proposition suivante due également à M. Montel :

II. *Une famille quasi normale de fonctions holomorphes ne prenant pas une valeur est une famille normale.*

3. Nous aurons besoin du théorème de M. Borel sur les fonctions croissantes que M. Bureau a précisé sous la forme :

([5]) *Voir* Valiron, *loc. cit.*, p. 9.

([6]) Montel, *Mém. Acad. Roy. de Belgique*, série 2, t. VI, 1922, p. 8-10.

LEMME A. — *Si* $U(r)$ *est une fonction réelle positive non décroissante pour* $0<r<1$, *et si*

$$U(r)\leq\sigma+\sigma_1\log\frac{1}{R-r}+\sigma_2\overset{+}{\log}U(R), \tag{4}$$

avec $r_0\leq r<R<1$, $\sigma\geq 0$ *et* $\sigma_1\geq 2\sigma_2>8$, *on a*

$$U(r)\leq\sigma(\sigma_2+1)+\sigma_1(\sigma_2+3)\log\frac{1}{1-r} \tag{5}$$

pour $r\geq r_0$ *et* $r>1-\frac{1}{\sigma_2}$.

Mais nous emploierons surtout le lemme suivant que nous déduisons du précédent :

LEMME B. — *Si* $U(r)$ *est une fonction positive non décroissante pour* $0<r<1$ *et si, pour* $r_0\leq r<R<1$,

$$U(r)\leq\frac{1}{(R-r)^p}\left[a+b\log\frac{1}{R-r}+c\overset{+}{\log}U(R)\right], \tag{6}$$

p étant un entier supérieur ou égal à 0 *et a, b, c, trois constantes supérieures ou égales à* 1, *on a pour* $r\geq r_0$ *et* $r\geq\frac{4}{5}$,

$$U(r)<\frac{1}{(1-r)^p}\left(Aa+B\log\frac{2}{1-r}\right), \tag{7}$$

où A *et* B *sont deux constantes ne dépendant que de b, c et p.*

Pour le démontrer, prenons le $\overset{+}{\log}$ des deux membres de (6); il vient

$$\overset{+}{\log}U(r)\leq\log 3abc+(p+1)\log\frac{1}{R-r}+\overset{+}{\log}\overset{-}{\log}U(R),$$

inégalité qui prend la forme

$$\overset{+}{\log}U(r)\leq\sigma+\sigma_1\log\frac{1}{R-r}+\sigma_2\overset{+}{\log}\overset{+}{\log}U(R). \tag{8}$$

Par hypothèse, $\sigma=\log 3abc>0$, si l'on choisit σ_1 et σ_2 tels que $\sigma_1\geq p+1$ et $\sigma_1\geq 2\sigma>8$, le lemme A sera applicable à la fonction $\overset{+}{\log}U(r)$. Ainsi en prenant $\sigma_2=5$ et σ_1 égal au plus grand des deux nombres 10 et $p+1$, on obtient

$$\overset{+}{\log}U(r)<6\log 3abc+8\sigma_1\log\frac{1}{1-r}$$

pour $r\geq r_0$ et $r>1-\frac{1}{\sigma_2}$. Cette inégalité peut s'écrire *a fortiori*

$$\overset{+}{\log}U(r)<6a+8(b+c+\sigma_p+3)\log\frac{1}{1-r}.$$

Portons cette borne dans (6) et posons $R = r + \frac{1}{2}(1-r)$; il vient

$$(9) \qquad U(r) < \frac{2^{p+3}}{(1-r)^p}\left[(1+c)a + c(2b+c+\sigma+3)\log\frac{2}{1-r}\right],$$

où $\sigma \geq p+1$ et $\sigma \geq \frac{4}{5}$.

PREMIÈRE PARTIE.

CAS OÙ UN EST UNE VALEUR EXCEPTIONNELLE AU SENS DE PICARD-BOREL.

I. — Étude de la croissance d'une fonction.

4. Pour cette étude, il est essentiel d'effectuer l'élimination dont nous avons parlé dans l'introduction; nous commençons par établir deux lemmes sur le second desquels repose principalement notre méthode d'élimination.

LEMME I. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité; si l'on désigne par $a_\nu[\nu = 1, \ldots, n(r, 0)]$ ses zéros dans le cercle $|z| = r$ (contour compris) et si l'on décrit de chaque point a_ν comme centre un petit cercle (γ_ν) de rayon arbitrairement petit δ_ν, on a, pour $0 \leq r < \rho < 1$,*

$$(10) \qquad m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) < A_k \sum_\nu \log\frac{1}{\delta_\nu} + B_k \log\frac{1}{\rho - r} + C_k \log V(\rho, f)$$

où $V(r, f) = m(r, f) + m\left(r, \frac{1}{f}\right)$, A_k, B_k, C_k sont des constantes numériques ne dépendant que de k (7).

De la formule de Poisson-Jensen, on déduit en dérivant

$$(11) \qquad \frac{f'}{f} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})| \frac{2Re^{i\varphi}}{(Re^{i\varphi} - z)^2}\, d\varphi + \sum_{\nu=1}^{n(R,0)} \frac{R^2 - |a_\nu|^2}{(z - a_\nu)(R^2 - \bar{a}_\nu z)},$$

où a_ν sont les zéros de $f(z)$ tels que $|a_\nu| < R$; z est un point intérieur au cercle $|z| = R$. D'une façon générale,

$$(12) \qquad \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[\frac{f'}{f}\right] = \frac{k!}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})| \frac{2Re^{i\varphi}}{(Re^{i\varphi} - z)^{\nu+1}}\, d\varphi + \sum_\nu^{n(R,0)} \left[\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(z - a_\nu)^k} + \frac{(k-1)!\,\bar{a}_\nu^{k-1}}{(R^2 - \bar{a}_\nu z)^k}\right].$$

Si l'on pose $|z| = r$ et si l'on suppose que r suffisamment près de R pour que $|a_\nu| \leq r$ et en prenant $R = r + \varepsilon$, on ait $n(R, 0) \leq \lambda n(r, 0)$, λ étant un

(7) Dans la suite, nous désignerons toujours par A, B, C, $A_1, \ldots$, A', ..., α, β, γ, $\alpha_1, \ldots$, H, K, $H_1, \ldots$ des constantes numériques.

nombre positif, il vient pour toute valeur de r telle que $r+\varepsilon<1$,

$$(12') \quad \left|\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[\frac{f'}{f}\right]\right| < \frac{k!\,2R}{(R-r)^{k+1}}V(R,f) + (k-1)!\,\lambda\sum_{\nu}\left[\frac{1}{\delta_\nu^k}+\frac{1}{(R-r)^k}\right]$$
$$< P_k\left[R, \sum\frac{1}{\delta_\nu}, \frac{1}{R-r}, n(r,0), V\right] \qquad [\nu=1,\ \ldots,\ n(r,0)],$$

P_k étant un polynome des arguments.

De (12′) on déduit, en désignant par Q_k un polynome comme P_k,

$$\left|\frac{d^{k-2}}{dz^{k-2}}\left[\frac{f''}{f}\right]\right| < Q_k\left[R, \sum\frac{1}{\delta_\nu^k}, \frac{1}{R-r}, n(r,0), V\right] \qquad (\nu=1,\ \ldots,\ p)$$

on trouve finalement en répétant l'opération

$$\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| < \bar{P}_k\left[R, \sum\frac{1}{\delta_\nu^k}, \frac{1}{R-r}, n(r,0), V\right] \qquad (\nu=1,\ \ldots,\ p),$$

$\bar{P}_k$ désignant un polynome comme P_k. Si l'on prend le $\overset{+}{\log}$ des deux membres de cette inégalité, il vient, en remarquant que $n(r,0)<\Sigma\log\frac{1}{\delta_\nu}$ dès que $\delta_\nu<\frac{1}{a_1}$,

$$(13) \qquad \overset{+}{\log}\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| < A'_k\sum_{\nu}\log\frac{1}{\delta_\nu} + B'_k\log\frac{1}{R-r} + C'_k\overset{+}{\log}V(R,f).$$

Pour $r<\rho<1$, on peut avoir $R-r\geq h(\rho-r)$ en prenant h positif assez petit; par suite l'inégalité précédente peut s'écrire

$$(13'') \qquad \overset{+}{\log}\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| < A''_k\sum_{\nu}\log\frac{1}{\delta_\nu} + B''_k\log\frac{1}{\rho-r} + C''_k\overset{+}{\log}V(\rho,f).$$

En calculant la valeur moyenne de (13′) sur la circonférence $|z|=r$, nous obtenons une inégalité de la forme (10) qui est valable pour $r+\varepsilon<1$, mais quelque petit que soit ε.

Et si $f(z)$ ne s'annule pas, on retrouve l'inégalité connue ([8])

$$(10') \qquad m\left(R, \frac{f^{(k)}}{f}\right) < A_k + B_k\log\frac{1}{\rho-r} + C_k\overset{+}{\log}V(\rho,f)$$

pour $0\leq r<\rho<1$.

LEMME II. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité; en conservant les notions du lemme* I *et en supposant $f(0)\neq 0$, on a ou bien pour tout point intérieur au cercle $|z|=r$*

$$(14) \qquad |f(z)|<|f(0)|+M_k,$$

ou bien pour $0\leq r_0\leq r<\rho<1$, l'inégalité

$$(15) \qquad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < \frac{1}{(\rho-r)^2}\left[\alpha_k\left(\overset{+}{\log}|f(0)| + \sum_{\nu=1}^{n(r,0)}\log\frac{1}{\delta_\nu}\right) + \beta_k\log\frac{1}{\rho-r} + \gamma_k\log V(\rho,f)\right]$$

où M_k, α_k, β_k, γ_k sont des constantes numériques ne dépendant que de k.

([8]) *Voir* VALIRON, *loc. cit.*, p. 12.

Désignons par (C_r) le cercle $|z| = r (r < 1)$ et par D le domaine limité par les circonférences (C_r) et (γ_ν) $[\nu = 1, \ldots, n(r, o)]$.

Supposons d'abord que $|f^{(k)}(z)| < 1$ quel que soit le point z du domaine D. Prenons arbitrairement un nombre assez grand M et choisissons dans l'intérieur de D, $k-1$ points $\zeta_i (i = 1, \ldots, k-1)$ tels que $|f^{(i)}(\zeta_i)| \leq M$. Intégrons $f^{(k)}(z)$ le long d'une courbe rectifiable (L) située dans (D) joignant le point ζ_{k-1} à un point quelconque z de D. Il est aisé de voir que la ligne (L) peut être remplacée par une ligne brisée (Γ) située dans D et composée de segments de rayons de (C_r) et des arcs de circonférences centrées à o, telle que la longueur totale des segments ne dépasse pas 2 et celle des arcs 2π. Nous avons ainsi

$$|f^{(k-1)}(z)| < |f^{(k-1)}(\zeta_{k-1})| + \left| \int_{\zeta_{k-1}}^{z} f^{(k)}(z)\, dz \right| < M + 2(\pi + 1)$$

et nous trouvons de la même façon, en posant $2\pi + 2 = Q$,

$$(16) \quad \begin{cases} |f^{(k-2)}(z)| < |f^{(k-2)}(\zeta_{k-2})| + \left| \int_{\zeta_{k-2}}^{z} f^{(k-1)}(z)\, dz \right| < (1+Q)M + Q^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ |f'(z)| < \dfrac{Q^{k-1} - 1}{Q - 1} M + Q^{k-1}, \end{cases}$$

En intégrant une dernière fois de o à z, on a donc pour tout point z de D

$$|f(z)| < |f(o)| + M_k,$$

M_k étant une constante numérique ne dépendant que de k.

Soit maintenant ζ un point quelconque intérieur à (C_r); nous pouvons tracer un cercle de centre O et de rayon $r' < r$, qui contient ce point et qui est situé dans D. Alors l'inégalité (14) a lieu sur (C') et en vertu d'un théorème bien connu sur le module maximum, elle sera vérifiée pour le point ζ.

Supposons maintenant que la circonstance précédente ne se présente pas; il existe alors dans D au moins un point z_1 tel que $|f^{(k)}(z_1)| \geq 1$. Supposons que dans le développement en série entière de $f(z)$, le premier coefficient non nul est C_h. Si alors $k < h$, on a $f^{(k)}(o) = o$ et z_1 est nécessairement distinct de o; si $k \geq h$, deux cas peuvent se présenter suivant que le point z_1 est l'origine ou non.

Dans le premier cas, on peut appliquer la formule de Jensen et l'on a

$$(17) \quad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + N\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + \log \left| \frac{f(o)}{f^{(k)}(o)} \right|,$$

par suite

$$(18) \quad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \log |f(o)|.$$

En prenant les δ_ν assez petits, il est évident que

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) < \Sigma \log \frac{1}{\delta_\nu}.$$

D'après le lemme I, on a donc

$$m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < A_k\left(\log|f(0)| + \Sigma \log \frac{1}{\delta_\nu}\right) + B_k \log \frac{1}{\rho - r} + C_k \overset{+}{\log} V(\rho, f),$$

inégalité qui entre dans (15).

Considérons maintenant le second cas ainsi que le cas où $k < h$. Nous avons alors $|z_1| = r_1 > 0$ et $|f^{(k)}(z_1)| \geq 1$. Appliquons la relation (3) à la fonction $\frac{f^{(k)}}{f}$ pour le point z_1; il vient

$$(19) \quad m\left(R, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < \left(\frac{R + r_1}{R - r_1}\right)^2 m\left(R, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + \frac{R + r_1}{R - r_1}\left[\log\left|\frac{f(z_1)}{f^{(k)}(z_1)}\right| + \sum_\nu \log\left|\frac{R^2 - \bar{a}_\nu z}{z(z - a_\nu)}\right|\right] \qquad [\nu = 1, \ldots, n(R, 0)].$$

Puisque $|f^{(k)}(z_1)| \geq 1$, en prenant une valeur r_0 suffisamment grande, on a pour $r_0 \leq r < R < 1$,

$$|f(z_1)| < |f^{(k)}(z_1)| \frac{1}{1 - r} < |f^{(k)}(z_1)| \frac{1}{R - r}.$$

Si l'on prend alors $r_0 \geq r_1$ et r assez près de R de sorte que $n(r, 0) = n(R, 0)$, l'inégalité (19) peut s'écrire

$$(20) \quad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < \frac{4}{(R - r)^2} m\left(R, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + \frac{2}{R - r}\left[\log \frac{1}{R - r} + \sum_\nu^{n(r,0)} \log \frac{2}{\delta_\nu}\right].$$

Or d'après le lemme I

$$m\left(R, \frac{f^{(k)}}{f}\right) < A_k \sum_\nu \log \frac{1}{\delta_\nu} + B_k\left[\log \frac{1}{\rho - R} + C_k \overset{+}{\log} V(\rho, f)\right],$$

donc, si on choisit une valeur ρ_1 de ρ pour chaque valeur de r et un nombre positif h' tels que $\rho_1 - R \geq h'(\rho - r)$, on déduit de (20) l'inégalité

$$(21) \quad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha'_k \sum_\nu \log \frac{1}{\delta_\nu} + \beta'_k \log \frac{1}{\rho - r} + \gamma'_k \overset{+}{\log} V(\rho, f)\right]$$

qui entre évidemment dans (15).

En particulier si $f(z)$ ne s'annule pas, l'inégalité (15) se réduit encore à

$$(15') \quad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha_k \overset{+}{\log} |f(0)| + \beta_k \log \frac{1}{\rho - r} + \gamma_k \log V(\rho, f)\right]$$

valable pour $0 \leq r_0 \leq r < \rho < 1$.

Remarque. — Dans la démonstration du lemme, au lieu du domaine D, on peut considérer le domaine D′ limité par les circonférences (C_r), (γ) et (γ_ν) $[\nu = 1, \ldots, n(r, o)]$ en désignant par (γ) une circonférence de centre O et de rayon arbitrairement petit δ; on arrive ainsi à conclure que l'on a soit pour tout point z intérieur au cercle $|z| = r$ une égalité de forme (14), soit pour $o < \delta \leq r_0 \leq r < \rho < 1$,

$$(22) \qquad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha'_k \sum_\nu \log \frac{1}{\delta_\nu} + \beta'_k \log \frac{1}{\rho - r} + \gamma'_k \overset{+}{\log} V(\rho, f)\right] \qquad [\nu = 1, \ldots, n(r, o)].$$

Si $f(z)$ ne s'annule pas, cette inégalité se réduit à

$$(23) \qquad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha'_k + \beta'_k \overset{+}{\log} \frac{1}{\rho - r} + \gamma'_k \overset{+}{\log} V(\rho, f)\right]$$

valable pour $o < \delta \leq r_0 \leq r < \rho < 1$.

5. Abordons maintenant l'étude de la croissance; nous allons établir le théorème suivant :

Théorème A. — *Soit une fonction holomorphe dans le cercle unité ayant pour développement en série entière*

$$(24) \qquad f(z) = c_0 + c_h z^h + \ldots \qquad (c_0, c_h \neq o)$$

et l'on suppose de plus que $c_0 \neq 1$; *si* $f(z)$ *ne s'annule que* p *fois et admet* 1 *comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel, alors en désignant par* $a_\nu (\nu = 1, \ldots, p)$ *ses zéros et en décrivant de chaque* a_ν *comme centre un cercle* (γ_ν) *de rayon arbitrairement petit* δ_ν, *on a pour tout point* z *intérieur au cercle* $|z| = r$ *avec* $o < \delta \leq r < 1$, *l'inégalité*

$$(25) \qquad \log |f(z)| < \frac{1}{(1 - r)^3}\left[H\,\Omega(c_0, \delta, \delta_\nu) + K \log \frac{2}{1 - r}\right], \qquad (\nu = 1, \ldots, p),$$

où

$$\Omega(c_0, \delta, \delta_\nu) = \Omega(c_0) + \log \frac{1}{\delta} + \sum^{p} \log \frac{1}{\delta_\nu},$$

avec

$$\Omega(c_0) = \overset{+}{\log} |c_0| + \overset{+}{\log} \left|\frac{1}{c_0}\right| + \overset{+}{\log} \left|\frac{1}{c_0 - 1}\right|$$

et H, K *sont des constantes numériques.*

Des inégalités établies par M. R. Nevanlinna (9), nous déduisons

$$(26) \qquad m(r, 1) < m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f - 1}\right) + 7 \log 2.$$

(9) R. Nevanlinna, *Théorème de Picard-Borel*, Paris, 1929, p. 65 et 141.

Ajoutons $N(r, 1)$ aux deux membres et appliquons ensuite au premier membre le premier théorème fondamental de M. R. Nevanlinna qui donne ici

$$m(r, 1) + N(r, 1) = m(r, f) + h(r, 1) \tag{27}$$

et

$$|h(r, 1)| \leq \left| \log |c_0 - 1| \right| + \log 2,$$

il vient

$$m(r, f) < N(r, 1) + Q(r), \tag{28}$$

avec

$$Q(r) = m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f-1}\right) + \left| \log |c_0 - 1| \right| + 8 \log 2.$$

Cherchons une limitation pour le second membre de (28) et considérons en premier lieu le terme $N(r, 1)$. La relation (27) donne

$$N(r, 1) < m(r, f) + \left| \log |c_0 - 1| \right| + \log 2,$$

puis en vertu d'un résultat connu, pour une fonction holomorphe f dans le cercle unité admettant plus d'une valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel, le rapport $\dfrac{m(r, f)}{\log \frac{1}{1-r}}$ est nécessairement borné, donc pour $r \geq r_0$

$$m(r, f) < \lambda \log \frac{1}{1-r}, \tag{29}$$

λ étant une constante qui peut dépendre de c_0 et c_k. Mais en prenant le logarithme des deux membres de (29) on voit que pour r_0 suffisamment grand, on a

$$m(r, f) < \left(\log \frac{1}{1-r} \right)^2$$

et *a fortiori*

$$N(r, 1) < \frac{1}{1-r} \log \frac{1}{1-r} + \left| \log |c_0 - 1| \right| + \log 2. \tag{30}$$

En second lieu, majorons le premier terme de $Q(r)$ et appliquons le lemme II du n° 4. Dans la première alternative de ce lemme, l'inégalité (25) est *a fortiori* vérifiée. Considérons donc la seconde; on a alors, pour $0 \leq r_0 \leq r < \rho < 1$, l'inégalité

$$m\left(r, \frac{f}{f'}\right) < \frac{1}{(\rho - r)^2} \left[\alpha_1 \left(\log |c_0| + \sum_{\nu}^{p} \log \frac{1}{\delta_\nu} \right) + \beta_1 \log \frac{1}{\rho - r} + \gamma_1 \log V(\rho, f) \right]. \tag{31}$$

D'après la formule de Jensen, on a

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) < m(r, f) + \log \left| \frac{1}{c_0} \right|,$$

par suite

$$(32)\qquad \begin{cases} V(r, f) < 2\, m(r, f) + \log\left|\frac{1}{c_0}\right|, \\ \overset{+}{\log} V(r, f) < \overset{+}{\log} m(r, f) + \log\left|\frac{1}{c_0}\right| + 2\log 2, \end{cases}$$

l'inégalité (31) peut donc s'écrire

$$(33)\quad m\left(r, \frac{f}{f'}\right) < \frac{1}{(\rho - r)^2} \times \left[\alpha'\left(\overset{+}{\log}|c_0| + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right| + \sum^{p} \log\frac{1}{\delta_\nu}\right) + \beta' \log\frac{1}{\rho - r} + \gamma' \overset{+}{\log} m(\rho, f)\right]$$

pour $0 \leq r_0 \leq r < \rho < 1$.

Considerons en dernier lieu les deux termes suivants de $Q(r)$. M. R. Nevanlinna a donné pour $T\left(r, \frac{f'}{f}\right)$ relatif à une fonction méromorphe f une limitation que nous pouvons mettre dans le cas présent sous la forme :

$$(34)\qquad m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < A_1\left(\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right| + \log\frac{1}{\delta}\right) + B_1 \log\frac{1}{\rho - r} + C_1 \overset{+}{\log} m(\rho, f),$$

pour $0 < \delta \leq r < \rho < 1$, quelque petit que soit δ.

En appliquant cette inégalité à la fonction $f - 1$, il vient

$$(34')\qquad m\left(r, \frac{f'}{f-1}\right) < A'\left(\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0 - 1}\right| + \log\frac{1}{\delta}\right) + B'\frac{1}{\rho - r} + C' \overset{+}{\log} m(\rho, f).$$

Si l'on porte toutes les bornes données par (30), (33), (34) et (34′) dans (28), on obtient une inégalité de forme

$$(35)\qquad m(r, f) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha\Omega(c_0, \delta, \delta_\nu) + \beta \log\frac{1}{\rho - r} + \gamma \overset{+}{\log} m(\rho, f)\right].$$

Appliquons alors le lemme B à cette inégalité; il vient

$$(36)\qquad m(r, f) < \frac{1}{(1 - r)^2}\left[H\Omega(c_0, \delta, \delta_\nu) + K \log\frac{2}{1 - r}\right],$$

H, K étant deux constantes numériques.

Cette inégalité établie pour $r_0 \leq r < 1$ reste valable pour $\delta \leq r < r_0$, si l'on renforce éventuellement les coefficients H, K.

Maintenant l'inégalité (3) donne

$$(37)\qquad \log M(r, f) < \frac{R + r}{R - r} m(R, f),$$

et de (37) et (36), on déduit l'inégalité suivante, en prenant R tel que $R - r = 1 - R$

$$\log M(r, f) < \frac{1}{(1 - r)^2}\left[H\Omega(c_0, \delta, \delta_\nu) + K \log\frac{2}{1 - r}\right].$$

En vertu du théorème sur le module maximum que nous avons déjà appliqué dans la démonstration du lemme II, on peut conclure que pour tout point z intérieur au cercle $|z|=r$ avec $0<\delta\leq r<1$,

$$\log|f(z)|<\frac{1}{(1-r)^3}\left[H\Omega(c_0,\delta,\delta_\nu)+K\log\frac{2}{1-r}\right].$$

En particulier, on a le théorème :

Théorème A_0. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité, définie par (24); si f ne s'annule pas et admet 1 comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel, alors, en supposant $f(0)\neq 1$, on a, pour $0<\delta\leq r<1$ et quelque petit que soit δ, l'inégalité*

$$\log M(r,f)<\frac{1}{(1-r)^3}\left[H\Omega(c_0,\delta)+K\log\frac{2}{1-r}\right], \tag{25'}$$

où $\Omega(c_0,\delta)=\Omega(c_0)+\log\frac{1}{\delta}$ et H, K sont des constantes numériques.

II. — Critères de normalité ou de quasi-normalité.

6. Soit (f) une famille de fonctions $f(z)$ holomorphes dans le cercle unité définies par un développement de forme (24). Nous appelons famille réduite de (f) toute famille de fonctions

$$\varphi(z)=A+c_hz^h+\dots, \tag{38}$$

A étant un nombre quelconque, mais fixe par rapport aux différentes fonctions de la famille.

Le théorème A permet d'obtenir des critères de normalité ou de quasi-normalité. Démontrons d'abord le suivant :

Théorème I. — *Soit une famille de fonctions holomorphes $f(z)$ dans le cercle unité, qui sont définies par un développement de la forme (24) et dont les valeurs à l'origine sont en module bornées supérieurement; si elles s'annulent chacune p fois au plus et admettent 1 comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel, elles constituent une famille normale dans le cercle unité.*

Désignons par (γ) et (C_r) les cercles $|z|=\delta$ et $|z|=r$ respectivement; et supposons δ suffisamment petit et r suffisamment grand pour que tous les zéros de $f(z)$ se trouvent dans la couronne $C(\delta, r)$ limitée par (γ) et (C_r). En appliquant le critère de M. Montel concernant la quasi-normalité, on peut conclure immédiatement que la famille (f) est quasi normale d'ordre p au plus dans $C(\delta, r)$; mais nous allons démontrer par le théorème A qu'elle est normale dans (C_r) sans emploi d'aucun critère connu, seulement à l'aide des propositions du n° 2.

Supposons d'abord que $c_0 \neq 0, 1$; d'après la première de ces propositions, d'une suite infinie arbitrairement donnée $f_n(z)$ de la famille, on peut extraire une suite partielle $f_{\alpha_n}(z)$ et trouver p points $A_i (i = 1, \ldots, p)$ au plus, tel qu'en traçant de chaque A_i comme centre un cercle (σ_i) de rayon arbitrairement petit η_i, les fonctions $f_{\alpha_n}(z)$ ont chacune un zéro dans chaque (σ_i) et n'en ont aucun à l'extérieur des (σ_i). Ensuite, en désignant par $q = n(r, 1)$, le nombre maximum des zéros de chaque fonction $f_{\alpha_n}(z) - 1$ compris dans (C_r), de la suite $f_{\alpha_n}(z)$, on peut extraire une suite infinie $f_{\beta_n}(z)$ et trouver q points $B_j (j = 1, \ldots q)$ au plus, tel qu'en traçant de chaque B_j comme centre un cercle (σ'_j) de rayon arbitrairement petit η'_j, les fonctions $f_\beta(z)$ ont chacune un point 1 dans chaque (σ'_j) et n'en ont aucun à l'intérieur des (σ'_j).

Soient $a_{\beta_n, i}$ les zéros des fonctions $f_{\beta_n}(z)$ dans le cercle (σ_i) et $b_{\beta_n, j}$ ses points 1 dans le cercle (σ'_j). De chaque $a_{\beta_n, i}$ comme centre en fixant i, décrivons un petit cercle $(\gamma_{\beta_n, i})$ de rayon $\delta_{\beta_n, i}$ contenant (σ_i), puis de centre A_i, décrivons un petit cercle $(\overline{\sigma_i})$ de rayon $\overline{\eta}_i$ contenant tous les cercles $(\gamma_{\beta_n, i})(\beta_n = 1, 2, \ldots)$. De chaque $b_{\beta_n, j}$ comme centre, décrivons de même un petit cercle $(\gamma'_{\beta_n, j})$ de rayon $\delta'_{\beta_n, j}$ contenant (σ'_j), puis de centre B_j, décrivons un petit cercle $(\overline{\sigma'_j})$ de rayon $\overline{\eta}_j$ contenant tous les cercles $(\gamma'_{\beta_n, j})(\beta_n = 1, 2, \ldots)$. Désignons par D le domaine limité par les circonférences (γ), (C_r), $(\overline{\sigma_i})$ et $(\overline{\sigma'_j})(i = 1, \ldots, p ; j = 1, \ldots, q)$ et par D_{β_n} le domaine limité par (γ), (C_r), $(\gamma_{\beta_n, i})$ et $(\gamma'_{\beta_n, j})$ $(i = 1, \ldots, p ; j = 1, q)$.

Distinguons trois cas :

1° Les valeurs $f_{\beta_n}(0)$ ont une limite $\gamma_0 \neq 0, 1$. On peut alors en extraire une suite infinie $f_{\gamma_n}(0)$ qui converge vers γ_0. Appliquons le théorème A à la fonction $f_{\gamma_n}(z)$; il vient

$$\log |f_{\gamma_n}(z)| < \frac{1}{(1-r)^3} \left[H \Omega(f_{\gamma_n}(0), \delta, \delta_{\gamma_n, i}) + K \log \frac{2}{1-r} \right],$$

avec

$$\Omega(f_{\gamma_n}(0), \delta, \delta_{\gamma_n, i}) = \overset{+}{\log} |f_{\gamma_n}(0)| + \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{f^{(0)}_{\gamma_n}} \right| + \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{f^{(0)}_{\gamma_n} - 1} \right| + \log \frac{1}{\delta} + \sum_{i=1}^{p} \log \frac{1}{\delta_{\gamma_n, i}}.$$

La somme des trois premiers termes du second membre de cette égalité est bornée si on fait varier n et soit $\overline{\Omega}$ sa borne; et puis on a $\delta_{\gamma_n, i} > \eta_i$. Donc en désignant par η le plus petit des η_i, on a

$$\log |f_{\gamma_n}(z)| < \frac{1}{(1-r)^3} \left[H \left(\overline{\Omega} + \log \frac{1}{\delta} + p \log \frac{1}{\eta} \right) + K \log \frac{2}{1-r} \right]$$

valable pour tout point z du cercle $|z| = r$ et $0 < \delta \leq r < 1$.

Cette inégalité montre que les fonctions de la suite $f_{\gamma_n}(z)$ sont bornées dans leur ensemble dans (C_r). Il s'ensuit qu'elle est normale ; elle est donc génératrice d'une suite uniformément convergente.

2° Les valeurs $f_{\beta_n}(0)$ n'ont qu'une limite $\gamma_0 = 0$. On peut en extraire une suite $f_{\gamma_n}(0)$ convergeant vers zéro. Considérons la suite des fonctions $f_{\gamma_n}(z)$ dans le domaine D; et posons $g_{\gamma_n}(z) = \frac{1}{f_{\gamma_n}(z)}$. Comme $f_{\gamma_n}(z)$ ne s'annule pas dans D, $g_{\gamma_n}(z)$ y est holomorphe. En posant

$$g_{\gamma_n}(z) = g_{\gamma_n}(0) + \psi_{\gamma_n}(z),$$

l'inégalité

$$|f_{\gamma_n}(z)| < \frac{1}{|g_{\gamma_n}(0)| - M(r, \psi_{\gamma_n})}$$

montre que la suite $f_{\gamma_n}(z)$ converge uniformément vers zéro.

3° $\gamma_0 = 1$. On démontre de la même façon que dans le cas précédent que de la suite $f_{\beta_n}(z)$, on peut extraire une suite qui converge uniformément vers 1 dans le domaine D.

En résumé, on peut conclure que la famille donnée est normale dans D. Comme δ, η_i et η'_j, par suite $\delta_{\beta_n, i}$, $\delta'_{\beta_n, j}$ ainsi que η_{1i}, η'_{1j} et η peuvent devenir aussi petits que l'on veut, elle l'est aussi dans le cercle (C_r) privé de points O, A_i et B_j ($i = 1, \ldots, p$; $j = 1, \ldots, q$). Il s'ensuit que la famille donnée est quasi normale dans (C_r) avec les points O, A_i et B_j comme points irréguliers possibles. Nous allons démontrer que ce sont aussi des points réguliers.

O est régulier en vertu de la proposition II du n° 2, car les fonctions de la famille ne s'annulent pas dans (γ).

Prenons un point quelconque P parmi les points A_i et B_j, et traçons de centre P un petit cercle (γ') tel qu'il n'existe aucun de ces points sur son contour ou dans (γ') autre que P. La famille (f) est normale sur la circonférence (γ'); elle est donc génératrice d'une suite partielle $f_{\lambda_n}(z)$ convergeant uniformément vers une fonction holomorphe ou la constante infinie, comme les $f_{\lambda_n}(z)$ sont bornés dans leur ensemble sur (γ'), cette limite ne peut être infinie; par conséquent la suite $f_{\lambda_n}(z)$ converge uniformément vers une fonction holomorphe sur (γ'). En vertu du théorème de Weierstrass, la convergence est alors uniforme pour tout le cercle (γ'), et l'on peut conclure que la famille est normale dans (γ').

Donc la famille est normale dans (C_r), et, par suite, dans le cercle unité puisque r peut être aussi près de 1 qu'on veut.

Si maintenant $f(0) = 0$, on peut poser

$$F(z) = f(z) + \lambda, \qquad \text{avec} \quad \lambda \neq 0, 1,$$

et ce qui précède est applicable aux fonctions $F(z)$. Or la convergence uniforme d'une suite de F entraîne celle de la suite correspondante de f, donc la normalité de la famille (F) entraîne celle de la famille (f). Si $f(0) = 1$, on pose

$$F(z) = f(z) + \lambda, \qquad \text{avec} \quad \lambda \neq 0, -1.$$

En particulier, on a la proposition :

Toute famille de fonctions holomorphes dans le cercle unité, définies par un développement de la forme (38) *s'annulant chacune p fois au plus et admettant* 1 *comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel est normale dans le cercle unité.*

THÉORÈME II. — *Toute famille de fonctions holomorphes $f(z)$ dans le cercle unité, telle que les fonctions $\varphi(z)$ de l'une de ses familles réduites s'annulent chacune p fois au plus et admettent* 1 *comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel, est normale dans le cercle unité.*

D'après le théorème précédent, la famille (φ) est normale dans le cercle unité; nous allons démontrer, en nous inspirant d'un procédé de M. Montel, que la normalité de la famille (φ) entraîne celle de la famille (f). Posons

$$f(z) = \varphi(z) + C \qquad \text{avec} \quad C = c_0 - A. \tag{39}$$

Je dis que de toute suite infinie $f_n(z)$ des fonctions de la famille (f), on peut extraire une suite uniformément convergente. En effet, à cette suite, correspond une suite $\varphi_n(z)$ de la famille (φ). Comme la dernière suite est normale, on peut en extraire une suite partielle $\varphi_{\alpha_n}(z)$ convergeant uniformément vers une fonction holomorphe $\Phi(z)$ ou la constante infinie. A cette suite, correspond une suite des fonctions $f_{\alpha_n}(z)$ qui sont liées aux $\varphi_{\alpha_n}(z)$ par la relation (39)

$$f_{\alpha_n}(z) = \varphi_{\alpha_n}(z) + C_{\alpha_n}.$$

Considérons les valeurs C_{α_n}. Deux cas peuvent se présenter :

1° Les valeurs C_{α_n} ont une limite finie γ_0. Extrayons de ces valeurs une suite C_{β_n} tendant vers γ_0. La suite correspondante $\varphi_{\beta_n}(z)$ converge uniformément vers une fonction $\Phi(z)$; par conséquent, la suite $f_{\beta_n}(z)$ converge uniformément vers une fonction $F(z)$ qui est égale à $\Phi(z) + \gamma_0$.

2° Les valeurs C_{α_n} n'ont pour limite que l'infini. Alors on peut extraire de ces valeurs une suite C_{β_n} tendant vers l'infini. Comme la suite $\varphi_{\beta_n}(z)$ converge uniformément vers $\Phi(z)$, on voit par la relation

$$f_{\beta_n}(z) = \varphi_{\beta_n}(z) + C_{\beta_n}$$

que la suite $f_{\beta_n}(z)$ converge uniformément vers l'infini.

7. Nous pouvons encore démontrer le théorème suivant qui généralise le théorème bien connu de M. Montel.

THÉORÈME III. — *Toute famille de fonctions $f(z)$ holomorphes dans le cercle unité, s'annulant chacune p fois au plus et admettant* 1 *comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel, est quasi normale d'ordre p au plus dans le cercle unité.*

On peut partir du théorème de M. Montel et l'on arrive immédiatement à la conclusion. Mais nous pouvons aussi donner une démonstration en nous appuyant sur le théorème A sans employer aucun critère connu. Nous supposons d'abord $f(0) \neq 0, 1$ et nous utilisons les notations du théorème I. En raisonnant comme dans ce théorème, de toute suite infinie $f_n(z)$ de la famille, on peut extraire une suite partielle $f_{\alpha_n}(z)$ telle que les fonctions $f_{\alpha_n}(z)$ ne s'annulent pas et ne prennent pas 1 dans le domaine D.

1° Les valeurs $f_{\alpha_n}(0)$ ont une limite $\gamma_0 \neq 0, 1, \infty$. On peut alors extraire de ces valeurs une suite $f_{\beta_n}(0)$ telle que $\Omega(c_0)$ reste borné et que $f_{\beta_n}(0)$ converge vers γ_0. En appliquant le théorème A aux fonctions de la suite correspondante $f_{\beta_n}(z)$, on obtient comme dans le théorème I, l'inégalité

$$\log |f_{\beta_n}(z)| < \frac{1}{(1-r)^3}\left[H\Omega(f_{\beta_n}(0), \delta, \eta) + K \log \frac{2}{1-r}\right]$$

valable dans tout le cercle $|z| = r$, avec $0 < \delta \leq r < 1$.

Cette inégalité montre que les $f_{\beta_n}(z)$ sont bornés dans leur ensemble dans (C_r). On peut conclure comme pour le théorème I que la suite $f_{\beta_n}(z)$ est normale dans le cercle (C_r); elle est donc génératrice d'une suite uniformément convergente.

2° Les $f_{\alpha_n}(0)$ n'ont pour limite que $\gamma_0 = 1$. Extrayons de ces valeurs une suite $f_{\lambda_n}(0)$ tendant vers 1. Considérons la suite $f_{\lambda_n}(z)$; les fonctions $g_{\lambda_n}(z) = \frac{1}{f_{\lambda_n}(z) - 1}$ sont holomorphes dans D et la suite $g_{\lambda_n}(0)$ tend vers l'infini; on peut donc écrire

$$|f_{\lambda_n}(z) - 1| < \frac{1}{|g_{\lambda_n}(0)| - M(r, \psi_{\lambda_n})}, \qquad \text{où} \quad \psi_{\lambda_n}(z) = g_{\lambda_n}(z) - g_{\lambda_n}(0)$$

et l'on voit que la suite $f_{\lambda_n}(z)$ converge uniformément vers 1 dans D.

3° Dans le cas où $\gamma_0 = 0$ ou le cas où $\gamma_0 = \infty$, on montre d'une façon analogue que la suite $f_{\beta_n}(z)$ est génératrice d'une suite partielle qui converge uniformément vers zéro ou ∞ dans D.

En résumé, on peut conclure que la famille donnée est normale dans D. En raisonnant ensuite comme dans le théorème I, on peut conclure qu'elle est quasi normale dans (C_r), avec A_i et B_j comme points irréguliers possibles. Mais pour un point B_j, s'il est distinct de A_i, alors dans son voisinage les fonctions ne s'annulent pas et en vertu de la proposition II du n° 2, la famille est normale; par suite, ce point est régulier. Donc il y a au plus p points irréguliers $A_i (i = 1, \ldots, p)$ et la famille (f) est quasi normale d'ordre p au plus dans (C_r), par suite dans le cercle unité.

Si $f(0) = 0$, on pose $F = f + \lambda$, avec $\lambda \neq 0, 1$ et si $f(0) = 1$, on pose $F = f + \lambda$, avec $\lambda \neq 0, -1$ pour être ramené au cas précédent.

En particulier, on a le critère :

THÉORÈME III_0. — *Toute famille de fonctions $f(z)$ holomorphes dans le cercle unité, ne s'annulant pas et admettant* 1 *comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel, est normale dans le cercle unité.*

Si, en particulier, on suppose que le nombre de points 1 de f est fini, on retrouve un théorème dû à M. Montel.

8. Les critères analogues à tous ceux qui précèdent peuvent s'obtenir immédiatement pour un domaine connexe quelconque, au moyen d'un théorème de M. Montel, d'après lequel une famille de fonctions est normale dans un domaine D, si elle est normale en chaque point de D.

III. — Critères de normalité ou de quasi-normalité pour une famille de fonctions méromorphes.

9. Les résultats que nous avons obtenus pour des familles de fonctions holomorphes s'étendent aisément au cas des fonctions méromorphes. Donnons d'abord une définition.

Soit (f) une famille de fonctions $f(z)$ méromorphes dans le cercle unité; nous appelons aussi *famille réduite* de (f) toute famille (φ) dont les fonctions $\varphi(z)$ sont obtenues en remplaçant $f(0)$ par un nombre fixe A.

THÉORÈME I'. — *Soit une famille de fonctions $f(z)$ méromorphes dans le cercle unité, ayant dans le voisinage de l'origine un développement de même forme que* (38)*; si elles ne prennent pas une valeur α, prennent chacune une valeur $\beta \neq \alpha$ au plus p fois, et admettent une valeur $\gamma \neq \alpha, \beta$ comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel, la famille est normale dans le cercle unité.*

Nous pouvons supposer $A \neq \alpha, \beta, \gamma$ et débarrasser la restriction après comme dans le théorème I. Posons

$$F = \frac{f-\beta}{f-\alpha}\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}. \tag{40}$$

Les fonctions F sont holomorphes dans le cercle unité et ne s'y annulent chacune que p fois au plus. Je dis, de plus, qu'elles admettent 1 comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel. En effet, d'abord l'identité (40) est de la forme

$$F = \frac{Af+B}{A'f+B'}, \tag{41}$$

avec

$$AB' - BA' = (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma) \neq 0,$$

on sait alors que $T(r, F)$ et $T(r, F)$ sont de même ordre. Ensuite les $F-1$ ont

les mêmes zéros que les $f-\gamma$, donc les $N\left(r, \frac{1}{F-1}\right)$ sont de même ordre que les $N\left(r, \frac{1}{f-\gamma}\right)$. Par conséquent, 1 est bien une valeur exceptionnelle de Picard-Borel pour les fonctions F.

Si l'on remarque encore que $F(0) \neq 1$, on peut alors conclure d'après le théorème I que la famille (F) de fonctions $F(z)$ est normale dans le cercle unité.

Or la convergence uniforme d'une suite infinie quelconque des fonctions F dans le cercle unité entraîne celle de la suite correspondante des fonctions f, donc la normalité de la famille (F) entraîne celle de la famille (f).

Théorème II'. — *Toute famille de fonctions $f(z)$ méromorphes dans le cercle unité, telle que les fonctions $\varphi(z)$ de l'une de ses familles réduites ne prennent pas une valeur α, prennent chacune une valeur $\beta = \alpha$ au plus p fois et admettent une valeur $\gamma \neq \alpha, \beta$ comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel, est normale dans le cercle unité.*

Pour le démontrer, il suffit de procéder comme pour le théorème II.

Théorème III'. — *Toute famille de fonctions $f(z)$ méromorphes dans le cercle unité, ne prennent pas une valeur α, prennent au plus p fois une valeur $\beta \neq \alpha$, et admettent une valeur $\gamma \neq \alpha, \beta$ comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel est quasi normale d'ordre p au plus dans le cercle unité.*

On fait la transformation (40), et l'on voit que les fonctions F qui sont holomorphes s'annulent chacune p fois au plus et admettent 1 comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel. En vertu du théorème III, elles forment une famille quasi normale d'ordre p et l'on conclut comme dans le théorème I' que la quasi-normalité de (F) entraîne celle de (f).

En particulier, si les f ne prennent pas aussi β, la famille est normale.

10. On obtient, comme dans le cas des fonctions holomorphes, des théorèmes analogues pour un domaine connexe quelconque.

IV. — Extensions du théorème de Schottky et du théorème de Landau.

11. On a déjà le théorème A qui peut être considéré comme une extension du théorème de Schottky. Mais nous allons encore trouver, au lieu de (25), des inégalités plus précises dans lesquelles les quantités δ et δ_ν ne figurent pas. Nous commençons par démontrer les lemmes suivants à l'aide du théorème de Boutroux-Cartan [10] :

Lemme I*a*. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité; on*

[10] *Ann. de l'Ec. Norm. Sup.*, 3e série, t. 45, 1928.

désigne par $a_\nu[\nu = 1, \ldots, n(r, 0)]$ *ses zéros compris dans le cercle* $|z| = r$. *Si les cercles d'exclusion* (Γ) *relatifs à l'inégalité* $\Pi|z - a_\nu| > h^{n(r,0)}$ *dont la somme des rayons est égale à* $2eh$, *se trouvent entièrement à l'intérieur de la circonférence* $|z| = r$, *on a pour* $0 < r < \rho < 1$

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) < A_k n(r, 0) \log \frac{1}{h} + B_k \log \frac{1}{\rho - r} + C_k \overset{+}{\log} V(\rho, f), \tag{42}$$

où h *est un nombre positif arbitraire, mais dépendant de* r *et* A_k, B_k, C_k *sont des constantes numériques.*

Reprenons l'inégalité (12) et cherchons une borne de

$$E = \sum \frac{1}{|z - a_\nu|^k} \qquad [\nu = 1, \ldots, n(R, 0)].$$

En prenant le $\overset{+}{\log}$ des deux membres, on a

$$\overset{+}{\log} E \leq k \sum \log \frac{2}{|z - a_\nu|} + \log n(R, 0).$$

D'après le théorème de Boutroux-Cartan, on obtient immédiatement, pour tout point z extérieur aux cercles dont la somme des rayons est égale à $2eh$,

$$\log E \leq k\, n(R, 0) \log \frac{1}{h} + \log n(R, 0). \tag{43}$$

En désignant pour le moment par $\log \bar{E}(R)$ le second membre de cette inégalité et en procédant comme dans le lemme I, on trouve

$$\overset{+}{\log}\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| < A'_k\left[\log \bar{E}(r) + \log n(r, 0)\right] + B'_k \log \frac{1}{\rho - r} + C'_k \overset{+}{\log} V(\rho, f)$$

dès que l'on prend $h < 1$. Il en résulte immédiatement l'inégalité (42).

Lemme II*a*. — *Soit* $f(z)$ *une fonction holomorphe dans le cercle unité; on conserve les notations du lemme précédent et l'on fait la même hypothèse sur les cercles d'exclusion* (Γ). *En supposant* $f(0) \neq 0$, *on a, ou bien pour tout point* z *intérieur au cercle* $|z| = r$,

$$|f(z)| < |f(0)| + M_k, \tag{44}$$

ou bien pour $0 \leq r_0 \leq r < \rho < 1$

$$m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < N(r, 0) + \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha_k \omega_0(r) + \beta_k \log \frac{1}{\rho - r} + \gamma_k \overset{+}{\log} V(\rho, f)\right], \tag{45}$$

où

$$\omega_0(r) = \log |f(0)| + n(r, 0) \log \frac{1}{h}$$

et $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ *sont des constantes numériques ne dépendant que de* k.

La première partie du lemme se démontre comme dans le lemme II. Pour le premier cas de la seconde partie, on trouve, en vertu du lemme précédent, l'inégalité

$$(46) \qquad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < \mathrm{N}(r, 0) + \mathrm{A}_k \omega_0(r) + \mathrm{B}_k \log \frac{1}{\rho - r} + \mathrm{C}_k \overset{+}{\log} \mathrm{V}(\rho, f)$$

qui entre évidemment dans (45).

Dans le second cas, nous avons encore l'inégalité (19). Pour le dernier terme du crochet de cette inégalité, on a pour tout point z extérieur aux (Γ) et intérieur au cercle $|z| < \mathrm{R}$,

$$(47) \qquad \sum_{\nu} \log \left| \frac{\mathrm{R}^2 - \bar{a}_\nu z}{z(z - a_\nu)} \right| < \log \prod_{\nu} \left| \frac{2}{z - a_\nu} \right| \qquad [\nu = 1, \ldots, n(\mathrm{R}, 0)]$$

$$< n(\mathrm{R}, 0) \log \frac{1}{h} + n(\mathrm{R}, 0) \log 2.$$

En tenant compte de ce résultat et en appliquant le lemme Ia à $m\left(\mathrm{R}, \frac{f^{(k)}}{f}\right)$, le même raisonnement que dans le lemme II nous conduit à la conclusion.

Théorème a. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe définie par le développement (24) dans le cercle unité; on suppose qu'elle s'y annule seulement p fois et y admette 1 comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel. Si en désignant par $a_\nu (\nu = 1, \ldots, p)$ ses zéros, les cercles d'exclusion (Γ) relatifs à l'inégalité*

$$\prod_{\nu} |z - h_\nu| > h^p \qquad (\nu = 1, \ldots, p),$$

dont la somme des rayons est égale à $2eh$, sont compris dans un cercle de centre O et de rayon $\lambda (\lambda < 1)$, alors en supposant $c_0 \neq 1$, on a, pour tout point z intérieur au cercle $|z| = r$ avec $\lambda < r < 1$,

$$(48) \qquad \log |f(z)| < \frac{1}{(1 - r)^3} \left[\mathrm{H} \left(\Omega(c_0) + \log \frac{1}{r} + p \log \frac{1}{h} \right) + \mathrm{K} \log \frac{2}{1 - r} \right],$$

où h est un nombre positif arbitraire, mais dépendant de λ et de r; et H, K *sont numériques.*

Nous trouvons comme dans le théorème A l'inégalité (28). Pour limiter son second membre, nous appliquons le lemme IIa à $m\left(r, \frac{f}{f'}\right)$. Dans la première alternative, l'inégalité (48) est déjà, *a fortiori*, vérifiée; dans la seconde, en désignant par $\mathrm{S}_1(r)$ le dernier terme de (45), on a

$$(49) \qquad m(r, f) < \mathrm{N}(r, 0) + \mathrm{N}(r, 1) + \mathrm{S}_1(r) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f - 1}\right) + \left| \log |c_0 - 1| \right| + 8 \log 2.$$

Majorons le second membre de cette inégalité. Pour $N(r, o)$ comme pour $N(r, 1)$, nous utilisons la borne de (30); et pour les deux termes qui suivent $S_1(r)$, nous appliquons le lemme de M. R. Nevanlinna. Puis $S_1(r)$ peut s'écrire

$$S_1(r) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha'\left(\log\left|\frac{1}{c_0}\right| + \omega_0(r)\right) + \beta' \log\frac{1}{\rho - r} + \gamma' \overset{+}{\log} m(\rho, r)\right].$$

Alors l'inégalité (48) prend la forme

$$(50)\quad m(r, f) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha_1\left(\Omega(c_0) + \log\frac{1}{r} + p\log\frac{1}{h}\right) + \beta_1 \log\frac{1}{\rho - r} + \gamma_1 \overset{+}{\log} m(\rho, f)\right].$$

Le coefficient de α_1 est une fonction positive de r; on peut appliquer à cette inégalité le lemme que nous avons donné récemment (11) et il vient pour $o < \lambda \leq r_0 \leq r < 1$

$$(51)\qquad m(r, f) < \frac{1}{(1 - r)^2}\left[H'\left(\Omega(c_0) + \log\frac{1}{r} + p\log\frac{1}{h}\right) + K' \log\frac{2}{1 - r}\right],$$

inégalité qui sera valable pour $\lambda < r < 1$, si l'on renforce éventuellement les coefficients H' et K'. Ce qui donne immédiate l'inégalité (48).

Remarque. — On peut comparer ce théorème avec celui de M. Valiron concernant une fonction holomorphe dans le cercle unité, qui y prend au plus n fois les valeurs o et 1 et qui vérifie une condition complémentaire (12).

12. En faisant une hypothèse complémentaire, on peut obtenir une limitation valable pour toute valeur de r, sauf $r = o$ et sans intervention d'aucune valeur arbitraire.

Théorème α. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe définie par (24) dans le cercle unité; on suppose que $c_0 \neq 1$ et que c_h soit en module égal ou supérieur à un nombre positif λ. Si $f(z)$ s'annule seulement p fois et admet comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel, on a pour $o < r < 1$*

$$(52)\qquad \log M(r, f) < \frac{1}{(1 - r)^2}\left[H\left(\Omega(c_0) + \log\frac{1}{r}\right) + K \log\frac{2}{1 - r}\right],$$

où $\Omega(c_0)$ a la signification donnée dans le théorème A *et* H, K *sont des constantes numériques.*

Nous avons encore (28). En appliquant au premier terme de $Q(r)$ la formule de Jensen, on trouve

$$(53)\qquad m(r, f) < N(r, o) + N(r, 1) + S(r),$$

avec

$$S(r) = 2\, m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f - 1}\right) + \log\left|\frac{c_0}{hc_h}\right| + \left|\log|c_0 - 1|\right| + 8\log 2.$$

(11) Hiong, *C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 1628-1630.

(12) Valiron, *Mém. Sc. Math.*, fasc. LXXXIX, p. 15-17.

Si l'on majore le second membre de l'inégalité (53) comme on l'a fait pour celui de (49) dans le théorème précédent, il vient pour $0 < r_0 \leq r < \rho < 1$

$$(54)\quad m(r,f) < \frac{1}{\rho - r}\left[\alpha_1\left(\Omega(c_0) + \log\left|\frac{1}{c_h}\right| + \log\frac{1}{r}\right) + \beta_1 \log\frac{1}{\rho - r} + \gamma_1 \overset{+}{\log} m(\rho, f)\right].$$

D'après le lemme que nous venons d'appliquer à (50), nous obtenons alors pour $0 < r_0 < r < 1$ l'inégalité

$$(55)\qquad m(r,f) < \frac{1}{1-r}\left[H_1\left(\Omega(c_0) + \log\left|\frac{1}{c_h}\right| + \log\frac{1}{r}\right) + K_1 \log\frac{2}{1-r}\right];$$

elle devient valable pour $0 < r < 1$, si l'on remplace au besoin les coefficients H_1, K_1 par des quantités plus grandes.

Maintenant en vertu de l'hypothèse, on a $|c_h| \geq \lambda$; et l'inégalité (55) devient

$$(56)\qquad m(r,f) < \frac{1}{1-r}\left[H'\left(\Omega(c_0) + \log\frac{1}{r}\right) + K' \log\frac{2}{1-r}\right].$$

De cette inégalité, on déduit tout de suite (52).

Remarque. — Pour majorer $N(r, 0)$, on peut encore utiliser le théorème de Boutroux-Cartan, on peut aussi remarquer que

$$N(r,0) = \sum_{\nu=1}^{p} \log\frac{r}{|a_\nu|} < p \log\frac{1}{r_1}, \qquad \text{avec} \quad r_1 = |a_1|$$

et écrire (52) en mettant p en évidence

$$(52')\qquad \log M(r,f) < \frac{1}{(1-r)^2}\left[H\left(\Omega(c_0) + \log\frac{1}{r}\right) + K \log\frac{2}{1-r}\right] + p \log\frac{1}{r_1}.$$

13. Cas des fonctions méromorphes. — On peut obtenir des inégalités analogues pour les fonctions méromorphes dans le cercle unité. Cherchons d'abord à établir un théorème analogue au théorème A. Pour cela, nous commençons par démontrer les lemmes suivants :

Lemme I'. — *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle unité. Si l'on désigne par $a_\nu[\nu = 1, \ldots, n(r, 0)]$ et $b_\mu[\mu = 1, \ldots, n(r, \infty)]$ ses zéros et ses pôles compris dans le cercle $|z| = r$, respectivement et l'on décrit de chaque a_ν comme centre un cercle (γ_ν) de rayon arbitrairement petit δ_ν et de chaque b_μ comme centre un cercle (σ_μ) de rayon arbitrairement petit τ_μ, alors en supposant $f(0) = c_0 \neq 0, \infty$, on a pour $0 \leq r < \rho < 1$*

$$(57)\qquad m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) < A_k \Omega_1(c_0, \delta_\nu, \tau_\mu) + B_k \log\frac{1}{\rho - r} + C_k \overset{+}{\log} T(\rho, f),$$

où

$$\Omega_1(c_0, \delta_\nu, \tau_\mu) = \log\left|\frac{1}{c_0}\right| + \sum_\nu \frac{1}{\delta_\nu} + \sum_\mu \log\frac{1}{\tau_\mu}$$
$$[\nu = 1, \ldots, n(r, 0);\ \mu(1, \ldots, n(r, \infty))]$$

et A_k, B_k, C_k, *sont des constantes numériques ne dépendant que de* k.

Prenons la formule de Poisson-Jensen; en procédant comme dans le théorème I, on trouve

$$(58) \qquad m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) < A'_k\left(\sum_\nu \log\frac{1}{\delta_\nu} + \sum_\mu \frac{1}{\tau_\mu}\right) + B'_k \log\frac{1}{\rho - r} + C'_k \overset{+}{\log} V(\rho, f).$$

En vertu de la formule de Jensen, on a

$$V(\rho, f) = m(\rho, f) + m\left(\rho, \frac{1}{f}\right) < 2T(\rho, f) + \log\left|\frac{1}{c_0}\right|$$

et

$$(59) \qquad \overset{+}{\log} V(\rho, f) < \overset{+}{\log} T(\rho, f) + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right| + 2\log 2,$$

il vient de l'inégalité (57).

En particulier, on a pour $0 \leq r < \rho < 1$

$$(60) \qquad m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < A_1\left(\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(0)}\right| + \sum_\nu \log\frac{1}{\delta_\nu} + \sum_\mu \log\frac{1}{\tau_\mu}\right)$$
$$+ B_1 \log\frac{1}{\rho - r} + C_1 \overset{+}{\log} T(\rho, f).$$

Remarque. — Pour le cas où $k = 1$, le lemme de M. R. Nevanlinna fournit une inégalité de même nature sans l'intervention des δ_ν et τ_μ. Mais r ne peut pas s'annuler.

Lemme II'. — *Soit* $f(z)$ *une fonction méromorphe dans le cercle unité; en conservant les notations du lemme* I' *et en supposant* $f(0) \neq 0, \infty$, *on a ou bien, pour tout point* z *extérieur aux* (γ_ν), (δ_μ) *et intérieur au cercle* $|z| = r$

$$(61) \qquad |f(z)| < |f(0)| + M_k,$$

ou bien, pour $0 \leq r_0 \leq r < \rho < 1$

$$(62) \qquad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha_k \Omega_1(c_\nu, \delta_\nu, \tau_\mu) + B_k \log\frac{1}{\rho - r} + \gamma_k \overset{+}{\log} T(\rho, f)\right],$$

où

$$\Omega_1(c_0, \delta_\nu, \tau_\mu) = \log\left|\frac{1}{c_0}\right| + \sum_\nu \log\frac{1}{\delta_\nu} + \sum_\mu \log\frac{1}{\tau_\mu}; \qquad \text{avec} \quad c_0 = f(0)$$

et M_k, α_k, β_k, γ_k *sont des constantes numériques ne dépendant que de* k.

Désignons par (Cr) le cercle $|z|=r$ et par D le domaine limité par (Cr), (γ_ν) et (σ_μ); si $|f^{(k)}(z)|<1$ pour tout point z de D, on démontre comme dans le lemme I qu'on a l'inégalité (61).

Supposons donc qu'il existe dans D un point z_1 tel que $|f^{(k)}(z_1)|\geq 1$. Il y a deux cas à distinguer comme dans le lemme II :

1° On a $z_1=0$. Nous appliquons la formule de Jensen et nous obtenons

$$m\left(r,\frac{f}{f^{(k)}}\right)<m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+N\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+\log|f(0)|; \tag{63}$$

comme on sait que

$$N(r,f')<N(r,f)+\overline{N}(r,f)<2N(r,f)$$

et par suite

$$N(r,f^{(k)})<2^kN(r,f),$$

on a

$$\left\{\begin{aligned} N\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)&<N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N(r,f^{(k)})\\ &<\sum_\nu\log\frac{1}{\delta_\nu}+2^k\sum_\mu\log\frac{1}{\tau_\mu}\\ &[\nu=1,\ldots,n(r,0);\ \mu=1,\ldots,n(r,\infty)] \end{aligned}\right. \tag{64}$$

pour les δ_ν et τ_μ suffisamment petits.

En appliquant (57) au premier terme de l'inégalité (63) et en remplaçant son second terme par la borne donnée par (64), il vient

$$m\left(r,\frac{f}{f^{(k)}}\right)<A_k\left(\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(0)}\right|+\Sigma\log\frac{1}{\delta_\nu}+\Sigma\log\frac{1}{\tau_\mu}\right)+B_k\log\frac{1}{\rho-r}+C_k\overset{+}{\log}T(\rho,f), \tag{65}$$

inégalité qui entre évidemment dans (57).

2° $z_1\neq 0$. Alors $f^{(k)}(z)\geq 1$ et nous appliquons la relation (3) à la fonction $\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}$ pour le point z_1, il vient en posant $|z_1|=r$,

$$m\left(R,\frac{f}{f^{(k)}}\right)<\frac{4}{R-r_1}m\left(R,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+\frac{2}{R-r}\left[\log\left|\frac{f(z_1)}{f^{(k)}(z_1)}\right|+\sum_\nu\log\frac{2}{\delta_\nu}+2^k\sum_\mu\log\frac{1}{\tau_u}\right]$$
$$[\nu=1,\ldots,n(R,0);\ \mu=1,\ldots,n(R,\infty)].$$

En raisonnant comme dans le lemme II, on trouve l'inégalité,

$$m\left(r,\frac{f}{f^{(k)}}\right)<\frac{1}{(\rho-r)^2}\left[\alpha'_k\left(\sum_\nu\log\frac{1}{\delta_\nu}+\sum_\mu\log\frac{1}{\tau_u}\right)+\beta'_k\log\frac{1}{\rho-r}+\gamma'_k\overset{+}{\log}V(\rho,f)\right]$$
$$[\nu=1,\ldots,n(r,0);\ \mu=1,\ldots,n(r,\infty)]$$

qui peut se mettre encore d'après (59) sous la forme

$$(66)\quad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha_k''\left(\sum_{\nu} \log\frac{1}{\delta_\nu} + \sum_{\mu} \log\frac{1}{\tau_\mu}\right) + \beta_k'' \log\frac{1}{\rho - r} + \gamma_k'' \log T(\rho, f)\right]$$

valable pour $0 \leq r_0 \leq r < \rho < 1$. Cette inégalité entre également dans (57).

Théorème A'. — *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle unité, ayant dans le voisinage de l'origine un développement en série de forme*

$$(24')\qquad f(z) = c_0 + c_h z^h + \dots \qquad (c_0,\ c_h \neq 0,\ \infty);$$

On désigne respectivement par a_ν et b_μ, ses zéros et ses pôles, puis par (γ_ν) et (σ_μ) les cercles de centres a_ν et b_μ de rayons arbitrairement petits δ_ν et τ_μ. Si dans le cercle unité $f(z)$ ne prend la valeur 0 que p fois, la valeur ∞ que q fois $(\nu = 1, \dots, p;\ \mu = 1, \dots, q)$ et admet 1 comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel, alors, en supposant $c_0 \neq 1$, on a, pour tout point z extérieur aux (γ_ν) (σ_μ) et tel que $0 < \delta \leq |z| \leq r < 1$, l'inégalité

$$(67)\quad \log|f(z)| < \frac{1}{(1-r)^3}\left[H\Omega(c_0, \delta, \delta_\nu, \tau_\mu) + K\log\frac{2}{1-r}\right] \qquad (\nu = 1, \dots, p;\ \mu = 1, \dots, q),$$

où

$$\Omega(c_0, \delta, \delta_\nu, \tau_\mu) = \Omega(c_0) + \log\frac{1}{\delta} + \sum_{\nu=1}^{p} \log\frac{1}{\delta_\nu} + \sum_{\mu=1}^{q} \log\frac{1}{\tau_\mu},$$

et H, K *sont des constantes numériques.*

On déduit, des inégalités de M. R. Nevanlinna l'inégalité

$$(68)\quad T(r) < N(r, 1) + m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{f}{f-1}\right) + \left|\log|c_0 - 1|\right| + 8\log 2.$$

Pour majorer $N(r, 1)$, on a une inégalité analogue à (30). Appliquons le lemme II' au second terme du second membre, et le lemme de M. R. Nevanlinna, aux deux termes suivants; on trouve une inégalité de la forme

$$(69)\qquad T(r) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha_1\Omega(c_0, \delta, \delta_\nu, \tau_\mu) + \beta_1 \log\frac{1}{\rho - r} + \gamma_1 \overset{+}{\log} T(\rho)\right]$$

pour $0 \leq \delta \leq r_0 \leq r < \rho < 1$.

Alors, d'après le lemme B, il vient

$$(70)\qquad T(r) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[H_1\Omega(c_0, \delta, \delta_\nu, \tau_\mu) + K_1 \log\frac{2}{1-r}\right].$$

Cette inégalité établie pour $r = r_0$ reste encore valable pour $\delta \leq r < r_0$, si l'on renforce éventuellement les coefficients.

Posons maintenant

$$(71)\qquad g(z) = f(z)\prod \frac{z - b_k}{1 - \bar{b}_k z},$$

b_k étant les pôles de $f(z)$. $g(z)$ est une fonction holomorphe dans le cercle unité et $|g(z)|<|f(z)|$ pour $|z|<1$. Il s'ensuit que $T(r, g)<T(r, f)$ et

$$(72)\qquad m(r, g)<\frac{1}{(1-r)^2}\left[H_2\Omega(c_0, \delta, \delta_\nu, \tau_\mu)+K_2\log\frac{2}{1-r}\right].$$

En vertu de (37), on a

$$\log M(r, g)<\frac{R+r}{R-r}m(R, g);$$

et l'on trouve

$$(73)\qquad \log M(r, g)<\frac{1}{(1-r)^3}\left[H'\Omega(c_0, \delta, \delta_\nu, \tau_\mu)+K'\log\frac{2}{1-r}\right].$$

Désignons comme plus haut par (Cr) et (γ) les cercles $|z|=r$ et $|z|=\delta$ respectivement, puis par Δ le domaine limité par les circonférences (Cr), (γ), (γ_ν) et (σ_μ); pour tout point z de Δ, on peut écrire

$$(74)\qquad |f(z)|<|g(z)|\prod_\mu\frac{2}{(z-b_\mu)}\leqq|g(z)|\prod_\mu\frac{2}{\tau_\mu},$$

$$\log|f(z)|<\log|g(z)|+\sum_\mu^q\log\frac{1}{\tau_\mu}+q\log 2.$$

Donc on a bien une inégalité de la forme (67).

14. Les lemmes I_a et II_a s'étendent immédiatement au cas des fonctions méromorphes et on les a énoncés :

Lemme I'a. — *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle unité et l'on utilise les mêmes notations que plus haut; si les cercles d'exclusion (Γ) et (Σ) relatifs aux inégalités*

$$\Pi|z-a_\nu|>h^{n(r,0)}\quad\text{et}\quad\Pi(z-b_\mu)>l^{n(k,\infty)}$$

dont les sommes des rayons sont respectivement égales à $2eh$ et $2el$, se trouvent dans l'intérieur du cercle $|z|<r$, on a pour $0\leqq r<\rho<1$

$$(75)\quad m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right)<A_k\left[n(r, 0)\log\frac{1}{h}+n(r, \infty)\log\frac{1}{l}\right]+B_k\log\frac{1}{\rho-r}+C_k\log T(\rho, f),$$

où h et l sont des nombres positifs arbitraires, mais dépendant de r; et A_k B_k, C_k sont des constantes numériques.

Lemme II'a. — *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle unité, on conserve les notations précédentes et l'on fait la même hypothèse que dans le lemme I'a sur les cercles d'exclusion. En supposant $f(0)\neq 0, \infty$, on a ou bien, pour tout point z extérieur aux (Γ), (Σ) et tel que $(z)\leqq r$ une inégalité de forme (43), ou bien pour $0\leqq r_0\leqq r<\rho<1$ l'inégalité*

$$(76)\quad m\left(r, \frac{f}{f^{(k)}}\right)<N(r, 0)+N(r, 1)+\frac{1}{(\rho-r)^2}\left[\alpha_k\bar{\omega}_0(r)+\beta_k\log\frac{1}{\rho-r}+\gamma_k\overset{+}{\log}T(\rho, f)\right],$$

où $\omega_0(r) = \log|f(0)| + n(r,0)\log\frac{1}{h} + n(r,\infty)\log\frac{1}{l}$ *et* α_k, β_k, γ_k *sont des constantes numériques ne dépendant que de* k.

Au moyen de ces deux lemmes, on peut établir le théorème :

THÉORÈME a'. — *Soit une fonction méromorphe dans le cercle unité ayant* (24′) *pour développement dans le voisinage de* 0; *on suppose que dans le cercle unité, elle ne prenne* 0 *que* p *fois,* ∞ *que* q *fois et admet* 1 *comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel. Si, suivant les notations précédentes, les cercles d'exclusion* (Γ) *et* (Σ) *sont compris dans le cercle* $|z| = \lambda (\lambda < 1)$, *alors, en supposant* $c_0 \neq 1$, *on a, pour tout point* z *extérieur aux* (Γ), (Σ) *et tel que* $0 < |z| \leq r < 1$ *et* $\lambda < r < 1$, *l'inégalité*

$$(77)\quad \log|f(z)| < \frac{1}{(1-r)^3}\left[H\Omega(c_0) + \log\frac{1}{r} + p\log\frac{1}{h} + q\log\frac{1}{l} + K\log\frac{2}{1-r}\right] + q\log\frac{2}{l},$$

où h *et* l *sont des nombres positifs arbitraires, mais dépendant de* λ, *et* H, K *sont des constantes numériques ne dépendant que de* k.

Nous avons, comme dans le théorème A′, l'inégalité (68) et nous appliquons le lemme II′ a au terme $m\left(r, \frac{f}{f'}\right)$. Il suffit de considérer la seconde alternative; en procédant de la même façon que pour le théorème a et en prenant h et k de façon que les (Γ) et (Σ) soient compris dans les cercles $|z| = \lambda$, on est conduit à l'inégalité

$$T(r) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha_1(\Omega(c_0) + H_0(r)) + \beta_1\log\frac{1}{\rho - r} + \gamma_1 \overset{+}{\log} V(\rho, f)\right],$$
$$(0 < \lambda < r < \rho < 1),$$

où l'on pose

$$H_0(r) = \log\frac{1}{r} + p\log\frac{1}{h} + q\log\frac{1}{l}.$$

En vertu de (57) cette inégalité s'écrit encore

$$(78)\qquad T(r) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[\alpha'(\Omega'(c_0) + H(r)) + \beta'\log\frac{1}{\rho - r} + \gamma' \overset{+}{\log} T(\rho)\right].$$

D'après le lemme appliqué à (48) du théorème a, nous obtenons pour $\lambda < r < 1$,

$$(79)\qquad T(r) < \frac{1}{(1-r)^2}\left[H'\left(\Omega(c_0) + \log\frac{1}{r} + p\log\frac{1}{h} + q\log\frac{1}{l}\right) + K'\log\frac{2}{1-r}\right].$$

Maintenant considérons la fonction holomorphe $g(z)$ définie par (71). En vertu de (74), on a pour tout point z de Δ

$$(80)\qquad \log|f(z)| < \log|g(z)| + \log\prod\frac{2}{|z - b_\mu|}$$

et d'après le théorème de Boutroux-Cartan, nous avons pour le dernier terme du second membre de (80)

$$\log \prod \frac{2}{|z-b_\mu|} < q \log \frac{2}{h} \tag{81}$$

pour tout point z extérieur aux cercles (Σ).

Or, nous avons vu que $m(r, g) < \mathrm{T}(r, f)$ et

$$\log \mathrm{M}(r, g) < \frac{2}{\mathrm{R}-r} m(\mathrm{R}, g) < \frac{2}{\mathrm{R}-r} \mathrm{T}(\mathrm{R}, f),$$

donc, en posant $\mathrm{R} - r = \frac{1-r}{2}$, il vient *a fortiori*

$$\log |g(z)| < \frac{1}{(1-r)^3}\left[\mathrm{H}\left(\Omega(c_0) + \log\frac{1}{r} + \rho \log\frac{1}{h} + q \log\frac{1}{l}\right) + \mathrm{K} \log\frac{2}{1-r}\right]. \tag{82}$$

Des inégalités (80), (81) et (82), on déduit alors (77).

15. Nous allons maintenant établir une proposition analogue au théorème α :

Théorème α'. — *Soit une fonction méromorphe dans le cercle unité ayant dans le voisinage de l'origine un développement en série entière de forme* (24′); *on suppose que* $c_0 \neq 1$ *et* c_h *est en module égal ou supérieur à un nombre positif* λ. *Si elle ne prend* 0 *que p fois et* ∞ *que q fois et admet* 1 *comme valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel, on a pour tout point z extérieur aux* (σ_μ) *et tel que* $\delta \leq |z| < 1$

$$\log |f(z)| < \frac{1}{(1-r)^2}\left[\mathrm{H}\Omega(c_0, \delta, \tau_\mu) + \mathrm{K} \log\frac{2}{1-r}\right], \tag{83}$$

où $\Omega(c_0, \delta, \tau_\mu) = \Omega(c_0) + \log\frac{1}{\delta} + \sum_\mu^q \log\frac{1}{\tau_\mu}$; *et* H, K *sont des constantes numériques.*

Prenons l'inégalité (68) et appliquons au terme $m\left(r, \frac{f}{f'}\right)$ la forme de Jensen; il vient

$$\mathrm{T}(r) < \mathrm{N}(r, 1) + 2m\left(r + \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f-1}\right) + \log\left|\frac{c_0}{hc_h}\right| + \log|c_0 - 1| + 8\log 2. \tag{84}$$

Majorons le premier terme du second membre comme plus haut et les deux termes suivants au moyen du lemme de M. R. Nevanlinna avec l'inégalité mise sous la forme :

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < \mathrm{A}_1\left(\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right| + \log\frac{1}{r}\right) + \mathrm{B}_1 \log\frac{1}{\rho - r} + \mathrm{C}_1 \log \mathrm{T}(\rho, f); \tag{85}$$

il vient ainsi une égalité qu'on peut écrire

$$\mathrm{T}(r) < \frac{1}{\rho - r}\left[\alpha_1\left(\Omega(c_0) + \log\left|\frac{1}{c_h}\right| + \log\frac{1}{r}\right) + \beta_1 \log\frac{1}{\rho - r} + \gamma_1 \overset{+}{\log} \mathrm{T}(\rho)\right] \qquad (r < \rho < 1).$$

Si nous appliquons le lemme utilisé dans le théorème a, nous obtenons :

$$(86) \qquad T(r) < \frac{1}{1-r}\left[H'\left(\Omega(c_0) + \log\left|\frac{1}{c_k}\right| + \log\left|\frac{1}{r}\right|\right) + K' \log\frac{2}{1-r}\right]$$

qui est valable pour $0 < r < 1$ en renforçant éventuellement les coefficients.

En vertu de l'hypothèse, on a donc pour $0 < r < 1$

$$(87) \qquad T(r) < \frac{1}{1-r}\left[H\left(\Omega(c_0) + \log\frac{1}{r}\right) + K \log\frac{2}{1-r}\right].$$

Considérons maintenant la fonction holomorphe $g(z)$ définie par (71). De (74), on a pour tout point z du domaine Δ

$$\log|f(z)| < \overset{+}{\log}|g(z)| + \overset{+}{\log}\prod^{q}\frac{2}{(z-b_\mu)}.$$

Si l'on applique le théorème de Boutroux-Cartan au dernier terme du second membre en prenant un nombre positif h assez petit, on a

$$\log\prod\left|\frac{2}{z-b_\mu}\right| < q\log\frac{2}{h}$$

pour tout point à l'extérieur des cercles (Σ), dont la somme des rayons est au plus égale à h.

En raisonnant comme pour la dernière partie de la démonstration pour le théorème a, on trouve pour tout point z extérieur aux cercles d'exclusion

$$\log|f(z)| < \frac{1}{1-r}\left[H\left(\Omega(c_0) + \log\frac{1}{r}\right) + K\log\frac{2}{1-r}\right] + q\log\frac{2}{h}.$$

16. On obtient comme extension du théorème de Landau le théorème suivant :

Théorème L. — *Soit une fonction holomorphe définie par*

$$(88) \qquad f(z) = c_0 + c_1 z + \ldots \qquad (c_0, c_1 \neq 0)$$

dans le cercle $|z| < R$; *si elle s'annule* p *fois au plus et admet une valeur exceptionnelle au sens de Picard-Borel, on a, en supposant* $c_0 \neq 1$,

$$(89) \qquad |c_1| R < K e^{H\Omega(c_0, c_1)}, \qquad \Omega(c_0, c_1) = \Omega(c_0) + \log\left|\frac{1}{c_1}\right|,$$

H, K *sont des constantes numériques.*

Posons $z = R\zeta$; les cercles $|z| < R$ et $|z| < r (< R)$ se transforment en cercle unité et en un certain cercle $|\zeta| < \rho (< 1)$ respectivement; et l'on a

$$F(\zeta) = f(Rz) = c_0 + c_1 Rz + \ldots.$$

Cette fonction $F(\zeta)$ est holomorphe dans le cercle unité; de plus elle ne

s'annule que p fois et admet 1 comme valeur exceptionnelle. L'inégalité (28) lui est donc valable et l'on en déduit, en appliquant à $m\left(r, \frac{F'}{F}\right)$ la formule de Jensen, une inégalité comme (54) ou

$$m(r, F) < A_1\left[\Omega(c_0) + \log\left|\frac{1}{c_1}\right| + \log\frac{1}{\delta}\right] + B_1 \log\frac{1}{\rho - r} + C_1 \log^+ m(\rho, F).$$

D'après le lemme A, il vient

$$m(r, F) < H_1\left[\Omega(c_0) + \log\left|\frac{1}{c_1}\right| + \log\frac{1}{\delta}\right] + K \log\frac{2}{1 - r}. \tag{90}$$

D'autre part, le théorème de Cauchy et l'inégalité (37) donnent

$$|F'(0)| < \frac{1}{3} M\left(\frac{1}{3}, F\right) \quad \text{et} \quad \log M\left(\frac{1}{3}, F\right) < 3\, m\left(\frac{2}{3}, F\right),$$

où l'on peut substituer à δ la valeur $\frac{1}{3}$.

Donc en posant $\Omega(c_0, c_1) = \Omega(c_0) + \log\left|\frac{1}{c_1}\right|$,

$$|f'(0)|\, R < K\, e^{H\Omega(c_0, c_1)}.$$

DEUXIÈME PARTIE.

Cas où un est une valeur exceptionnelle au sens de R. Nevanlinna et cas plus général.

I. — Limitations de $M(r, f)$ et critères de normalité ou de quasi-normalité.

17. Pour une fonction admettant 1 comme valeur exceptionnelle au sens de R. Nevanlinna, nous allons démontrer le théorème :

Théorème B. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité, définie par un développement de forme (24). Si $f(z)$ ne s'annule que p fois et admet 1 comme valeur exceptionnelle au sens de R. Nevanlinna avec un défaut $\delta(1) \geqq l > 0$, alors en supposant $c \neq 1$ et en utilisant les mêmes notations que dans le théorème A, on a pour tout point z intérieur au cercle $|z| = r$ avec $0 < \hat{\delta} \leq r < 1$, l'inégalité*

$$\log|f(z)| < \frac{1}{1 - r}\left[H\Omega(c_0, \delta, \delta_\nu) + K \log\frac{2}{1 - r}\right], \tag{91}$$

où $\Omega(c_0, \hat{\delta}, \hat{\delta}_\nu)$ a la même signification que dans (25) et H, K sont numériques.

De l'inégalité (28), on déduit

$$1 - \overline{\lim_{r \to 1}} \frac{N(r, 1)}{m(r, f)} \leq \underline{\lim_{r \to 1}} \frac{Q(r)}{m(r, f)}.$$

D'après l'hypothèse, le premier membre qui représente le défaut $\delta(1)$ est plus grand que l; donc si l'on prend r_0 suffisamment grand, on a pour $r \geq r_0$

$$m(r, f) < kQ(r), \qquad k = \frac{1}{l}. \tag{92}$$

Il suffit de majorer $Q(r)$. En procédant comme dans le théorème A, on trouve une inégalité de forme (35). La démonstration se poursuit alors de la même façon que celle du théorème A.

En particulier, si f ne s'annule pas, les δ_ν disparaissent et l'inégalité (91) se simplifie.

18. Le théorème B fournit des critères de normalité ou de quasi-normalité par la considération d'une valeur exceptionnelle au sens de R. Nevanlinna, qui sont analogues aux théorèmes I, II et III ainsi qu'aux théorèmes I′, II′ et III′.

Enfin on peut obtenir de la même façon que dans le cas précédent des extensions du théorème de Schottky et de celui de Landau.

19. La méthode que nous avons utilisée dans ce qui précède, nous permet d'obtenir des résultats analogues pour un cas plus général. C'est celui des fonctions holomorphes dans le cercle unité, qui ne s'y annulent que p fois et qui y vérifient l'inégalité

$$N(r, 1) \leq \frac{1}{(1-r)^2}\left[a\omega_0 + b \log \frac{1}{1-r} + c \overset{+}{\log} m(r, f)\right] \tag{α}$$

pour $0 \leq r_0 < r < 1$, ω_0 pouvant contenir linéairement $\overset{+}{\log}|f(0)|$, $\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(0)}\right|$ et $\overset{-}{\log}\left|\frac{1}{f(0)-1}\right|$. Par exemple, une fonction holomorphe d'ordre égal ou inférieur à 2 dans le cercle unité, qui s'annule seulement p fois appartient à cette catégorie de fonctions, car en vertu du premier théorème fondamental de M. R. Nevanlinna on a

$$N(r, 1) < m(r, f) + \overset{+}{\log}|f(0)| + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(0)-1}\right| + \log 2.$$

On peut établir dans ce cas le théorème suivant :

Théorème C. — *Soit une fonction holomorphe dans le cercle unité, définie par le développement* (24); *si dans le cercle, ses zéros sont en nombre fini et ses points uns vérifient l'inégalité* (α), *alors, en supposant que* $c_0 \neq 1$ *et en conservant les notations déjà utilisées, on a, pour tout point* z *intérieur au cercle* $|z| = r$ *avec* $0 < \delta \leq r < 1$, *l'inégalité*

$$\log|f(z)| < \frac{1}{(1-r)^3}\left[H\Omega(c_0, \delta, \delta_\nu) + K \log \frac{2}{1-r}\right],$$

où $\Omega(c_0, \delta, \delta_1)$ *a toujours la même signification que dans le théorème* A *et* H, K, *sont numériques.*

Nous partons encore de l'inégalité (28). En vertu de l'hypothèse on a *a fortiori* pour $r_0 \leq r < \rho < 1$

$$N(r, 1) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[a\omega_0 + b\log\frac{1}{\rho - r} + c\overset{+}{\log} V(\rho, f)\right]$$

ou en vertu de (32)

$$N(r, 1) < \frac{1}{(\rho - r)^2}\left[a'\omega_0 + b'\log\frac{1}{\rho - r} + c'\overset{+}{\log} m(\rho, f)\right],$$

inégalité que nous utiliserons pour borner le premier terme du second membre de (28). En majorant les autres termes comme dans le théorème A, nous pourrons mettre (28) sous la forme (35). Alors le raisonnement qu'on a fait dans la dernière partie de la démonstration pour ce théorème nous conduira à la conclusion.

20. En s'appuyant sur le théorème C, on trouvera des critères analogues à tous ceux obtenus dans le cas où *un* est une valeur exceptionnelle de Picard-Borel.

Et comme extensions du théorème de Schottky et celui de Landau, on pourra également obtenir des théorèmes analogues à ceux établis dans ce cas.

EXTENSIONS ALGÉBRIQUES INFINIES DE PF-CORPS

PAR PAUL JAFFARD.

Artin [1] (1) appelle PF-corps les deux catégories de corps suivantes :

1° Les extensions algébriques finies du corps des nombres rationnels (cas arithmétique);

2° Les extensions algébriques finies du corps des fonctions rationnelles d'une variable sur un corps de base k_0 (cas fonctionnel).

Artin et Whaples [2] ont montré que ces corps peuvent être caractérisés par un ensemble de valuations qui vérifie la formule du produit (il faut en outre que l'une au moins de ces valuations soit d'un type assez simple).

Nous étudions ici les extensions algébriques infinies de tels corps et nous montrons qu'on peut leur généraliser les résultats d'Artin et Whaples.

Soit Ω une telle extension. L'ensemble $\mathfrak{M}_\Omega$ des valuations de Ω qui est à considérer doit alors être muni d'une topologie analogue à celle définie par Krull [5]. Ces valuations sont prises sous la forme additive. $\mathfrak{M}_\Omega$ est localement compact et l'on peut définir sur cet espace une mesure de Radon telle que les fonctions liées aux éléments du corps Ω aient une mesure nulle. Ceci généralise la formule du produit. On montre que, réciproquement, si un corps Ω possède un ensemble localement compact mesuré de valuations $\mathfrak{M}_\Omega$ tel que les fonctions numériques définies par les éléments de Ω aient une mesure nulle (et si cet ensemble contient au moins une valuation convenable), alors Ω est l'extension algébrique d'un PF-corps k. On montre de plus que l'espace $\mathfrak{D}_\Omega$ des diviseurs de Ω qui correspond biunivoquement à $\mathfrak{M}_\Omega$ est parfaitement défini par ces propriétés.

ξ étant une fonction numérique convenable définie sur Ω et S le sous-ensemble de Ω défini par :

$$x \in S \rightleftharpoons v(x) \geqq \xi(v) \qquad \text{pour tout } v \in \mathfrak{M}_\Omega$$

(1) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie en fin de l'article.

on évalue à l'aide de la mesure de ξ une borne supérieure du nombre des éléments de S contenus dans une sous-extension K de Ω finie sur k (dans le cas fonctionnel on évalue une borne supérieure de la dimension de l'espace vectoriel S sur le corps des constantes).

1. Notations et rappel de résultats. — Les corps intervenant dans cette étude seront supposés commutatifs. Q désignera le corps des nombres rationnels, R celui des nombres réels et C celui des nombres complexes. Le mot *valuation* sera pris au sens restreint d'Ostrowski. C'est une application d'un corps Ω dans R^+ (ensemble des nombres réels positifs ou nuls) vérifiant :

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y), \tag{1}$$

$$\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y). \tag{2}$$

On posera $v(x) = -\operatorname{Log}\varphi(x)$. On dira que $\varphi(x)$ est la *forme multiplicative* et $v(x)$ la *forme additive* de la valuation.

Deux valuations φ et ψ d'un corps Ω seront dites *équivalentes* si pour tout $x \in \Omega$:

$$\varphi(x) \leq 1 \rightleftharpoons \psi(x) \leq 1.$$

Une classe d'équivalence de valuations de Ω sera appelée *diviseur premier* de Ω ou, plus simplement, *diviseur*. K étant un sous-corps de Ω et $\mathfrak{P}$ un diviseur de Ω, on désignera par $\mathfrak{P}_K$ le diviseur induit par $\mathfrak{P}$ sur K. Si $\mathfrak{p}$ est un diviseur de K, on dira que $\mathfrak{P}$ *divise* $\mathfrak{p}$ et l'on écrira $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$ si et seulement si $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_K$.

v étant une valuation de Ω et $\mathfrak{P}$ le diviseur premier qu'elle détermine, on désignera par $\overline{\Omega}_v$ (ou $\overline{\Omega}_{\mathfrak{P}}$) le corps résiduel correspondant et par $\hat{\Omega}_v$ (ou $\hat{\Omega}_{\mathfrak{P}}$) le corps complété.

Soit k un corps vérifiant l'axiome suivant :

Axiome 1. — *Il existe un ensemble* $\mathfrak{M}_K = (\varphi_\iota)_{\iota \in I}$ *de valuations non triviales inéquivalentes de k tel que pour tout élément x non nul de k on ait* $\varphi_\iota(x) = 1$ *pour toutes les valuations* φ_ι *sauf un nombre fini et tel que :*

$$\prod_\iota \varphi_\iota(x) = 1. \tag{3}$$

La formule (3) est dite *formule du produit d'Artin-Whaples*.

Si $\mathfrak{M}_k$ ne contient pas de valuation archimédienne, le sous-ensemble k_0 de k défini par :

$$x \in k_0 \rightleftharpoons \varphi_\iota(x) \leq 1 \quad \text{pour tout } \iota \in I \tag{4}$$

forme un sous-corps de k qui est dit *corps des constantes*.

k_0 est algébriquement clos dans k et peut être considéré comme un sous-corps de chaque corps résiduel $\overline{k}_\varphi$. On supposera alors que k vérifie de plus :

Axiome 2. — *Il existe au moins une valuation* $\varphi_\iota (\iota \in I)$ *qui est d'un des types suivants :*

1° φ_ι *est archimédienne ;*

2° φ_ι *est discrète et* k_{φ_ι} *est fini ;*

3° φ_ι *est discrète et* $\bar{k}_{\varphi_\iota}$ *est une extension algébrique de degré fini de* k_0.

Une telle valuation sera dite *raisonnable* ainsi que le diviseur premier correspondant.

Un corps k vérifiant les axiomes 1 et 2 est appelé par Artin [1] un PF-*corps*. Soit $\mathfrak{D}_k$ l'ensemble des diviseurs de k correspondant à l'ensemble des valuations $\mathfrak{M}_k$. Artin et Whaples ont montré [2] qu'un PF-corps est nécessairement de l'un des deux types suivants :

1° *Cas arithmétique.* — k est une extension algébrique finie de Q et $\mathfrak{D}_k$ est formé par l'ensemble de tous les diviseurs premiers de k;

2° *Cas fonctionnel.* — $\mathfrak{D}_k$ ne contient pas de diviseur archimédien. k_0 est alors un corps. Si $k \neq k_0$ et si t est un élément de k non contenu dans k_0, le corps $\mathcal{R} = k_0(t)$ est une extension purement transcendante de k_0 et k est une extension algébrique finie de $\mathcal{R}$. L'ensemble $\mathfrak{D}_k$ est formé par tous les diviseurs de k qui induisent sur k_0 la valuation triviale (c'est-à-dire pour laquelle tout élément non nul a la valeur 1). En particulier, l'ensemble $\mathfrak{D}_\mathcal{R}$ des diviseurs de $\mathcal{R}$ induits par les diviseurs de $\mathfrak{D}_k$ est bien connu.

Réciproquement on voit sans peine que toute extension algébrique finie de Q est un PF-corps sans corps de constantes et que toute extension algébrique finie d'un corps de fractions rationnelles $k_0(t)$ est un PF-corps, son corps des constantes étant la clôture algébrique de k_0 dans k.

k étant un PF-corps, on appelle *sous-corps rationnel* de k le sous-corps Q dans le cas arithmétique et un sous-corps quelconque (mais fixe) de la forme $k_0(t)$ dans le cas fonctionnel, k_0 étant le corps des constantes et t un élément de k non contenu dans k_0.

Soient k un PF-corps, $\mathfrak{D}_k = (\mathfrak{p}_\iota)_{\iota \in I}$ l'ensemble des diviseurs de k intervenant dans la formule du produit. Soit S un ensemble qui sera arbitraire si k_0 n'est pas un corps et qui, dans le cas contraire, sera un espace vectoriel sur k_0. On définit comme suit l'*ordre* de S :

1° Dans le cas arithmétique, ou si k_0 est un corps fini, l'ordre de S est le nombre des éléments de S;

2° Si k_0 est un corps infini, l'ordre de S est c^r où c est un nombre fixe strictement supérieur à 1 et r la dimension sur k_0 de l'espace vectoriel S.

$\mathfrak{p}$ étant un diviseur non archimédien raisonnable contenu dans $\mathfrak{D}_k$, on appelle *norme* de $\mathfrak{p}$ l'ordre $N\mathfrak{p}$ du corps résiduel $\bar{k}_\mathfrak{p}$. On définit alors une *valuation normale* $\nu_\mathfrak{p}$ de k :

1° Si $\mathfrak{p}$ est un diviseur archimédien et si $|x|$ est la valeur absolue ordinaire correspondante de x, on pose

$$\nu_{\mathfrak{p}}(x) = |x| \qquad \text{ou} \qquad \nu_{\mathfrak{p}}(x) = |x|^2$$

suivant que $\hat{k}_{\mathfrak{p}} = \mathrm{R}$ ou $\hat{k}_{\mathfrak{p}} = \mathrm{C}$.

2° Si $\mathfrak{p}$ est un diviseur discret, on pose :

$$\nu_{\mathfrak{p}}(x) = (\mathrm{N}\mathfrak{p})^{-\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(x)}. \tag{5}$$

Si $\mathfrak{p}$ est un diviseur archimédien, on posera par convention $\mathrm{N}\mathfrak{p} = e$ (base des logarithmes népériens).

On peut énoncer (²) le :

Théorème 1. — *Soient k un* PF*-corps et $\mathfrak{M}_k$ l'ensemble des valuations intervenant dans la formule du produit. Toutes les valuations de $\mathfrak{M}_k$ sont raisonnables. Écrites sous la forme multiplicative et élevées s'il le faut, à une puissance fixe, ce sont les valuations normales.*

2. Extensions finies d'un PF-corps. — Soient k un PF-corps, K une extension algébrique de degré fini de k. Il résulte de ce qui précède que K est encore un PF-corps. Soit $\mathfrak{O}_{\mathrm{K}}$ (resp. $\mathfrak{O}_k$) l'ensemble des diviseurs de K (resp. de k) intervenant dans la formule du produit. Soit $\mathfrak{P} \in \mathfrak{O}_{\mathrm{K}}$.

Si $\mathfrak{P}$ est un diviseur discret, on désignera par $e_{\mathfrak{P}}$ l'indice de ramification de $\mathfrak{P}$ sur k et par $f_{\mathfrak{P}}$ le degré d'inertie correspondant $\left[\bar{k}_{\mathfrak{P}} : \bar{k}_{\mathfrak{P}_k}\right]$. Si $\mathfrak{P}$ est archimédien, on posera $f_{\mathfrak{P}} = 1$; on posera $e_{\mathfrak{P}} = 2$ si $\hat{\mathrm{K}}_{\mathfrak{P}} = \mathrm{C}$ et $\hat{k}_{\mathfrak{P}_k} = \mathrm{R}$, $e_{\mathfrak{P}} = 1$ dans les autres cas : on dira encore que $e_{\mathfrak{P}}$ et $f_{\mathfrak{P}}$ sont l'indice de ramification et le degré d'inertie de $\mathfrak{P}$ sur k.

Que $\mathfrak{P}$ soit archimédien ou non, si $n_{\mathfrak{P}} = \left[\hat{\mathrm{K}}_{\mathfrak{P}} : \hat{k}_{\mathfrak{P}_k}\right]$ est le degré local de $\mathfrak{P}$ sur k, on a :

$$n_{\mathfrak{P}} = e_{\mathfrak{P}} f_{\mathfrak{P}} \quad (^3). \tag{6}$$

Théorème 2. — *Pour tout diviseur $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{O}_k$, on a :*

$$[\mathrm{K} : k] = \sum_{\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}} n_{\mathfrak{P}}, \tag{7}$$

la somme étant étendue à tous les diviseurs de $\mathfrak{O}_{\mathrm{K}}$ qui divisent $\mathfrak{p}$.

Dans le cas fonctionnel, c'est le théorème 3 du chapitre XV de [1].

Dans le cas arithmétique, il existe un élément a de K tel que $\mathrm{K} = k(a)$. Soit alors $f(x) = 0$ l'équation irréductible sur k satisfaite par a. L'égalité (7) s'obtient en décomposant $f(x)$ en produit de polynomes à coefficients dans $\hat{k}_{\mathfrak{p}}$.

(²) *Voir* [2], théor. 3.

(³) *Voir*, par exemple, [1], chap. III, théor. 6.

LEMME 1. — *Dans le cas fonctionnel, le corps des constantes* K_0 *de* K *est une extension algébrique finie de* k_0.

On a vu au paragraphe 1 que c'était une extension algébrique. Montrons qu'elle est de degré fini. Le corps des rationnels $\mathcal{R} = k_0(t)$ est une extension transcendante pure de k_0, donc linéairement disjointe de K_0 qui est la clôture algébrique de k_0 dans K. Soient donc $a_1, a_2, \ldots, a_m \in K_0$. On a (4)

$$[k_0(a_1, \ldots, a_m) : k_0] = [\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_m) : \mathcal{R}] \leq [K : \mathcal{R}].$$

Par suite

$$[K_0 : k_0] \leq [K : \mathcal{R}] = [K : k] \times [k : \mathcal{R}].$$

Définissons pour chaque $\mathfrak{P} \in \mathcal{O}_K$ une valuation normale correspondante :

1° Si $\mathfrak{P}$ est archimédien ou si k_0 est fini, en vertu du lemme 1 et de ce qui a été vu au paragraphe 1, la valuation normale $\nu_{\mathfrak{P}}$ de K se trouve définie sans ambiguïté;

2° Si k_0 est un corps infini, on choisit une fois pour toutes (quel que soit K) une constante c_0 et l'on prend pour constante c définissant l'ordre d'un espace vectoriel sur K_0 : $c = c_0^{[K_0 : k_0]}$, ce qui est possible en vertu du lemme 1. Ceci revient à définir :

$$N\mathfrak{P} = c_0^{[K_0 : k_0][\bar{K} : \bar{K}_0]} = c_0^{[\bar{K} : k_0]} \quad (5). \tag{8}$$

On voit alors que pour tout diviseur $\mathfrak{P}$ (archimédien ou non) on a :

$$N\mathfrak{P} = [N\mathfrak{P}_K]^{[\bar{K}\mathfrak{P} : \bar{k}\mathfrak{P}_K]} = (N\mathfrak{P}_K)^{f\mathfrak{P}}. \tag{9}$$

Soit $\mathfrak{p} \in \mathcal{O}_k$. Si pour tout $x \in k$ on pose :

$$\varphi_{\mathfrak{p}}(x) = \prod_{\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}} \nu_{\mathfrak{P}}(x),$$

$\mathfrak{P}$ parcourant l'ensemble des éléments de $\mathcal{O}_K$ qui divisent $\mathfrak{p}$, on voit que $\varphi_{\mathfrak{p}}$ est

---

(4) *Voir*, par exemple, A. WEIL, *Foundations of algebraic Geometry*, I, prop. 6.

(5) La convention faite ici est différente de celle d'Artin ([1]. p. 282). Artin choisit en effet la même constante pour tous les corps. Notre convention permet de garder la première définition de la norme lorsque K_0 est un corps fini. Elle n'est possible ici que parce qu'on ne l'applique qu'à des extensions finies du corps des constantes (ce qui n'est pas toujours le cas dans l'étude d'Artin). Si l'on prend la convention d'Artin, la formule (10) se change légèrement et l'on trouve :

$$\prod_{\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}} \nu_{\mathfrak{P}}(x) = \nu_{\mathfrak{p}}(x)^{m(K/k)},$$

$m(K/k)$ étant une constante rationnelle de l'extension K/k qui est dite *degré effectif* de l'extension. Dans le cas où le degré $[K:k]$ est fini, on a :

$$m(K/k) = \frac{[K:k]}{[K_0:k_0]}.$$

une valuation de k qui définit le diviseur $\mathfrak{p}$. D'autre part, si $\mathfrak{p}$ parcourt $\mathcal{O}_k$, la famille $(\varphi_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\in\mathcal{O}_k}$ vérifie la formule du produit. Il résulte donc du lemme 6 de [2] qu'il existe une certaine constante μ ne dépendant que de K et de k telle que :

$$\varphi_\mathfrak{p} = \nu_\mathfrak{p}^\mu \qquad \text{quel que soit } \mathfrak{p}\in\mathcal{O}_k.$$

Calculons μ :

$$\varphi_\mathfrak{P}(x) = \prod_{\mathfrak{P}\mid\mathfrak{p}} \nu_\mathfrak{P}(x) = \prod_{\mathfrak{P}\mid\mathfrak{p}} (\mathrm{N}\mathfrak{P})^{-\mathrm{ord}_\mathfrak{P}(x)} = \prod_{\mathfrak{P}\mid\mathfrak{p}} (\mathrm{N}\mathfrak{p})^{-f_\mathfrak{P}\mathrm{ord}_\mathfrak{P}(x)}$$

en vertu de la formule (9).

D'où, en tenant compte de l'égalité $\mathrm{ord}_\mathfrak{P}(x) = e_\mathfrak{P}\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(x)$:

$$\varphi_\mathfrak{p}(x) = (\mathrm{N}\mathfrak{p})^{-\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(x)\sum_{\mathfrak{P}\mid\mathfrak{p}} f_\mathfrak{P} e_\mathfrak{P}} = (\mathrm{N}\mathfrak{p})^{-[\mathrm{K}:k]\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(x)}$$

en vertu du théorème 2. On en déduit donc $\varphi_\mathfrak{p}(x) = [\mathrm{K}:k]$. D'où :

Théorème 3. — *Soit* K *une extension de degré fini* $[\mathrm{K}:k]$ *du* PF*-corps* k *et soit* $\mathfrak{p}$ *un diviseur de* k *intervenant dans la formule du produit pour* k. *On a :*

$$\prod_{\mathfrak{P}\mid\mathfrak{p}} \nu_\mathfrak{P}(x) = \nu_\mathfrak{p}(x)^{[\mathrm{K}:k]} \quad \textit{pour tout } x\in k, \tag{10}$$

$\nu_\mathfrak{p}$ *et* $\nu_\mathfrak{P}$ *étant les valuations normales correspondant aux diviseurs* $\mathfrak{p}$ *et* $\mathfrak{P}$; $\mathfrak{P}$ *parcourant l'ensemble des diviseurs premiers de* K *qui divisent* $\mathfrak{p}$.

3. L'espace $\mathcal{O}_\Omega$ et sa mesure. — Soit Ω une extension algébrique de degré non nécessairement fini du PF-corps k. Soit encore $\mathcal{O}_k$ l'ensemble des diviseurs de k qui interviennent dans la formule du produit pour k. Si K est un corps intermédiaire entre k et Ω, on désignera par $\mathcal{O}_\mathrm{K}$ l'ensemble des diviseurs de K qui induisent sur k un diviseur appartenant à $\mathcal{O}_k$. On définit sur $\mathcal{O}_\Omega$ une structure uniforme en faisant correspondre à tout surcorps K de degré fini sur k et contenu dans Ω l'entourage $\mathcal{E}_\mathrm{K}$ de $\mathcal{O}_\Omega$ défini par :

$$(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})\in\mathcal{E}_\mathrm{K} \rightleftharpoons \mathfrak{P}_\mathrm{K} = \mathfrak{Q}_\mathrm{K}. \tag{11}$$

On voit que l'on obtient la même structure uniforme sur $\mathcal{O}_\Omega$ si l'on remplace k par une sous-extension k' de Ω de degré fini sur k. On en déduit que l'on obtient encore la même structure uniforme sur $\mathcal{O}_\Omega$ si l'on remplace k par un sous-corps rationnel $\mathcal{R}$. Si K est une extension de k contenue dans Ω, mais de degré non nécessairement fini sur k et si $\mathfrak{P}$ appartient à $\mathcal{O}_\Omega$, on désignera par $\mathrm{K}(\mathfrak{P})$ le sous-ensemble de $\mathcal{O}_\Omega$ tel que :

$$\mathfrak{Q}\in\mathrm{K}(\mathfrak{P}) \rightleftharpoons \mathfrak{P}_\mathrm{K} = \mathfrak{Q}_\mathrm{K}.$$

Si $\mathfrak{P}$ est un élément de $\mathcal{O}_\Omega$ on lui associe une valuation additive v ainsi définie :

1° Si $\mathfrak{P}$ est archimédien, $\mathfrak{P}$ définit un isomorphisme σ de Ω dans C. On posera alors pour tout $x \in \Omega$:

$$v(x) = -\operatorname{Log}|\sigma(x)|.$$

2° Si $\mathfrak{P}$ n'est pas archimédien et si K est un surcorps fini de k qui contienne x et soit contenu dans Ω, on posera :

$$v(x) = \frac{1}{e_{\mathfrak{P}_K}} \operatorname{ord}_{\mathfrak{P}_K}(x).$$

Cette valeur $v(x)$ ne dépend évidemment pas du corps K choisi.

Soit $\mathfrak{M}_\Omega$ l'ensemble de ces valuations, on voit que si v et w sont deux telles valuations équivalentes sur une extension K de k contenue dans Ω (mais non nécessairement finie), on a $v_K = w_K$.

On pourra exprimer une telle propriété en disant que $\mathfrak{M}_\Omega$ forme un *ensemble de valuations de* Ω *cohérent sur* k.

$\mathfrak{D}_\Omega$ et $\mathfrak{M}_\Omega$ étant mis en correspondance biunivoque, $\mathfrak{M}_\Omega$ se trouve muni d'une structure uniforme. Si $v \in \mathfrak{M}_\Omega$ et si K est une extension de k contenue dans Ω, on définit $K(v)$ d'une manière évidente.

THÉORÈME 4. — *L'espace* $\mathfrak{D}_\Omega$ *est complet.*

Il revient au même de montrer que $\mathfrak{M}_\Omega$ est complet.

$\mathfrak{M}_\Omega$ est séparé. En effet si v et w sont deux éléments distincts de $\mathfrak{M}_\Omega$, ces valuations n'étant pas équivalentes il existe $x \in \Omega$ tel que $v(x) > 0$ et $w(x) \leq 0$. Le corps $K = k(x)$ est une extension de degré fini de k telle que $(v, w) \notin \mathfrak{E}_K$. L'espace $\mathfrak{M}_\Omega$ est donc bien séparé.

Soit $\mathfrak{F}$ un filtre de Cauchy sur $\mathfrak{M}_\Omega$ et soit $a \in \Omega$. Il existe un élément de $\mathfrak{F}$ qui est petit d'ordre $\mathfrak{E}_{k(a)}$, soit A. Toutes les valuations contenues dans A induisent la même valuation sur $k(a)$ et prennent la même valeur sur a soit $v(a)$. L'application $a \to v(a)$ définit une valuation (additive) de Ω, donc un diviseur $\mathfrak{P}$ de Ω. Si $\mathfrak{Q}$ est un élément quelconque de A, les diviseurs $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ induisent le même diviseur sur k, donc $\mathfrak{P}_k \in \mathfrak{D}_k$ et, par suite, $\mathfrak{P} \in \mathfrak{D}_\Omega$. On voit que l'élément de $\mathfrak{M}_\Omega$ correspondant à $\mathfrak{P}$ est précisément v. Soient maintenant $X \in \mathfrak{F}$ et $\mathcal{V}$ un voisinage de v dans $\mathfrak{M}_\Omega$. Montrons que $X \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Pour cela on peut supposer $\mathcal{V} = K(v)$, avec $\Omega \supset K \supset k$ et $[K : k] < \infty$. Soit Y un élément de $\mathfrak{F}$ petit d'ordre $\mathfrak{E}_K$. D'après la construction de v on a $Y \subset \mathcal{V}$ et $\mathcal{V} \cap X \neq \emptyset$. Donc v est adhérent au filtre $\mathfrak{F}$. Par suite $\mathfrak{F}$ converge vers v et $\mathfrak{M}_\Omega$ est complet.

THÉORÈME 5. — $\mathfrak{D}_\Omega$ *est localement compact.*

Soit $\mathfrak{P} \in \mathfrak{D}_\Omega$. L'ensemble $k(\mathfrak{P})$ est ouvert ainsi que son complémentaire $\bigcup_{\mathfrak{Q}_k \neq \mathfrak{P}_k} k(\mathfrak{Q})$. Donc $k(\mathfrak{P})$ est fermé et par suite complet. Pour montrer que $k(\mathfrak{P})$ est compact, il suffit de montrer (N. BOURBAKI, *Topologie générale*,

chap. II, § 4, théor. 3) que pour tout entourage $\mathfrak{S}_\lambda$ il existe un recouvrement fini de $k(\mathfrak{P})$ qui soit petit d'ordre $\mathfrak{S}_\lambda$. Or $[K : k] < \infty$ entraine qu'il n'y a qu'un nombre fini de diviseurs de K qui divisent $\mathfrak{P}$, soient $\mathfrak{P}_K', \ldots, \mathfrak{P}_K^{(m)}$. On a

$$k(\mathfrak{P}) = K(\mathfrak{P}^{(1)}) \cup \ldots \cup K(\mathfrak{P}^{(m)})$$

et tous les $K(\mathfrak{P}^{(i)})$ sont petits d'ordre $\mathfrak{S}_\lambda$. Donc $k(\mathfrak{P})$ est un voisinage compact de $\mathfrak{P}$.

Nous allons maintenant définir une mesure de Radon sur $\mathcal{O}_\Omega$.

Établissons d'abord le :

LEMME 2. — *Une fonction numérique f définie sur $\mathcal{O}_\Omega$ est à support compact si et seulement si elle est identiquement nulle sur tous les ensembles $k(\mathfrak{P})$ sauf un nombre fini.*

Soit S le support de f. Supposons S compact. Pour tout $\mathfrak{P} \in \mathcal{O}_\Omega$ posons $S(\mathfrak{P}) = S \cap k(\mathfrak{P})$. Comme $k(\mathfrak{P})$ est ouvert, $S(\mathfrak{P})$ est un sous-ensemble ouvert de S. Comme $S = \bigcup_{\mathfrak{P} \in \mathcal{O}_\Omega} S(\mathfrak{P})$, on en déduit qu'il existe un ensemble fini de diviseurs $\mathfrak{P}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{P}^{(m)}$ tels que

$$S \subset S(\mathfrak{P}^{(1)}) \cup \ldots \cup S(\mathfrak{P}^{(m)}) \subset k(\mathfrak{P}^{(1)}) \cup \ldots \cup k(\mathfrak{P}^{(m)})$$

et f s'annule sur presque tous les $k(\mathfrak{P})$. Réciproquement supposons que f s'annule sur presque tous les $k(\mathfrak{P})$ et soit $k(\mathfrak{P}^{(1)}), \ldots, k(\mathfrak{P}^{(m)})$ l'ensemble des $k(\mathfrak{P})$ sur lesquels f ne s'annule pas identiquement. Comme

$$A = k(\mathfrak{P}^{(1)}) \cup \ldots \cup k(\mathfrak{P}^{(m)})$$

est fermé, on a $S \subset A$ et puisque A est compact il en est de même de S.

Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des fonctions numériques continues à support compact définies sur $\mathcal{O}_\Omega$. Soit $\mathcal{K}'$ le sous-ensemble de $\mathcal{K}$ ainsi défini : Une fonction numérique f définie sur $\mathcal{O}_\Omega$ sera dite appartenir à $\mathcal{K}'$ si et seulement si il existe un surcorps de degré fini K de k contenu dans Ω et tel que f soit constante sur chaque ensemble $K(\mathfrak{P})$ et nulle sur presque tous les $K(\mathfrak{P})$ sauf un nombre fini. On voit immédiatement que $\mathcal{K}'$ forme un sous-espace vectoriel (sur R) de $\mathcal{K}$.

LEMME 3. — *$\mathcal{K}'$ est riche et positivement riche dans $\mathcal{K}$.*

Rappelons ([4], chap. III) que ceci signifie que, pour toute partie compacte A de $\mathcal{O}_\Omega$, il existe un voisinage compact U de A tel que toute fonction continue (resp. continue positive) à support contenu dans A puisse être approchée uniformément par des fonctions (resp. positives) appartenant à $\mathcal{K}'$ dont le support soit contenu dans U.

Soit A compact. On a vu que l'on pouvait trouver $\mathfrak{P}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{P}^{(m)} \in \mathcal{O}_\Omega$ tels que $A \subset k(\mathfrak{P}^{(1)}) \cup \ldots \cup k(\mathfrak{P}^{(m)})$. Comme ce dernier ensemble est ouvert on va

poser $U = k(\mathfrak{P}^{(1)}) \cup \ldots \cup k(\mathfrak{P}^{(m)})$. Soit maintenant f une fonction continue dont le support est contenu dans A. Montrons que pour tout nombre $\varepsilon > 0$ il existe une fonction g contenue dans $\mathcal{K}'$ dont le support soit continu dans A, et telle que

$$\|f - g\| = \operatorname*{Sup}_{\mathfrak{P} \in \mathcal{O}_\Omega} (|f(\mathfrak{P}) - g(\mathfrak{P})|) \leq \varepsilon.$$

f étant à support compact est uniformément continue et, par suite, il existe une extension finie K de k (contenue dans Ω) telle que $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) \in \mathfrak{S}_k$ entraîne $|f(\mathfrak{P}) - f(\mathfrak{Q})| \leq \varepsilon$. Soient $\mathfrak{P}_K^{(1)}, \ldots, \mathfrak{P}_K^{(s)}$ l'ensemble des diviseurs de K qui induisent sur k l'un des diviseurs $\mathfrak{P}_k^{(1)}, \ldots, \mathfrak{P}_k^{(m)}$. On a encore

$$U = K(\mathfrak{P}^{(1)}) \cup \ldots \cup K(\mathfrak{P}^{(s)}).$$

Soit g la fonction définie sur $\mathcal{O}_\Omega$ par $g(\mathfrak{P}) = 0$ si $\mathfrak{P} \notin U$ et $g(\mathfrak{P}) = f(\mathfrak{P}^{(i)})$ si $\mathfrak{P} \in K(\mathfrak{P}^{(i)})$. La fonction g remplit les conditions désirées. Il en résulte que $\mathcal{K}'$ est riche dans $\mathcal{K}$. D'autre part, si f est positive il en est de même de g et par suite $\mathcal{K}'$ est positivement riche dans $\mathcal{K}$. D'où le lemme.

On sait alors ([4], chap. III) que toute forme linéaire positive μ définie sur $\mathcal{K}'$ s'étend d'une manière et d'une seule en une mesure de Radon (positive) μ sur $\mathcal{O}_\Omega$.

Soit $\varphi \in \mathcal{K}'$ et K un surcorps fini de k (contenu dans Ω) tel que la fonction φ soit constante sur chaque $K(\mathfrak{P})$. On posera alors :

$$\mu(\varphi) = \frac{1}{[K : k]} \sum_{\mathfrak{P}_K} e_{\mathfrak{P}_K} \varphi(\mathfrak{P}) \operatorname{Log}(N\mathfrak{P}_K). \tag{12}$$

La somme $\sum$ étant étendue à tous les diviseurs de K contenus dans $\mathcal{O}_K$. Pour voir que $\mu(\varphi)$ est indépendant du corps K choisi, il suffit de le vérifier pour un surcorps fini K′ de K (contenu dans Ω), ce qui se fait sans peine à partir de la formule (10).

On voit que μ est une forme linéaire positive définie sur $\mathcal{K}'$. On en déduit donc la mesure de Radon μ sur $\mathcal{O}_\Omega$.

On voit que si l'on avait pris pour corps de base, au lieu de k, un surcorps fini k' de k (contenu dans Ω), on aurait obtenu une nouvelle mesure μ' telle que $\mu' = [k' : k]\mu$.

Soit x un élément non nul quelconque de Ω. Soient $\mathfrak{P}$ un élément de $\mathcal{O}_\Omega$ et v la valuation que nous lui avons associée au début de ce paragraphe. Si l'on pose $\tilde{x}(\mathfrak{P}) = v(x)$, on obtient une fonction numérique $\tilde{x}$ définie sur $\mathcal{O}_\Omega$. Si K est un surcorps fini de k contenant x et contenu dans Ω, $\tilde{x}$ est constante sur tous les ensembles $K(\mathfrak{P})$ et nulle sur presque tous. Par suite $\tilde{x} \in \mathcal{K}'$.

Quel que soit le diviseur $\mathfrak{P}$ contenu dans $\mathcal{O}_\Omega$ (archimédien ou non), on a alors :

$$e_{\mathfrak{P}_k} \tilde{x}(\mathfrak{P}) \operatorname{Log}(N\mathfrak{P}_k) = -\operatorname{Log} \nu_{\mathfrak{P}_k}(x).$$

Par suite :

$$\mu(\tilde{x}) = -\operatorname{Log} \prod_{\mathfrak{p}_K \in \mathcal{O}_K} \varphi_{\mathfrak{p}_K}(x).$$

La formule d'Artin-Whaples montre donc que :

$$\mu(\tilde{x}) = 0 \quad \text{pour tout } x \neq 0. \tag{13}$$

On a donc le :

Théorème 6. — *Il existe un ensemble localement compact $\mathfrak{M}_\Omega$ de valuations deux à deux non équivalentes de Ω (écrites additivement), muni d'une mesure de Radon ayant pour support $\mathfrak{M}_\Omega$ telle que pour tout élément x non nul du corps Ω la fonction numérique $\tilde{x} : v \to v(x)$ définie sur $\mathfrak{M}_\Omega$ soit continue à support compact et de mesure nulle.*

On vérifie, en effet, sans peine que le support de la mesure précédemment définie est identique à $\mathfrak{M}_\Omega$.

4. Caractérisation des extensions algébriques des PF-corps. — Soit Ω un corps commutatif vérifiant :

Axiome I'. — *Il existe un ensemble localement compact $\mathfrak{M}_\Omega$ de valuations (écrites additivement) non triviales inéquivalentes de Ω muni d'une mesure μ positive de support $\mathfrak{M}_\Omega$. Pour tout élément x non nul de Ω la fonction numérique $\tilde{x} : v \to v(x)$ définie sur $\mathfrak{M}_\Omega$ est continue à support compact et de mesure nulle.*

On désignera par $\mathcal{O}_\Omega$ l'ensemble des diviseurs de Ω définis par les valuations appartenant à $\mathfrak{M}_\Omega$.

Désignons par k_0 le sous-ensemble de Ω formé par 0 et par les éléments x de Ω tels que $v(x) \geq 0$ pour tout $v \in \mathfrak{M}_\Omega$.

Si $\mathfrak{M}_\Omega$ contient une valuation archimédienne v, l'ensemble k_0 n'est pas un corps puisque $1 \in k_0$ et $v(2) < 0$ entraîne $2 \notin k_0$.

Si, par contre, $\mathfrak{M}_\Omega$ ne contient pas de valuation archimédienne, alors k_0 est un corps. En effet $x, y \in k_0$ entraîne $x - y \in k_0$ et $xy \in k_0$.

Si $x \neq 0$, la fonction $\tilde{x}$ est positive. Comme $\mu(\tilde{x}) = 0$, on en déduit ([2], chap. III, § 3, prop. 9) que $\tilde{x}$ est nulle sur le support de μ, c'est-à-dire sur $\mathfrak{M}_\Omega$. Par suite pour tout $v \in \mathfrak{M}_\Omega$ on a $v(x) = 0$ et $1/x \in k_0$. Donc k_0 est un corps.

Le corps k_0 qui est algébriquement clos dans Ω sera dit *corps des constantes*.

K étant un sous-corps de Ω, les symboles v_K et $K(v)$ auront la même signification que précédemment.

On a les lemmes suivants :

Lemme 4. — *Pour tout sous-corps K de Ω et tout élément v de $\mathfrak{M}_\Omega$ l'ensemble $K(v)$ est fermé.*

Supposons $w \in \mathfrak{M}_\Omega$ et $w \notin \mathrm{K}(v)$. Par hypothèse, v_k n'est pas équivalente à w_k, donc $\exists x \in \mathrm{K}$, avec $w(x) > 0$ et $v(x) < 0$. Comme la fonction $\tilde{x}$ est continue, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de w tel que pour tout $w' \in \mathcal{V}$ on ait $w'(x) > 0$. Puisque pour tout $v' \in \mathrm{K}(v)$ on a $v'(x) \leq 0$, on en déduit que $\mathcal{V} \cap \mathrm{K}(v) = 0$. Par suite w n'est pas contenu dans la fermeture de $\mathrm{K}(v)$ et $\mathrm{K}(v)$ est fermé.

Lemme 5. — *Si* K *est un sous-corps de* Ω *et* v *un élément de* $\mathfrak{M}_\Omega$ *tel que* v_K *ne soit pas la valuation triviale,* $\mathrm{K}(v)$ *est compact.*

Soit $x \in \mathrm{K}$ tel que $v(x) \neq 0$. L'ensemble $\mathrm{K}(v)$ est contenu dans le support de $\tilde{x}$ qui est par hypothèse compact. Comme $\mathrm{K}(v)$ est fermé, c'est donc un ensemble compact.

Si $\mathfrak{M}_\Omega$ contient une valuation archimédienne nous dirons que l'on est dans le *cas arithmétique* et sinon que l'on est dans le *cas fonctionnel*. On définit un *sous-corps rationnel* $\mathcal{R}$ de Ω de la façon suivante : Dans le cas arithmétique on prend $\mathcal{R} = \mathrm{Q}$ et dans le cas fonctionnel on prend $\mathcal{R} = k_0(t)$, où t est un élément quelconque de Ω non contenu dans k_0 (et par conséquent transcendant sur k_0). Si K est un sous-corps de Ω contenant k_0 et v une valuation appartenant à $\mathfrak{M}_\Omega$, on peut considérer k_0 comme un sous-corps de $\overline{\mathrm{K}}_v$ et par suite la notion de valuation *raisonnable* peut s'étendre à v_K.

Nous aurons à considérer les axiomes suivants :

Axiome 2′. — *Pour tout sous-corps* K *de* Ω *engendré sur* $\mathcal{R}$ *par un élément* [*soit* $\mathrm{K} = \mathcal{R}(x)$], *il existe une valuation* v *de* $\mathfrak{M}_\Omega$ *telle que la valuation* v_K *induite sur* K *soit raisonnable.*

Axiome 3. — *Pour tout sous-corps* K *de* Ω *engendré sur* $\mathcal{R}$ *par un élément, tout sous-ensemble de la forme* $\mathrm{K}(v)$ *est ouvert.*

Nous aurons également à envisager les hypothèses suivantes :

Hypothèse A. — Ω *est une extension algébrique d'un* PF*-corps qui, dans le cas fonctionnel, admet* k_0 *pour corps des constantes.*

Hypothèse B. — $\mathcal{D}_\Omega$ *est l'ensemble de tous les diviseurs de* Ω *dans le cas arithmétique et l'ensemble des diviseurs de* Ω *qui induisent sur* k_0 *la valuation triviale dans le cas fonctionnel.*

Hypothèse C. — *La topologie de* $\mathfrak{M}_\Omega$ *est celle qui est obtenue en prenant pour système fondamental de voisinages de* v *les ensembles de la forme* $\mathrm{K}(v)$, *où* K *est un sous-corps de* Ω *engendré sur* k_0 *par un nombre fini d'éléments.*

Il résulte du paragraphe 3 que l'hypothèse A entraîne les axiomes 1′, 2′ et 3. Nous allons montrer que, réciproquement, les axiomes 1′, 2′ et 3 impliquent que Ω vérifie l'hypothèse A. Nous montrerons ensuite que si Ω vérifie l'axiome 1′ et l'hypothèse A, il vérifie les hypothèses B et C.

THÉORÈME 7. — *Si le corps* Ω *vérifie les axiomes* 1′, 2′ *et* 3′, *il vérifie l'hypothèse* A.

Soit Ω vérifiant les axiomes 1′, 2′ et 3. Il suffit de montrer que Ω est algébrique sur $\mathcal{R}$. Soient donc $a \in \Omega$ et $K = \mathcal{R}(a)$. Soit $v \in \mathfrak{M}_\Omega$. Si x est un élément non nul de K et $\varphi_{K(v)}$ la fonction caractéristique de l'ensemble $K(v)$, comme $\tilde{x}$ est continue et $K(v)$ à la fois ouvert et fermé, $\varphi_{K(v)}x$ est continue à support compact et, par suite, $\mu(\varphi_{K(v)}x) = \int_{K(v)} \tilde{x}\, d\mu = v'(x)$ a un sens. Soit $w \in K(v)$. Comme par définition w_K est équivalente à v_K, il existe un nombre $\lambda(w) > 0$ tel que pour tout élément x non nul de K on ait identiquement $w(x) = \lambda(w)v(x)$ ou $\tilde{x}(w) = \lambda(w)\tilde{x}(v)$. Comme $\tilde{x}$ est une fonction continue et que $x(v)$ ne dépend pas de w, on en déduit que $\lambda(w)$ est aussi une fonction continue de w sur $K(v)$. Par suite, $\lambda = \int_{K(v)} \lambda(w)\, d\mu$ a un sens. Comme $\lambda(v)$ est une fonction positive, que $K(v)$ est un ensemble ouvert non vide et que la mesure μ a pour support $\mathfrak{M}_\Omega$, on en déduit $\lambda > 0$.

On a alors :

$$v'(x) = \int_{K(v)} \tilde{x}\, d\mu = v(x) \int_{K(v)} \lambda(w)\, d\mu = \lambda v(x) = \lambda v_K(x).$$

Soit $(v_\iota)_{\iota \in I}$ un système de représentants des classes $K(v)$. Posons pour tout $\iota \in I$:

$$\int_{K(v_\iota)} \tilde{x}\, d\mu = \lambda_\iota v_\iota(x).$$

Comme $\tilde{x}$ est à support compact et que chaque $K(v_\iota)$ est ouvert, il en résulte que, pour tout $x \neq 0$, on a $v_\iota(x) = 0$ pour tous les indices ι, sauf un nombre fini. L'axiome 1 montre donc que pour un tel x la somme $\sum_{\iota \in I} \lambda_\iota v_\iota(x)$ a un sens et est égale à 0. D'autre part, $(v_\iota)_{\iota \in I}$ ne peut contenir une infinité de valuations archimédiennes [car pour une telle valuation v_ι on a $v_\iota(2) < 0$]. Par suite, en multipliant au besoin tous les λ_ι par un même facteur, on peut supposer que $e^{-\lambda_\iota v_\iota(x)}$ soit une valuation φ_ι de K pour tout indice ι. Comme l'axiome 2′ implique qu'il existe une valuation v_ι raisonnable sur K, il résulte des considérations d'Artin et Whaples que K est un PF-corps. On voit, d'autre part, que dans le cas fonctionnel son corps des constantes est k_0. On déduit de là que a est bien algébrique sur $\mathcal{R}$, d'où le théorème.

THÉORÈME 8. — *Si le corps* Ω *vérifie l'axiome* 1′ *et l'hypothèse* A, *il vérifie les hypothèses* B *et* C.

Nous allons d'abord démontrer le :

LEMME 6. — *Soit* Ω *vérifiant l'axiome* 1′ *et l'hypothèse* A. *Si* K *est un sous-corps*

de Ω *engendré sur* $\mathcal{R}$ *par un nombre fini d'éléments, chaque ensemble de la forme* $K(\varphi)$ *est ouvert.*

Soit k le PF-corps défini par l'hypothèse A. Dans le cas arithmétique, on a nécessairement $k \supset \mathcal{R}$. Dans le cas fonctionnel, t est par hypothèse algébrique sur k et, par suite, dans tous les cas, le corps K′ engendré par la réunion de k et de K est de degré fini sur k. Comme chaque $K(\varphi)$ est réunion d'ensembles de la forme $K'(w)$, il suffit de montrer que chaque $K'(w)$ est ouvert. On peut donc supposer dans la démonstration du lemme que K est un surcorps de k. Comme K est alors une extension algébrique finie de k, c'est un PF-corps. Dans le cas fonctionnel, son corps des constantes K_0 est la clôture algébrique dans K du corps des constantes k_0 de k. Donc $K_0 = k_0$ puisque k_0 est algébriquement clos dans Ω.

Soit $(\varphi_t)_{t\in I}$ un système de représentants des classes $K(\varphi)$. Une valuation φ_t ne peut s'annuler identiquement sur K, sans cela elle s'annulerait aussi identiquement sur Ω qui est algébrique sur K.

Comme φ_t s'annule identiquement sur k_0 dans le cas fonctionnel, on déduit de la structure des PF-corps que pour tout élément non nul x de K, tous les $\varphi_t(x)$ sont nuls sauf un nombre fini.

Soit φ un élément quelconque de $\mathfrak{M}_\Omega$, φ_α le représentant de la classe $K(\varphi)$ et x un élément de K tel que $\varphi_\alpha(x) > 0$. Il existe des indices en nombre fini $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que $\varphi_{\alpha_i}(x) > 0 (1 \leq i \leq n)$ et $w \notin \bigcup_{1\leq i\leq n} K(\varphi_{\alpha_i}) = A$ entraîne $w(x) \leq 0$. Comme $\tilde{x}$ est continue, A est un ensemble ouvert. On a $\alpha \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Par exemple $\alpha = \alpha_1$.

En vertu de l'indépendance sur K des valuations φ_{α_i}, il existe un élément y de K tel que $\varphi_\alpha(y) = \varphi_{\alpha_1}(y) > 0$ et $\varphi_{\alpha_i}(y) \leq 0$ pour $2 \leq i \leq n$. Soient $\beta_1, \ldots, \beta_m$ les indices tels que $\varphi_{\beta_j}(y) > 0 (1 \leq j \leq m)$ et $w(y) \leq 0$ si $w \notin \bigcup_{1\leq j\leq m} K(\varphi_{\beta_j}) = B$. Comme y est continue, B est un ensemble ouvert. Donc $A \cap B = K(\varphi_\alpha) = K(\varphi)$ est aussi ouvert, d'où le lemme.

Il résulte du lemme 6 que si K est un sous-corps de Ω engendré sur $\mathcal{R}$ par un nombre fini d'éléments et si x est un élément de K différent de zéro, la mesure $\int_{K(\varphi)} \tilde{x}\, d\mu = w(x)$ a un sens et l'on voit, comme dans la démonstration du théorème 8, que $w(x)$ est une valuation de K équivalente à φ_K.

Si les $(\varphi_t)_{t\in I}$ forment un système de représentants des classes $K(\varphi)$, on voit comme précédemment que l'on obtient une relation de la forme $\sum_t \lambda_t \varphi_t(x) = 0$ pour tout $x \in K$. Comme K est un PF-corps et que dans le cas fonctionnel toutes les valuations considérées s'annulent sur le corps des constantes, il résulte du

lemme 6 de [2] que toute valuation de K (s'annulant sur k_0 dans le cas fonctionnel) est équivalente à une des valuations $(v_i)_K$. D'où :

LEMME 7. — *Si* Ω *vérifie l'axiome* 1′ *et l'hypothèse* A, *et si* K *est un sous-corps de* Ω *engendré sur* $\mathcal{R}$ *par un nombre fini d'éléments, l'ensemble* $\mathcal{D}_K$ *des diviseurs de* K *divisés par les éléments de* $\mathcal{D}_\Omega$ *est constitué par l'ensemble de tous les diviseurs de* K (*qui, dans le cas fonctionnel, définissent sur* k_0 *la valuation nulle*).

Ceci posé nous sommes en mesure de démontrer le théorème 8.

Désignons par $\mathcal{D}'_\Omega$ l'ensemble de tous les diviseurs de Ω (dans le cas fonctionnel : qui définissent sur k_0 la valuation nulle). Soit $\mathfrak{T}'$ la topologie définie sur cet ensemble à partir du PF-corps k selon le procédé exposé au paragraphe 3. Soit $\mathfrak{T}$ la topologie donnée sur $\mathcal{D}_\Omega$. Il faut montrer que $\mathcal{D}_\Omega = \mathcal{D}'_\Omega$ et $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}'$.

$\mathcal{D}_\Omega$ est un sous-ensemble de $\mathcal{D}'_\Omega$. Le lemme 6 montre que la topologie $\mathfrak{T}$ est plus fine que la topologie induite sur $\mathcal{D}_\Omega$ par $\mathfrak{T}'$. Soit K un sous-corps de Ω engendré sur k par un nombre fini d'éléments. Si $\mathfrak{P} \in \mathcal{D}_\Omega$, d'après le lemme 5 $k(\mathfrak{P})$ est compact pour la topologie $\mathfrak{T}$. La topologie $\mathfrak{T}'$ induisant sur $K(\mathfrak{P})$ une topologie séparée et moins fine induit la topologie identique (*Voir* N. BOURBAKI, *Topologie générale*, chap. I, § 10).

Désignons par $K'(\mathfrak{P})$ l'ensemble des diviseurs appartenant à $\mathcal{D}'_\Omega$ et induisant sur K le diviseur $\mathfrak{P}_K$. Montrons que $K(\mathfrak{P})$ est dense dans $K'(\mathfrak{P})$ (pour la topologie $\mathfrak{T}'$) : Soit $\mathfrak{Q} \in K'(\mathfrak{P})$ et un voisinage $\mathcal{V}$ de $\mathfrak{Q}$ (pour $\mathfrak{T}'$). Ce voisinage contient un ensemble de la forme $K'_1(\mathfrak{Q})$, où K_1 est une extension de degré fini de K. En vertu du lemme 7 il existe $\mathfrak{P}' \in \mathcal{D}_\Omega \cap K'_1(\mathfrak{Q})$. Donc $\mathcal{V} \cap K(\mathfrak{P}) \neq \emptyset$. Par suite $K(\mathfrak{P})$ est dense dans $K'(\mathfrak{P})$. Mais $K(\mathfrak{P})$, étant compact, est fermé et

$$K(\mathfrak{P}) = K'(\mathfrak{P}).$$

Or $\mathcal{D}_\Omega$ est la somme topologique des espaces $K(\mathfrak{P})$ $(\mathfrak{P} \in \mathcal{D}_\Omega)$, $\mathcal{D}'_\Omega$ est la somme topologique des espaces $K'(\mathfrak{Q})$ $(\mathfrak{Q} \in \mathcal{D}'_\Omega)$. Comme, en vertu du lemme 7, tout ensemble $K'(\mathfrak{Q})$ $(\mathfrak{Q} \in \mathcal{D}'_\Omega)$ contient un ensemble de la forme $K(\mathfrak{P})$ $(\mathfrak{P} \in \mathcal{D}_\Omega)$, l'identité topologique de $K'(\mathfrak{P})$ et $K(\mathfrak{P})$ entraîne $\mathcal{D}_\Omega = \mathcal{D}'_\Omega$ et $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}'$. D'où le théorème.

Soit Ω une extension algébrique quelconque d'un PF-corps k (avec extension possible du corps des constantes dans le cas fonctionnel). Dans le cas arithmétique, le théorème 8 montre qu'il n'y a qu'un seul ensemble possible $\mathcal{D}_\Omega$ de diviseurs de Ω et une seule topologie possible sur cet ensemble correspondant à un ensemble de valuations vérifiant l'axiome 1′. Il en est de même dans le cas fonctionnel. En effet soit $\mathcal{D}_\Omega$ un tel espace de diviseurs, k_0 et Ω_0 les corps de constantes respectifs de k et Ω. Soit t un élément de k transcendant sur k_0. Le corps k, et par suite Ω, est algébrique sur $k_0(t)$. Puisque t est aussi transcendant sur Ω_0, le corps $\Omega_0(t)$ est aussi un PF-corps (avec corps des cons-

tantes Ω_0) qui contient $k_0(t)$. Donc Ω est une extension algébrique de $\Omega_0(t)$ et le théorème 8 montre alors que l'espace $\mathcal{D}_\Omega$ est bien déterminé. D'où :

COROLLAIRE. — *Ω étant une extension algébrique d'un* PF*-corps k et $\mathfrak{M}_\Omega$ un espace de valuations de Ω vérifiant l'axiome 1', l'espace correspondant $\mathcal{D}_\Omega$ de diviseurs de Ω est parfaitement déterminé. Il est constitué par tous les diviseurs de Ω induisant sur k un des diviseurs intervenant dans la formule du produit, sa topologie étant celle décrite au paragraphe* 3.

Existe-t-il des corps qui vérifient les axiomes 1' et 2' sans vérifier l'hypothèse A ?

On peut aussi se demander si dans l'énoncé du théorème 7 on peut remplacer l'axiome 2' par la condition suivante :

AXIOME 2''. — *Il existe une valuation v appartenant à $\mathfrak{M}_\Omega$ et vérifiant l'une des trois propriétés suivantes :*

1° *v est archimédienne ;*

2° *v est rationnelle et $\overline{\Omega}_v$ est une extension algébrique de son corps premier qui a une caractéristique nulle ;*

3° *v est rationnelle et $\overline{\Omega}_v$ est une extension algébrique du corps des constantes k_0.*

On peut même se demander si les axiomes 1' et 2'' suffisent à entraîner l'hypothèse A.

Remarque. — Artin et Whaples [3] ont montré que pour caractériser un PF-corps on peut remplacer l'axiome 1 par l'axiome moins fort 1*.

AXIOME 1*. — *Il existe un ensemble $\mathfrak{M}_k = (\varphi_\iota)_{\iota \in I}$ de valuations non triviales inéquivalentes de k tel que pour tout élément x non nul de k le produit $\prod_\iota \varphi_\iota(x)$ converge absolument vers la limite* 1.

Parallèlement, et en se basant sur cette dernière caractérisation des PF-corps, on vérifie sans peine que l'on peut dans l'énoncé du théorème 7 remplacer l'axiome 1' par l'axiome moins fort 1'* :

AXIOME 1'*. — *Il existe un ensemble localement compact de valuations (écrites additivement) non triviales inéquivalentes de Ω muni d'une mesure μ positive dont le support est identique à $\mathfrak{M}_\Omega$. Pour tout élément x non nul du corps Ω la fonction numérique*

$$x : v \to v(x)$$

définie sur $\mathfrak{M}_\Omega$ est continue, telle que l'intégrale $\int \tilde{x}\, d\mu$ ait un sens et soit nulle.

La démonstration du théorème qui généralise le théorème 7 montre alors que pour tout $x \in \mathfrak{M}_\Omega$ la fonction $\tilde{x}$ est à support compact.

5. Borne supérieure de l'ordre d'un sous-ensemble de Ω. — Soit k un PF-corps, Ω une extension algébrique de k (dans le cas fonctionnel on supposera qu'il n'y ait pas d'extension du corps des constantes), $\mathfrak{M}_\Omega$ l'ensemble localement compact mesuré des valuations de Ω défini au paragraphe 3. Soit ξ une fonction numérique continue à support compact définie sur $\mathfrak{M}_\Omega$ et S le sous-ensemble de Ω défini par :

$$x \in S \quad \rightleftharpoons \quad \{x = 0 \text{ ou } v(x) \geq \xi(v) \quad \text{pour tout } v \in \mathfrak{M}_\Omega\}$$

(en notation additive).

S n'est jamais vide puisque $0 \in S$. Dans le cas fonctionnel on voit que S est un espace vectoriel sur le corps k_0 des constantes. K étant une extension finie de k contenue dans Ω, on va donner dans ce qui suit une borne supérieure de l'ordre de $S \cap K$.

On posera

$$\mathcal{V}(\xi) = e^{\int \xi \, d\mu}.$$

Théorème 9. — $\mathcal{V}(\xi) < 1$ *entraîne que* S *se compose du seul élément* 0.

En effet, si $S \ni x \neq 0$, on a $\tilde{x} \geq \xi$ et, par suite,

$$0 = \int \tilde{x} \, d\mu \geq \int \xi \, d\mu \qquad \text{et} \qquad \mathcal{V}(\xi) \geq 1.$$

$\mathfrak{P}$ étant un élément de $\mathcal{O}_\Omega$ et $v_\mathfrak{P}$ la valuation correspondante de $\mathfrak{M}_\Omega$, pour tout $x \in \Omega$ on posera

$$|x|_\mathfrak{P} = e^{-\operatorname{Log} v_\mathfrak{P}(x)}.$$

Ceci posé, soit S′ un sous-ensemble de Ω qui soit d'ordre fini $M > 1$, c'est-à-dire composé d'un nombre fini d'éléments dans le cas arithmétique et qui soit un espace vectoriel de dimension finie sur k_0 dans le cas fonctionnel. On supposera de plus que pour tout $x \in S'$ on ait $\tilde{x} \geq \xi$. On peut trouver une extension de degré fini K de k contenue dans Ω et contenant S′. Soit $\mathfrak{Q}$ un diviseur non archimédien arbitraire contenu dans $\mathcal{O}_\Omega$. Étant donné que pour $\mathfrak{P}$ contenu dans $K(\mathfrak{Q})$ et tout $x \in K$ on a $|x|_\mathfrak{P} = |x|_\mathfrak{Q}$, il résulte du paragraphe 3 de [2] qu'il existe un certain élément θ non nul qui est élément de S ou différence de deux éléments de S et tel que pour tout $\mathfrak{P} \in K(\mathfrak{Q})$ on ait :

$$|\theta|_\mathfrak{P} \leq \frac{A_{\mathfrak{Q}_K} e^{-\operatorname{Log} \xi(\mathfrak{P})}}{M^{\rho(\mathfrak{Q}_K)}},$$

$$A_{\mathfrak{Q}_K} = (N_{\mathfrak{Q}_K})^{\rho(\mathfrak{Q}_K)} \qquad \text{et} \qquad \rho(\mathfrak{Q}_K) = \frac{\operatorname{Log} |\theta|_b}{\operatorname{Log} \nu_{\mathfrak{Q}_K}(\theta)}$$

avec :

Soit l la constante du corps k définie par $N\mathfrak{Q}_K = l^{f_{\mathfrak{Q}_K}}$, $f_{\mathfrak{Q}_K}$ étant le degré d'inertie $[\bar{K}_\mathfrak{Q} : \bar{k}_\mathfrak{Q}]$.

l est égal au nombre d'élément du corps résiduel $k_{\mathfrak{Q}}$ si ce dernier est fini et à la constante arbitraire du corps (qui sert à définir la norme) élevée à la puissance $\left[k_{\mathfrak{Q}} : \bar{k}_0\right]$ si k_0 est un corps infini. Pour tout $\mathfrak{P} \in K(\mathfrak{Q})$ on a

$$\tilde{\theta}(\mathfrak{P}) = \tilde{\theta}(\mathfrak{Q}) = \frac{1}{e_{\mathfrak{Q}_K}} \operatorname{ord}_{\mathfrak{Q}_K} \theta.$$

Or $\nu_{\mathfrak{Q}_K}(\theta) = (N\mathfrak{Q}_K)^{-\operatorname{ord}_{\mathfrak{Q}_K}}$ entraine

$$-\operatorname{Log} \nu_{\mathfrak{Q}_K}(\theta) = \operatorname{ord}_{\mathfrak{Q}_K} \theta \, f_{\mathfrak{Q}_K} \operatorname{Log} l,$$

d'où

$$\rho(\mathfrak{Q}_K) = \frac{1}{e_{\mathfrak{Q}_K} f_{\mathfrak{Q}_K} \operatorname{Log} l}.$$

En particulier :

$$A_{\mathfrak{Q}_K} = l^{\frac{1}{e_{\mathfrak{Q}_K} \operatorname{Log} l}} = e^{\frac{1}{e_{\mathfrak{Q}_K}}}.$$

Donc pour tout $\mathfrak{P} \in K(\mathfrak{Q})$:

$$\tilde{\theta}(\mathfrak{P}) \geqq -\operatorname{Log} A_{\mathfrak{Q}_K} + \xi(\mathfrak{P}) + \rho(\mathfrak{Q}_K) \operatorname{Log} M = -\frac{1}{e_{\mathfrak{Q}_K}} + \xi(\mathfrak{P}) + \frac{\operatorname{Log} M}{e_{\mathfrak{Q}_K} f_{\mathfrak{Q}_K} \operatorname{Log} l}$$

et pour tout $\mathfrak{P} \notin K(\mathfrak{Q})$:

$$\tilde{\theta}(\mathfrak{P}) \geqq \xi(\mathfrak{P}).$$

D'où, en tenant compte que $K(\mathfrak{Q})$ est un ensemble ouvert et fermé,

$$\int \tilde{\theta}(\mathfrak{P}) \, d\mu \geqq \int \xi(\mathfrak{P}) \, d\mu - \frac{1}{e_{\mathfrak{Q}_K}} \int_{K(\mathfrak{Q})} d\mu + \frac{\operatorname{Log} M}{e_{\mathfrak{Q}_K} f_{\mathfrak{Q}_K} \operatorname{Log} l} \int_{K(\mathfrak{Q})} d\mu.$$

Or, en vertu de la formule (12) :

$$\int_{K(\mathfrak{Q})} d\mu = \frac{1}{[K:k]} e_{\mathfrak{Q}_K} \operatorname{Log}(N_{\mathfrak{Q}_K}) = \frac{1}{[K:k]} e_{\mathfrak{Q}_K} f_{\mathfrak{Q}_K} \operatorname{Log} l.$$

On en déduit en tenant compte de (13) :

$$0 \geqq \int \xi(\mathfrak{P}) \, d\mu - \frac{f_{\mathfrak{Q}_K} \operatorname{Log} l}{[K:k]} - \frac{\operatorname{Log} M}{[K:k]}$$

ou

$$1 \leqq \left(\frac{N\mathfrak{Q}_K}{M}\right)^{\frac{1}{[K:k]}} \mathcal{V}(\xi).$$

C'est-à-dire :

$$M \leqq l^{f_{\mathfrak{Q}_K}} \mathcal{V}(\xi)^{[K:k]}$$

et, comme on a toujours $l > 1$ et $f_{\mathfrak{Q}_K} \leqq [K:k]$:

$$M \leqq l^{[K:k]} \mathcal{V}(\xi)^{[K:k]}. \tag{14}$$

D'où :

THÉORÈME 10. — *Il existe une constante l du corps k telle que pour toute fonction*

numérique ξ *continue à support compact définie sur* $\mathfrak{M}_\Omega$ *et toute extension de degré fini* K *de* k *contenu dans* Ω, *l'ordre* M *du sous-ensemble formé par tous les éléments* x *de* K *tel que* $\tilde{x} \geqq \xi$ *vérifie la formule* (14).

Remarque. — Dans la démonstration du théorème 10, l'hypothèse que la fonction ξ soit continue à support compact ne sert qu'à travers les résultats suivants :

1° $\int_E \xi \, d\mu$ est définie si E est un ensemble ouvert et, dans le cas où E est à la fois ouvert et fermé on a :

$$\int \xi \, d\mu = \int_E \xi \, d\mu + \int_{\mathrm{C}E} \xi \, d\mu ;$$

2° Si ψ est une fonction continue à support compact telle que $\psi \geqq \xi$, on a pour tout ouvert E :

$$\int_E \psi \, d\mu \geqq \int_E \xi \, d\mu .$$

Le théorème 10 restera donc valable pour toutes les fonctions vérifiant des deux propriétés. On pourra envisager en particulier des fonctions qui peuvent prendre la valeur $-\infty$ et des fonctions continues qui ne soient plus à support compact mais telles cependant que $\int \xi \, d\mu$ ait un sens.

Il serait intéressant de trouver une borne inférieure de M. Mais si, dans le cas de la borne supérieure, les calculs d'Artin et Whaples peuvent se généraliser à une extension infinie, il semble par contre très difficile de faire cette généralisation dans le cas de la borne inférieure.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] E. Artin, *Algebraic Numbers and algebraic Functions*, I [Notes miméographiées d'un Cours fait à l'Université de Princeton (1950-1951), New-York (1951)].

[2] E. Artin et G. Whaples, *Axiomatic characterization of fields by the product formula for valuations* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 51, 1945, p. 469-492).

[3] E. Artin et G. Whaples, *A note on axiomatic characterization of fields* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 52, 1946, p. 245-247).

[4] N. Bourbaki, *Intégration*, Paris, 1952.

[5] W. Krull, *Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern*, II (*Math. Zeit.*, t. 31, 1950, p. 527-557).

SUR

L'APPROXIMATION DES NOMBRES COMPLEXES

PAR LES

NOMBRES DES CORPS IMAGINAIRES QUADRATIQUES DÉNUÉS D'IDÉAUX NON PRINCIPAUX

PARTICULIÈREMENT LORSQUE VAUT L'ALGORITHME D'EUCLIDE

PAR M. GEORGES POITOU.

Introduction.

On connaît le théorème d'Hurwitz selon lequel il existe, pour tout nombre réel irrationnel x, une infinité de fractions $\frac{p}{q}$ telles que $\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}q^2}$, la constante $\sqrt{5}$ étant « la meilleure possible » (1).

A la question de l'approximation des nombres réels irrationnels par des nombres rationnels s'apparente celle de l'approximation des nombres complexes X par des « fractions » $\frac{P}{Q}$ dont les deux termes sont des entiers d'un même corps quadratique imaginaire, par exemple, dans le cas le plus connu, des « entiers de Gauss » $a+b\sqrt{-1}$ (a et b entiers rationnels). On montre facilement l'existence d'une constante positive c (dépendant du corps choisi) telle que, pour tout X, il existe une infinité de $\frac{P}{Q}$ avec $\left|X-\frac{P}{Q}\right|<\frac{1}{c|Q|^2}$. La meilleure de ces constantes (plus correctement : leur borne supérieure), soit C, joue un rôle analogue au nombre $\sqrt{5}$ du théorème d'Hurwitz. On l'appellera la constante d'Hurwitz du corps envisagé.

(1) HURWITZ, *Über die angenäherte Darstellung des Irrationalzahlen durch rationale Brüche* (*Math. Ann.*, t. 39, 1889, p. 279-284).

Cette thèse développe la méthode et étend les résultats de recherches poursuivies en commun avec M. Roger Descombes pendant l'année 1950 ([2]). A cette époque étaient connues les constantes d'Hurwitz des corps $R(\sqrt{-m})$ pour $m = 3, 1, 7$ et 2 (soit pour $D = 3, 4, 7$ et 8, en désignant par $-D$ les *discriminants* correspondants, égaux à $-m$ ou à $-4m$) ([3]). Notons C_D la constante d'Hurwitz du corps de discriminant $-D$.

Un théorème de Furtwängler étendu par Hofreiter ([4]) établit que, si le corps envisagé n'a pas d'idéaux non principaux (soit pour $D = 3, 4, 7, 8, 11, 19, 43, 67, 163$), on a $C_D \leq \sqrt{\Delta}$, où Δ est, parmi les discriminants des surcorps relativement quadratiques de $R(\sqrt{-D})$, celui de module minimum. Or il se trouve, dans les cas $D = 3, 4, 7$ et 8, qu'on a justement $C_D = \sqrt{\Delta}$, phénomène déjà constaté dans le cas rationnel (5 étant le discriminant minimum d'un corps quadratique *réel*). On supposa qu'il en était de même pour $D = 11$, qu'on avait donc $C_{11} = \sqrt[4]{5}$. En sens inverse, les minorations générales dont il sera question dans I. 4 furent portées à $C_{11} > \sqrt{\frac{51}{50}}$ ([5]).

En réalité, comme nous l'avons montré dans notre première Note, on a $C_{11} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, ce qui constituait le premier exemple d'une constante d'Hurwitz différente de sa borne de Furtwängler-Hofreiter.

Nous pouvons y ajouter maintenant le cas $D = 19$, puisque $C_{19} = 1$. Les

---

([2]) Ces recherches ont été signalées dans deux Notes aux *Comptes rendus* : Descombes et Poitou, *Sur l'approximation dans* $R(i\sqrt{11})$ (*C. R. Acad. Sc.*, t. 231, 1950, p. 264); *Sur l'approximation dans le corps des racines cubiques de l'unité* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 292).

([3]) Pour $R(\sqrt{-1})$: Ford, *On the closeness of approach of complex rational fractions to a complex irrational number* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 27, 1925, p. 146-154). Perron, *Über die Approximation einer komplexen Zahl durch Zahlen des Körpers* $K(i)$: I. (*Math. Ann.*, t. 103, 1930, p. 533-544); II. (*Math. Ann.*, t. 105, 1931, p. 160-164).

Pour $R(\sqrt{-3})$: Perron, *Über einen Approximationssatz von Hurwitz und über die Approximation einer komplexen Zahl durch Zahlen des Körpers der dritten Einheitswurzeln* (S.-B. *Bayer. Akad. Wiss.*, 1931, p. 129-154).

Pour $R(\sqrt{-2})$: Perron, *Diophantische Approximationen in imaginären quadratischen Zahlkörpern, insbesondere im Körper* $\mathfrak{k}(i\sqrt{2})$ (*Math. Z.*, t. 37, 1933, p. 749-767).

Pour $R(\sqrt{-7})$: Hofreiter, *Diophantische Approximationen in imaginären quadratischen Zahlkörpern* (*Mh. Math. Phys.*, t. 43, 1936, p. 175-190).

Perron utilise des lemmes sur les ovales de Cassini. Ford et Hofreiter, partant des propriétés du groupe modulaire (opérant d'après Picard sur un demi-espace), obtiennent d'élégantes démonstrations [(*voir* aussi Speiser, *Über die Minima Hermitescher Formen* (*J. reine angew. Math.*, t. 167, 1932, p. 88-97) mais l'extension de cette méthode semble difficile].

([4]) Furtwängler, *Über die simultane Approximation von Irrationalzahlen* : I. (*Math. Ann.*, t. 96, 1927, p. 169-175); II. (*Math. Ann.*, t. 99, 1928, p. 71-83). Hofreiter, *Über die Approximation von komplexen Zahlen* (*Mh. Math. Phys.*, t. 42, 1935, p. 401-416).

([5]) Schmetterer, *Approximation komplexer Zahlen durch Zahlen* $K(i\sqrt{11})$ *Dissertation*, Wien, 1940.

autres constantes d'Hurwitz ne sont pas connues, mais l'exemple de II. 7, qui prouve $C_{43} \leq \sqrt{\frac{5}{11}}$, montre que la situation est la même pour $D = 43$, et, sans aucun doute, aussi pour $D = 67$ et 163 (car $|\Delta|^2$ est un entier naturel).

La coïncidence remarquable rencontrée dans les quatre cas les plus simples paraît donc fortuite, n'ayant pas reçu jusqu'à présent d'explication.

Dans le cas de l'approximation des nombres réels irrationnels par des nombres rationnels, on sait que, si l'on écarte certains nombres quadratiques $\left(\text{équivalents, par des substitutions modulaires, à } \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, on peut remplacer dans l'énoncé d'Hurwitz la constante $\sqrt{5}$ par $\sqrt{8}$; si l'on écarte de nouveaux nombres quadratiques (équivalents à $\sqrt{2}$), on peut prendre $\frac{\sqrt{221}}{5}$.... Plus précisément, Markoff a montré qu'il existe une suite de telles constantes, croissant jusqu'à leur limite 3, chacune correspondant à une classe de nombres quadratiques ([6]).

Notre seconde Note donnait les premiers résultats de cette nature connus dans le cas complexe, dans le cas particulièrement favorable de $R(\sqrt{-3})$. Ces résultats, exposés dans VI, comprennent l'existence de trois « minima isolés » et, à défaut de la détermination du premier point d'accumulation du spectre de Markoff, que je n'ai pu encore obtenir, des limitations numériques précises pour ce point avec une étude poussée de la structure des nombres mis en cause. Il ne paraît pas douteux qu'on ne puisse, pour les plus simples des autres corps, obtenir de même des résultats de ce genre ([7]). Notons à ce propos que notre détermination de C_{11} (dans V) montre, sans aucune complication supplémentaire, que cette constante est isolée.

*
* *

L'outil que nous utilisons est une extension de l'algorithme des fractions continues. Hurwitz a donné en 1888 une telle extension, qui se réduit dans le cas rationnel au développement « par l'entier le plus proche » ([8]). Mais l'algorithme d'Hurwitz n'a pas été utilisé, à ma connaissance, dans les problèmes dont nous nous occupons (*voir* d'ailleurs V. 10).

Renonçant à la recherche prépondérante des analogies formelles, j'ai essayé de dégager ce qui, dans la technique algorithmique, se rattache le plus profon-

---

([6]) MARKOFF, *Sur les formes quadratiques binaires indéfinies* : I. (*Math. Ann.*, t. 15, 1879, p. 381-407); II. (*Math. Ann.*, t. 17, 1880, p. 379-400),

([7]) M. J. W. S. Cassels a montré récemment que la constante d'Hurwitz du corps de Gauss est isolée. CASSELS, *Über einen Perronschen Satz* (*Arch. Math.*, t. 3, 1952, p. 10-14).

([8]) HURWITZ, *Über die Entwicklung complexer Grössen in Kettenbrüche* (*Acta Math.*, t. 11, 1888, p. 187-200).

dément aux propriétés d'approximation. De ce point de vue se présentent aussitôt les fractions que nous appelons les « réduites » d'un nombre complexe (définies dans II). Ces fractions existent dans tous les corps imaginaires quadratiques. En rangeant toutes les réduites d'un même nombre par ordre de complication croissante, on obtient une suite, dite « suite de meilleure approximation », qui est analogue à la suite des réduites du développement en fraction continue d'un nombre réel. Mais une différence notable apparaît. Alors que dans le cas rationnel, deux réduites consécutives sont toujours adjacentes, dans le cas complexe, le déterminant de deux réduites consécutives peut prendre des valeurs différentes de 1 et même, selon toute vraisemblance (9), arbitrairement grandes, pouvu que D soit assez grand.

Il est remarquable que, pour $D = 3$, ce déterminant ait toujours pour module 1. Les suites de meilleure approximation dans ce corps sont alors très maniables et peuvent rendre dans les problèmes d'approximation les mêmes services que le développement en fraction continue usuel.

Pour les autres corps où *l'algorithme d'Euclide* est valable ($D = 4, 7, 8, 11$), on peut pallier la complication des suites de meilleure approximation par l'introduction des « meilleures suites régulières », suites dont l'approximation peut être un peu moins bonne, mais où deux fractions consécutives sont adjacentes. Ce mode de développement coïncide avec le précédent pour $D = 3$, et tous deux se réduisent au développement usuel dans le cas réel. L'analogie paraît ainsi, de notre point de vue, aussi bonne que possible. Mais les développements complexes sont formellement plus compliqués que le développement ordinaire, en particulier par le fait qu'un « quotient incomplet » n'est plus uniquement déterminé par la donnée du « quotient complet » correspondant et aussi à cause de la complexité relative des règles qui caractérisent les développements parmi l'ensemble des suites arbitraires d'entiers complexes.

Pour les corps non euclidiens, mais où l'*identité de Bezout* est valable (c'est-à-dire où tous les idéaux sont principaux) il devient nécessaire d'introduire des déterminants non égaux à 1. Pour le plus simple de ces corps ($D = 19$), il suffit d'introduire en outre des déterminants égaux à 2. L'algorithme correspondant est étudié dans VII, puis appliqué à la détermination de C_{19}. Les difficultés qu'on y rencontre montrent le rôle non essentiel, mais simplificateur de l'algorithme d'Euclide.

Les corps où il existe des idéaux non principaux donnent lieu à des difficultés supplémentaires.

Des problèmes analogues à ceux qui sont traités dans ce travail se posent pour des ensembles convenables de quaternions, mais ne peuvent y trouver place.

Je suis heureux de pouvoir ici assurer de ma vive reconnaissance M. A. Denjoy,

(9) *Voir* note (20), p. 218.

dont l'enseignement et la conversation ont déterminé mon orientation, et M. A. Châtelet dont la grande compétence m'a été précieuse. Je les remercie également, ainsi que M. G. Valiron, d'avoir bien voulu constituer le jury de cette thèse. J'exprime ma gratitude à M. Ch. Pisot pour ses encouragements et ses conseils irremplaçables et à M. P. Montel, qui a accepté ce Mémoire dans les *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*. Qu'il me soit permis, enfin, d'adresser une amicale pensée à M. R. Descombes, dont la lucidité a souvent joué un rôle décisif dans mes démonstrations.

I. — Notations. Généralités.

I. 1. Observation liminaire. — Cet exposé comprend sept parties, consacrées, la première à des généralités, la seconde et la troisième aux réduites, la quatrième aux meilleures suites régulières, la cinquième à $R(\sqrt{-11})$, la sixième à $R(\sqrt{-3})$ et la septième à $R(\sqrt{-19})$. On observera une disparité de style entre les différentes parties. La nécessité de maintenir la longueur totale de l'exposé dans des limites raisonnables, m'a conduit à abréger beaucoup, dans l'ensemble, les trois démonstrations difficiles de V, VI et VII. J'ai cru utile de donner de la première de ces démonstrations une rédaction relativement explicite, où seuls quelques calculs purement mécaniques sont omis, mais signalés. Dans la seconde démonstration, les calculs mécaniques sont le plus souvent passés sous silence. Enfin, la dernière démonstration est réduite ici à sa trame.

I. 2. Notations. — R désignant le corps des nombres rationnels, K sera le corps imaginaire quadratique $R(\sqrt{-m})$, m étant un entier positif sans diviseurs carrés. Le discriminant de K sera noté $-D$. Si $m \equiv 3 \pmod 4$, on a $D = m$; sinon $D = 4m$.

N désignera l'ensemble des entiers 1, 2, 3, ...; Z celui des entiers rationnels; E celui des entiers de K (le plus souvent nommés simplement « entiers »). Une base de E sur Z est formée de 1 et de $\omega = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-m})$ si $m \equiv 3 \pmod 4$; de 1 et de $\theta = \sqrt{-m}$ dans les autres cas.

Soit U l'ensemble des unités de K; U comprend seulement 1 et -1, sauf dans le cas $D = 4$, où U comprend les racines quatrièmes de l'unité, et dans le cas $D = 3$, où U comprend les racines sixièmes de l'unité.

$\mathcal{C}$ désignera le corps complexe, $\bar{z}$ l'imaginaire conjugué d'un nombre complexe z. On notera $|z|$ le module de z, et $|z|^2$ ou $\|z\|$ le produit $z\bar{z}$. On observera que, si $z \in K$, $\|z\|$ s'identifie à la norme de z. Si z est un entier non nul, $\|z\| \in N$. On désignera par $\mathcal{R}(z)$ et $\mathcal{I}(z)$ la partie réelle et la partie imagi-

naire de z. On posera $[z, t] = z\bar{t} + \bar{z}t = 2\mathcal{R}(\bar{z}t)$ pour z et $t \in \mathcal{C}$. C'est le double du produit scalaire usuel. Lorsque z et t sont des entiers, $[z, t] \in Z$.

Sauf mention expresse du contraire, on désignera par rotations les transformations $z \to uz$, avec $u \in U$; par symétries les composées des rotations et de $z \to \bar{z}$; par inversion la transformation $z \to \frac{1}{\bar{z}}$.

Des entiers seront dits équivalents si leurs quotients sont des unités; des suites (infinies) ou des séquences (finies) d'entiers seront dites équivalentes si leurs termes de rang pair sont multipliés, leurs termes de rang impair divisés par une même unité. Elles correspondent, par un procédé que l'on indiquera, à des nombres complexes transformés par rotation.

Un fraction $\frac{p}{q}$ est un nombre de K, quotient de deux entiers non tous deux nuls; irréductible, si le plus grand commun diviseur (*a priori*, peut-être idéal) de p et q est 1. Deux fractions seront dites absolument équivalentes si elles ne diffèrent que par la multiplication des deux termes par une même unité; équivalentes par rapport à un nombre x (ou simplement : équivalentes, lorsque aucune confusion ne sera possible) si elles donnent les mêmes valeurs respectives à $|q|$ et à $|qx - p|$. Deux fractions $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$ seront dites adjacentes si $pq' - qp' \in U$.

Pour chaque nombre complexe x n'appartenant pas à K, on désignera par *constante d'approximation de* x et l'on notera $C(x)$ la limite supérieure de $\frac{1}{|q(qx-p)|}$ pour toutes les fractions $\frac{p}{q}$ de K à dénominateur non nul. L'ensemble des constantes d'approximation est le *spectre de Markoff* de K ([10]). Sa borne inférieure, notée par la lettre C avec, lorsque cette précision est utile, l'indication de la valeur de D en indice (exemple : C_3), est la *constante d'Hurwitz* ([11]) de K.

Indiquons enfin quelques notations pour des régions du plan complexe. r étant un nombre réel, les notations $d(r)$, $d'(r)$, $g(r)$, $g'(r)$ désignent respectivement les régions définies par $\mathcal{R}(z) > r$, $\geq r$, $< r$ et $\leq r$.

a étant complexe et b réel non nul, on désigne par $\frac{(a)}{b}$, $i\frac{(a)}{b}$, $i'\frac{(a)}{b}$, $e\frac{(a)}{b}$, $e'\frac{(a)}{b}$ les régions définies pour z respectivement par $|bz - a| = 1$, < 1, ≤ 1, > 1 et ≥ 1. Enfin il est entendu que les notations ρ, $u\rho$ désignent les transformées de la région ρ par $z \to \bar{z}$, $z \to uz$.

([10]) En souvenir des beaux résultats de Markoff dans le cas rationnel, sur les constantes d'approximation inférieures à 3.

([11]) En souvenir de la détermination par Hurwitz de la constante analogue dans le cas rationnel, soit $\sqrt{5}$. [Bien que ce résultat soit implicitement connu depuis Korkine et Zolotareff, *Sur les formes quadratiques* (*Math. Ann.*, t. 6, 1873, p. 366-389) : Sur ce point d'histoire, *voir* l'article de Markoff, cité plus haut.]

1.3. Les corps quadratiques imaginaires. — On sait que, dans les cinq cas $D = 3, 4, 7, 8, 11$, K possède l'algorithme d'Euclide, c'est-à-dire que pour chaque point complexe z, il existe un entier de K à une distance de z strictement inférieure à 1. C'est dire, aussi bien, que les cercles $i(a)$ avec $a \in E$, recouvrent $\mathcal{C}$. L'algorithme d'Euclide implique que les idéaux de K sont tous principaux, et l'on a l'identité de Bezout.

Ces conséquences sont encore valables pour $D = 19, 43, 67, 163$, en l'absence de l'algorithme d'Euclide. Les plus simples des corps qui possèdent des idéaux non principaux correspondent à $D = 15, 20, 23, 24\ldots$.

Une partie de nos raisonnements sera valable lorsqu'on remplace l'ensemble E des entiers de K par un ordre A de K (sous-anneau de E, contenant 1 et engendrant K). La théorie classique des idéaux ne s'applique pas aux ordres distincts de E. Les plus simples de ces ordres correspondent à $D = 12, 16\ldots$.

1.4. Les minorations générales de C. — La constante d'Hurwitz C d'un ordre A de discriminant $-D$, borne inférieure des constantes d'approximation, est aussi l'inverse de la borne inférieure des nombres positifs γ tels que $|q(qx-p)| < \gamma$ ait une infinité de solutions p, $q (q \neq 0)$ dans A, quel que soit x. Or le point (p, q) décrit dans $\mathcal{C}^2$ le réseau A^2, dont le déterminant (en tant que module de rang 4 sur Z) est égal au carré de celui de A, soit $\frac{D}{4}$. Soit H le domaine de $\mathcal{C}^2$ défini par $|zz'| < 1$, et soit h son déterminant critique (H étant considéré comme un ensemble étoilé de l'espace à quatre dimensions réelles) ([12]). H étant un invariant par les transformations $(z, z') \to \left(zk, \frac{z'}{k}\right)$, on a, d'après une remarque de Davenport-Rogers ([13]), $h \leq C^2 \frac{D}{4}$, c'est-à-dire $C \geq 2\sqrt{\frac{h}{D}}$.

Les minorations connues de h utilisent l'inscription dans H des jauges définies par $|z| + |z'| < 2$ ([14]) ou encore $|z|^2 + |z'|^2 < 2$ ([15]). Bien que cette deuxième jauge soit la plus petite, c'est une boule, dont le déterminant critique est connu ([16]), et elle se trouve donner le résultat le meilleur.

([12]) Pour la terminologie géométrique en usage, *voir* par exemple : Chabauty, *Sur les minima arithmétiques des formes* (*Ann. Sc. Éc. Norm. Sup.*, t. 66, 1949, p. 367-394).

([13]) Davenport-Rogers, *Diophantine inequalities with an infinity of solutions* (*Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A, t. 242, 1949-1950, p. 311-344, théorème 1 *a*).

([14]) Hofreiter, *Diophantische Approximationen in imaginären quadratischen Zahlkörpern* (*Mh. Math. Phys.*, t. 45, 1936, p. 175-190). *Voir* aussi : Perron, *Diophantische Ungleichungen in imaginären quadratischen Körpern* (*Mat. Tidsskrift*, B, 1949, p. 1-17).

([15]) Perron, *Diophantische Approximationen in imaginären quadratischen Zahlkörpern, insbesondere im Körper* $\mathfrak{k}(i\sqrt{2})$ (*Math. Z.*, t. 37, 1933, p. 749-767); Oppenheim, *Diophantische Approximationen in imaginär quadratischen Zahlkörpern* (*Mh. Math. Phys.*, t. 46, 1937, p. 196).

([16]) Korkine et Zolotareff, *Sur les formes quadratiques positives quaternaires* (*Math. Ann.*, t. 5, 1872, p. 581-583).

On obtient ainsi $C \geq \sqrt{\frac{8}{D}}$ (Oppenheim). Une meilleure estimation de h permettrait de remplacer 8 par un nombre plus grand, mais, même avec la détermination exacte de h, on ne pourra dépasser $3\sqrt{13} = 10{,}8\ldots$ puisque $C_3 = \sqrt[4]{13}$, et, même alors, la minoration de C ainsi obtenue ne sera pas très précise pour les autres ordres.

II. — Réduites, suites de meilleure approximation. Exemples.

II. 1. Une fraction $\frac{p_0}{q_0}$ est dite une *réduite* du nombre ξ s'il n'existe pas de fraction à la fois plus simple et meilleure qui ne lui soit équivalente, c'est-à-dire, sous forme explicite, si les systèmes

$$(s') \qquad |q| \leq |q_0|, \qquad |q\xi - p| < |q_0\xi - p_0|$$

et

$$(s'') \qquad |q| < |q_0|, \qquad |q\xi - p| \leq |q_0\xi - p_0|$$

sont impossibles en entiers p, q non tous deux nuls.

(Cette définition pourrait être modifiée de plusieurs façons en ce qui concerne les « cas limites ». Nous nous y tiendrons pour simplifier. On observera que, dans le cas rationnel, on obtient ainsi les « réduites » du développement en fraction continue, sauf peut-être au début.)

Deux réduites aussi simples sont donc équivalentes. Si l'on convient de représenter un ensemble de réduites équivalentes par l'une quelconque d'entre elles, les réduites se rangent en une suite $\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)$ telle que $|Q_n|$ croît strictement et $|Q_n\xi - P_n|$ décroît strictement lorsque $n \to \infty$. Cette suite s'appelle la *suite de meilleure approximation* de ξ. La première des réduites (que la tradition affecte, dans le cas rationnel, de l'indice -1) est équivalente à $\frac{1}{0}$ et l'on peut prendre $\frac{1}{0}$ elle-même.

On voit immédiatement qu'on peut toujours trouver une réduite plus simple et meilleure qu'une fraction donnée. Il en résulte que, si $\frac{p_0}{q_0}$ et $\frac{p_1}{q_1}$ sont deux réduites consécutives (dans la suite de meilleure approximation), il n'existe pas de fraction $\frac{p}{q}$ strictement meilleure que $\frac{p_0}{q_0}$ et strictement plus simple que $\frac{p_1}{q_1}$. Car si le système

$$(t) \qquad |q\xi - p| < |q_0\xi - p_0|, \qquad |q| < |q_1|$$

était possible, il serait vérifié par au moins une réduite, ce qui contredit l'hypothèse que $\frac{p_0}{q_0}$ et $\frac{p_1}{q_1}$ sont consécutives. Réciproquement, deux réduites $\frac{p_0}{q_0}$

et $\frac{p_1}{q_1}$ telles que (t) soit impossible sont consécutives. Il suffit même de supposer, outre l'impossibilité de (t), celles de (s'') pour $\frac{p_0}{q_0}$ et de (s') pour $\frac{p_1}{q_1}$. En effet, celles de (s') pour $\frac{p_0}{q_0}$ et de (s'') pour $\frac{p_1}{q_1}$ sont des conséquences de celle de (t). Plus généralement, pour vérifier qu'une certaine séquence de fractions, rangées par $|q|$ strictement croissants, est composée de réduites consécutives de ξ, il suffit de vérifier l'impossibilité de tous les systèmes (t), de (s') pour la première fraction et de (s'') pour la dernière. Par conséquent, pour vérifier qu'une suite de fractions, rangées par $|q|$ strictement croissants et commençant par $\frac{1}{0}$, est la suite de meilleure approximation de ξ, il suffit de vérifier l'impossibilité de tous les systèmes (t). Pour vérifier qu'une suite de fractions, rangées par $|q|$ strictement croissants, à partir d'un certain rang, est identique, à partir d'un certain rang, à la suite de meilleure approximation de ξ, il suffit de vérifier que le système (t) est impossible à partir d'un certain rang.

II. 2. Les deux réduites consécutives $\frac{p_0}{q_0}$ et $\frac{p_1}{q_1}$ du nombre ξ ont pour déterminant $p_0q_1 - p_1q_0$ un entier d évidemment non nul. On peut donc écrire toute fraction $\frac{p}{q}$ sous la forme

$$p = \frac{ap_1 + bp_0}{d}, \qquad q = \frac{aq_1 + bq_0}{d},$$

où a et b sont des entiers non tous deux nuls tels que

$$ap_1 + bp_0 \equiv 0 \pmod{d}, \qquad aq_1 + bq_0 \equiv 0 \pmod{d}.$$

Les points (a, b) décrivent un réseau L de l'espace à quatre dimensions, qui s'identifie à $E \times E$ si $|d| = 1$.

Le fait que $\frac{p_0}{q_0}$ et $\frac{p_1}{q_1}$ sont des réduites consécutives s'exprime par l'impossibilité des systèmes : (s') pour $\frac{p_0}{q_0}$, soit (s'_0) ; (s'') pour $\frac{p_1}{q_1}$, soit (s''_1) ; (t).

Ces systèmes prennent, en posant

$$\underline{x} = -\frac{q_0\xi - p_0}{q_1\xi - p_1}, \qquad \underline{y} = -\frac{q_0}{q_1},$$

respectivement les formes

$$(S'_0) \qquad |b\underline{x} - a| < |d|, \qquad |b\underline{y} - a| \leq |d|$$

$$(S''_1) \qquad |b\underline{x} - a| \leq |\underline{x}d|, \qquad |b\underline{y} - a| < |\underline{y}d| ;$$

$$(T) \qquad |b\underline{x} - a| < |\underline{x}d|, \qquad |b\underline{y} - a| < |d|.$$

L'impossibilité de ces systèmes dans L (privé de l'origine) est nécessaire et

suffisante pour que $\frac{p_0}{q_0}$ et $\frac{p_1}{q_1}$ soient des réduites consécutives (sous réserve qu'on les ait bien rangées, c'est-à-dire que $|\underline{y}| < 1$).

Remarque. — En particulier, $\frac{p_0}{q_0}$ et $\frac{p_1}{q_1}$ sont certainement deux réduites consécutives si $|\underline{y}| < 1$ et si le système

$$(T^*) \qquad |b\underline{x} - a| \leq |\underline{x}d|, \qquad |b\underline{y} - a| \leq |d|$$

n'a dans L que des solutions congrues à $(0, 0) \pmod{d}$, auquel cas nous dirons brièvement qu'il est impossible.

D'autre part, nous avons vu que pour toute fraction $\frac{p}{q}$ il y a une réduite $\frac{p'}{q'}$ telle que $|q'| \leq |q|$, $|q'\xi - p'| \leq |q\xi - p|$ et par suite $|q'(q'\xi - p')| \leq |q(q\xi - p)|$. Il en résulte que, si une suite $\frac{p_n}{q_n}$ de fractions est identique à la suite de meilleure approximation de ξ à partir d'un certain rang, on a

$$C(\xi) = \overline{\lim} \frac{1}{|q_n(q_n\xi - p_n)|} \quad (17).$$

En posant $d_n = q_{n-1}p_{n-2} - q_{n-2}p_{n-1}$, $x_n = -\frac{q_{n-2}\xi - p_{n-2}}{q_{n-1}\xi - p_{n-1}}$, $y_n = -\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}$, on a l'identité $x_n - y_n = \frac{d_n}{q_{n-1}(q_{n-1}\xi - p_{n-1})}$, et l'on obtient par suite

$$C(\xi) = \overline{\lim} \left| \frac{x_n - y_n}{d_n} \right|.$$

II. 3. Remarque sur les réduites des nombres réels. — Soient $\frac{p_0}{q_0}$ et $\frac{p_1}{q_1}$ deux réduites consécutives du développement en fraction continue usuel d'un nombre réel irrationnel ξ. On a donc, comme l'on sait, en posant

$$y = -\frac{q_0}{q_1} \qquad \text{et} \qquad x = -\frac{q_0\xi - p_0}{q_1\xi - p_1},$$
$$-1 < y < 0 \qquad \text{et} \qquad x > 1.$$

Nous allons montrer que $\frac{p_0}{q_0}$ et $\frac{p_1}{q_1}$ sont encore deux réduites consécutives (à notre sens) de ξ dans un corps imaginaire quadratique quelconque.

Il suffit de prouver l'impossibilité du système

$$(T^*) \qquad |bx - a| \leq x, \qquad |by - a| \leq 1$$

en entiers (de E) non nuls (l'un et l'autre).

---

(17) Cette propriété, bien connue dans le cas réel, est pourtant omise par la plupart des traités classiques.

Or on a

$$|by-a|=\|b\|y^2+\|a\|-y[a,b],\qquad \left\|b-\frac{a}{x}\right\|=\|b\|+\frac{\|a\|}{x^2}-\frac{[ab}{x}$$

et l'on écrit donc le système (T*) sous la forme

$$[a,b]\,y\geqq\|b\|y^2+\|a\|-1,\qquad \frac{[a,b]}{x}\geqq\|b\|-1+\frac{\|a\|}{x^2},$$

ce qui implique, en vertu de $a\neq 0$, $b\neq 0$, $[a,b]y>0$ et $\frac{[a,b]}{x}>0$, ce qui est impossible.

Ainsi, la suite de meilleure approximation (à notre sens) d'un nombre réel irrationnel est toujours identique à son développement en fraction continue usuel. Il en sera évidemment de même pour les meilleures suites régulières (*voir* IV).

Nous donnerons maintenant quatre exemples qui conduisent à quelques remarques et qui montrent comment l'on calcule des constantes d'approximation, et par suite, comment l'on peut assigner aux constantes d'Hurwitz des limitations supérieures.

II. 4. Premier exemple. — Considérons dans le corps $(R(\sqrt{-19})$ la suite Φ de fractions : $\frac{1}{0}, \frac{\omega}{1}, \frac{-4}{-\omega}, \frac{-3\omega}{-4}, \frac{11}{3\bar{\omega}}, \frac{8\omega}{11}, \ldots$, soit $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ avec $n=-1, 0, 1, 2, 3, 4\ldots$ obtenue par un « développement en fraction continue » (pour l'instant purement formel) où les « quotients incomplets » a_n sont définis par $a_{2k}=\omega$, $a_{2k+1}=-\bar{\omega}$.

De la récurrence $y_{2k}=\frac{4y_{2k+2}-\omega}{\bar{\omega}y_{2k+2}-1}$, on tire $\frac{y_{2k+2}-x}{y_{2k+2}-y}=\lambda\frac{y_{2k}-x}{y_{2k}-y}$, où $x=\frac{\omega}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ et $y=\frac{\omega}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ sont les racines de l'équation $\bar{\omega}z^2-5z+\omega=0$, et $\lambda=\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})$ est un nombre réel supérieur à 1. Donc y_{2k} tend rapidement vers y en restant sur la droite 0ω, et même sur l'intervalle $(0,y)$. De même y_{2k+1} tend vers $-\bar{y}$ sur l'intervalle $(0,-\bar{y})$, exception faite pour y_1 qui est en 0. En particulier, on a, pour tout n, $|y_n|<1$. Les dénominateurs des fractions de Φ croissent strictement en module.

Montrons que Φ est la suite de meilleure approximation de x. D'après les formules de récurrence, on a $x_{2k}=x$ et $x_{2k+1}=-\bar{x}$ puisque c'est vrai au début (la vérification la plus simple résulte du cas $k=0$ par l'introduction d'une fraction à rôle uniquement formel $\frac{p_{-2}}{q_{-2}}=\frac{0}{1}$). Il suffira donc, eu égard à la

symétrie des rangs pairs et impairs, de prouver l'impossibilité du système analogue à (T) :

$$|bx - a| < |x| \qquad |by' - a| < 1$$

où y' est un nombre quelconque de l'intervalle $(0, y)$.

On a nécessairement $|b| < \frac{1+|x|}{|x-y'|} < \frac{1+|x|}{|x-y|} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} < \sqrt{7}$, donc il suffit d'examiner les cas $b = 1$, 2, ω et $\bar{\omega}$.

Pour $b = 1$, la seconde équation implique $a = 0$ ou 1, ce qui contredit la première.

Il en est de même pour $b = 2$, puisque, y étant sur la frontière du cercle $\frac{(\omega)}{2}$, y' lui est extérieur.

Pour $b = \omega$, on a $by = \frac{\omega - 5}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, d'où nécessairement $a = -1$ ou -2, mais $|\omega x + 1| > |\omega x + 2| = \left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{\omega}{\sqrt{5}} - 1\right)\right| > \frac{1+\sqrt{5}}{2} = |x|$, ce qui contredit la première équation.

Enfin, pour $b = \bar{\omega}$, on a $by = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$, d'où nécessairement $a = 1$ ou 2, mais $|\bar{\omega}x + 1| > |\bar{\omega}x - 2| = |x|$, ce qui contredit la première équation.

Donc Φ est bien la suite de meilleure approximation de x, et, puisque $|x_n - y_n|$ a pour limite $|x - y| = 1$, on a $C(x) = 1$. En particulier, on a donc $C_{19} \leqq 1$. Nous montrerons dans VII qu'en fait, $C_{19} = 1$.

Remarque. — Des raisonnements analogues dans le cas de $R(\sqrt{-5})$ montrent que pour $x = \frac{\theta}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0 + 1/0 + \ldots$, on a encore $C(x) = 1$, donc aussi $C_{20} \leqq 1$.

II. 5. Deuxième exemple. — Considérons dans le corps $R(\sqrt{-11})$ la suite Ψ de fractions $\frac{p_n}{q_n}$ (commençant à $n = -1$).

$$\frac{1}{0}, \quad \frac{1}{1}, \quad \frac{\bar{\omega}}{-\omega}, \quad \frac{\bar{\omega}+1}{\bar{\omega}}, \quad \frac{\omega+2}{2}, \quad \frac{4}{\omega+2}, \quad \frac{2-3\omega}{-1-2\omega}, \quad \frac{6-3\omega}{2-3\omega}, \quad \ldots$$

obtenue par la fraction continue où $a_{2k} = 1$, $a_{4k+1} = -\omega$, $a_{4k-1} = -\bar{\omega}$.

Pour prouver la croissance des dénominateurs, on vérifie immédiatement que $|y_{2k}| < 1$ entraîne $|y_{2k+3}| < 1$ et $|y_{2k+4}| < 1$.

Comme $y_2 = \frac{1}{\omega}$ et $y_4 = -\frac{\bar{\omega}}{2}$ vérifient la condition, elle est toujours vraie, sauf peut-être pour y_1 et y_3. En fait $y_1 = 0$, et $y_3 = 1$. La croissance est donc stricte, sauf entre $|q_1|$ et $|q_2|$. Donc Ψ ne peut être une suite de meilleure approximation (au moins avec les conventions adoptées plus haut).

Montrons pourtant qu'elle est identique, à partir d'un certain rang (qu'on précisera facilement), à la suite de meilleure approximation du nombre $x=\frac{2+\sqrt{5}+\sqrt{-11}}{4}$, l'une des racines de l'équation

$$z=1+1/-\omega+1/1+1/-\bar{\omega}+1/z \qquad \text{ou} \qquad 2z^2=z(1+2\omega)+2-\omega$$

$\left(\text{l'autre racine étant } y=\frac{2-\sqrt{5}+\sqrt{-11}}{4}\right)$.

On a donc $x_{4k}=x$, $x_{4k+2}=\bar{x}$, $x_{4k+1}=x'$, $x_{4k-1}=\bar{x}'$, avec $x'=\frac{1}{x-1}$. De plus, comme plus haut, $\lim y_{4k}=y$, donc y_{4k+2}, y_{4k+1} et y_{4k-1} tendent respectivement vers $\bar{y}$, y' et $\bar{y}'$, avec $y'=\frac{1}{y-1}$.

Il nous suffira donc de prouver l'impossibilité du système (T), d'une part avec $\underline{x}=x$ et $\underline{y}$ voisin de y ; d'autre part avec $\underline{x}=x'$, et $\underline{y}$ voisin de y'.

Or on a $|b|<\frac{1+\underline{x}}{|\underline{x}-\underline{y}|}$ qui est voisin, dans le premier cas, de 2,097, et, dans le second cas, de 2,213. Donc, en tout cas, on peut se borner à $b=1$, ω, $\bar{\omega}$ ou 2 tandis que, d'après les majorations analogues pour $|a|$, a ne peut prendre que ces valeurs ou des symétriques. Examinons successivement les huit cas obtenus suivant les valeurs de x et b.

Supposons d'abord $\underline{x}=x$.

$b=1$. — Alors, d'après la deuxième équation, $a=-\bar{\omega}$. En effet, bien que y soit sur la frontière du cercle (ω), $y_{4k}\in e(\omega)$, ce qui s'établit par récurrence : on a $y_2\in e(\bar{\omega})$, et $y_{4k}\in e(\omega)$ entraîne $y_{4k+2}\in e(\bar{\omega})$ qui entraîne $y_{4k+4}\in e(\omega)$. Pour $a=-\omega$, on a $|bx-a|=|x+\omega|=\sqrt{2+\frac{\sqrt{5}}{2}}>|x|$ puisque $|x|=\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2}$, d'où l'impossibilité.

$b=\omega$. — La deuxième équation donne $a=-1$ ou -2, mais on a $|\omega x+2|>|\omega x+1|=\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{5}}>|x|$.

$b=\bar{\omega}$. — La deuxième équation donne $a=1$ ou 2, mais on a

$$|\bar{\omega}x-1|>|\omega x-2|=|x|.$$

$b=2$. — La deuxième équation donne $a=\omega$ ou $-\omega$, mais on a $|2x+\bar{\omega}|>|2x-\omega|=\frac{1+\sqrt{5}}{2}>|x|$.

Il y a donc impossibilité dans tous les cas où $\underline{x}=x$.

Supposons maintenant $\underline{x}=x'$.

$b=1$. — La deuxième équation donne $a=-1$, mais on a $|x'+1|>|x'|$.

$b = \omega$. — La deuxième équation donne $a = \omega$, mais on a

$$|\omega x' - \omega| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}|x'| > |x'|.$$

$b = \omega$. — La deuxième équation donne $a = -1$, mais on a

$$|\omega x' + 1| = \left|\frac{2x}{\sqrt{5}}\right| = |x'|.$$

$b = 2$. — D'après $y_{4k} \in e(\omega)$, on a $y_{4k+1} \in e\frac{(-\omega)}{2}$, donc la deuxième équation donne $a = -1$, mais on a $|2x' + 1| > |x'|$.

Il y a donc impossibilité dans tous les cas. Ψ est, à partir d'un certain rang, la suite de meilleure approximation de x, donc $C(x) = \overline{\lim}|x_n - y_n|$. Or $|x_{2n} - y_{2n}|$ a pour limite $|x - y| = \frac{\sqrt{5}}{2}$, tandis que $|x_{2n+1} - y_{2n+1}|$ a pour limite 1. Donc $\overline{\lim}|x_n - y_n| = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $C(x) = \frac{\sqrt{5}}{2}$; en particulier, on a donc $C_{11} \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$. Nous montrerons dans V qu'en fait, $C_{11} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

II. 6. Troisième exemple. — Dans le cas rationnel, la suite de meilleure approximation est fournie par un développement en fraction continue bien déterminé, car deux fractions équivalentes par rapport à un nombre x irrationnel sont nécessairement absolument équivalentes (leurs termes sont simultanément identiques ou opposés). L'exemple qui suit illustre la différence de situation dans les cas complexes.

Considérons dans le corps $R(\sqrt{-1})$ la suite X de fractions $\frac{p_n}{q_n}$ (commençant à $n = -1$)

$$\frac{1}{0}, \quad \frac{2}{1}, \quad \frac{1-4\theta}{-2\theta}, \quad \frac{8\theta}{1+4\theta}, \quad \frac{-15-4\theta}{-8}, \quad \frac{-30}{-15+4\theta}, \quad \frac{56\theta-15}{30\theta}, \quad \ldots$$

définie par la fraction continue $2, -2\theta, -2, 2\theta, 2, \ldots$, où $a_n = 2(-\theta)^n$. On montrera facilement, comme ci-dessus, que $|y_n| < 1$, et que X est la suite de meilleure approximation du nombre $\alpha = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\theta}{2}$ (*voir* d'ailleurs IV.5). De plus, on voit immédiatement par récurrence que $\mathcal{I}(y_{2k}) = \frac{(-1)^k}{2}$ et $x_{2k} = (-1)^k \alpha$ de sorte que la fraction $\frac{(-1)^k(2+\theta)p_{2k-1} + p_{2k-2}}{(-1)^k(2+\theta)q_{2k-1} + q_{2k-2}}$ ou $\frac{p_{2k} + (-1)^k\theta p_{2k-1}}{q_{2k} + (-1)^k\theta q_{2k-1}}$ est équivalente à $\frac{p_{2k}}{q_{2k}}$ sans lui être absolument équivalente.

Ainsi, la suite de meilleure approximation de α peut être représentée par une infinité de développements en fraction continue équivalents.

On notera que $|x_n - y_n|$ tend vers $\sqrt{3}$; donc $C(\alpha) = \sqrt{3}$; or on sait, d'après Ford, que c'est précisément la valeur de C_3.

II. 7. Quatrième exemple. — Terminons par exemple plus compliqué, où l'on part d'une suite de fractions *non régulière* (c'est-à-dire où deux fractions consécutives ne sont pas toujours adjacentes).

Considérons dans le corps $R(\sqrt{-43})$ la suite Ξ de fractions $\frac{p_n}{q_n}$ (commençant à $n = -1$)

$$\frac{1}{0}, \quad \frac{\omega}{2}, \quad \frac{-5}{-\bar{\omega}}, \quad \frac{-3\omega}{-7}, \quad \frac{14}{3\omega}, \quad \frac{8\omega}{19} \quad \dots$$

définie par $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$, $p_0 = \omega$, $q_0 = 2$ et les formules de récurrence :

$$p_n = \frac{a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}}{b_{n-1}}, \qquad q_n = \frac{a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}}{b_{n-1}},$$

avec $a_{2k} = \omega$, $b_{2k} = 2$; $a_{2k+1} = -\bar{\omega}$, $b_{2k+1} = 1$.

On vérifie facilement que p_n et q_n sont toujours entiers, et que $|y_n| < 1$.

En prenant $x = \frac{7+\sqrt{5}}{22}\omega$, racine de $\bar{\omega}x^2 - 7x + \omega = 0$, on a $x_{2k} = x$ et $x_{2k+1} = -\frac{4+\sqrt{5}}{11}\bar{\omega} = x'$, tandis que y_{2k} et y_{2k+1} tendent respectivement vers les nombres conjugués sur $R(\sqrt{-43})$, y et y'. De plus, $d_{2k} = 1$ et $d_{2k+1} = 2$.

Montrons d'abord que $\frac{p_{2k}}{q_{2k}}$ et $\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$ sont deux réduites consécutives. Il suffit de vérifier l'impossibilité du système (T*) avec $\underline{x} = x$, $\underline{y} = y$, $d = 1$ ([18]).

Or ce système implique $|b| \leq \frac{1+|x|}{|x-y|} = \frac{2\sqrt{11}+7+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} < 3{,}56 < \sqrt{13}$, donc il suffit d'examiner les cas $b = 1, 2, 3, \omega, \bar{\omega}, \omega+1$ et $\bar{\omega}+1$.

L'impossibilité évidente de l'équation $|by - a| \leq 1$ lorsque $1 \leq \mathcal{I}(by) \leq \frac{\sqrt{43}}{2} - 1$ exclut les cas $b = 2, 3, \omega+1$.

Pour $b = 1$, on a nécessairement $a = 0$.

Pour $b = \omega$, $by = \frac{7-\sqrt{5}}{2}$ donc $a = 2$ ou 3, mais on a

$$|bx - a| = \left|\frac{7+\sqrt{5}}{2} - a\right| \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2} > |x|.$$

Pour $b = \omega + 1$, raisonnement analogue.

([18]) Le système (T*), n'ayant qu'un nombre fini de solutions pour x et y voisins de x et y, est impossible pour x et y suffisamment voisins de x et y s'il est impossible pour $\underline{x} = x$, $\underline{y} = y$.

Pour $b=\omega$, $by=y-\frac{7-\sqrt{5}}{2}$, d'où $a=-2$, mais on a

$$|bx-a|=\left|x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right|>|x|.$$

L'impossibilité est donc établie.

Étudions maintenant le système (T) avec $x=x'$, $y=y'$, $d=2$. Le réseau L est défini par le système

$$ap_{2k}+bp_{2k-1}\equiv 0 \pmod 2, \qquad aq_{2k}+bq_{2k-1}\equiv 0 \pmod 2$$

qui s'écrit, d'après les relations de récurrence :

$$(a\omega+b)p_{2k-1}+2p_{2k-2}\equiv 0 \pmod 2$$
$$(a\omega+b)q_{2k-1}+2q_{2k-2}\equiv 0 \pmod 2,$$

c'est-à-dire encore $a\omega+b\equiv 0 \pmod 2$ ou $a\equiv b\bar{\omega} \pmod 2$. D'après $|b|\leq\frac{2(1+|x'|)}{|x'-y'|}=\frac{4+\sqrt{5}+\sqrt{11}}{\sqrt{5}}<4{,}27<\sqrt{19}$, il suffit de considérer les cas où $b=1, 2, 3, 4, \omega, \bar{\omega}, \omega\pm 2, \bar{\omega}\pm 2$.

Rangeons-les selon leur valeur modulo 2.

1° $b\equiv 0$, $a\equiv 0$. Pour $b=2$ ou 4, $|by'-a|\leq 2$ est impossible.

2° $b\equiv 1$, $a\equiv\bar{\omega}$. Pour $b=1$, $|by'-a|\leq 2$ est impossible.

Pour $b=3$, $|by'-a|\leq 2$ implique $a=-\bar{\omega}$. On a alors

$$|bx'-a|=\left|-\frac{\omega}{11}(1+3\sqrt{5})\right|<2|x'|.$$

Ainsi $b=3$, $a=-\bar{\omega}$ est une solution de (T).

3° $b\equiv\omega$. $a\equiv\omega$. Pour $b=\omega$ ou $\omega-2$, on a $|\mathfrak{I}(by')|=\frac{4-\sqrt{5}}{11}\frac{\sqrt{43}}{2}$, donc $|by'-a|\leq 2$ est impossible.

Pour $b=\omega+2$, $by'=4-\sqrt{5}-\frac{3\bar{\omega}}{11}(4-\sqrt{5})$, d'où $a=\omega$ ou $\omega+2$.

Si $a=\omega$, $|bx'-a|=\left|3+\sqrt{5}-\bar{\omega}\frac{3\sqrt{5}+1}{11}\right|>2|x'|$.

Si $a=\omega+2$, $|bx'-a|=\left|1+\sqrt{5}-\bar{\omega}\frac{3\sqrt{5}+1}{11}\right|<2|x'|$.

Donc $b=\bar{\omega}+2$, $a=\omega+2$ est une solution de (T).

4° $b\equiv\omega$, $a\equiv 1$. Pour $b=\omega$, $by'=-(4-\sqrt{5})$ d'où $a=-1$ ou -3 ; or $|bx'+1|=3+\sqrt{5}>2|x'|$ et $|bx'+3|=1+\sqrt{5}<2|x'|$.

Donc $b=\omega$, $a=-3$ est une solution de (T).

Pour $b=\omega+2$, $by'=-(4-\sqrt{5})-\frac{2\bar{\omega}}{11}(4-\sqrt{5})$, d'où $a=-1$ ou -3,

mais $|bx'+1|^2=\frac{16}{11}(17+7\sqrt{5})>4|x'|^2$, et $|bx'+3|^2=\frac{8}{11}(21+8\sqrt{5})>4|x'|^2$.

Pour $b=\omega-2$, $by'=-(4-\sqrt{5})+\frac{2\omega}{11}(4-\sqrt{5})$, d'où $a=-1$ ou -3, mais $|bx'+1|^2=\frac{12}{11}(17+7\sqrt{5})>4|x'|^2$ et $|bx'+3|^2=4(3+\sqrt{5})>4|x'|^2$.

Finalement, (T) a pour solutions $(-\bar{\omega}, 3)$, $(\omega+2, \bar{\omega}+2)$ et $(-3, \omega)$; p_{2k} et p_{2k+1} ne sont pas des réduites consécutives, pour k assez grand.

Parmi les fractions intermédiaires, il serait aisé de voir lesquelles sont des réduites. Il vaut mieux remarquer que c'est inutile pour déterminer $C(x)$. En effet, si $p=\frac{ap_{2k}+bp_{2k-1}}{2}$, $q=\frac{aq_{2k}+bq_{2k-1}}{2}$, on a

$$\frac{q}{q_{2k}}=\frac{a-by_{2k+1}}{2}, \qquad \frac{qx-p}{q_{2k}x-p_{2k}}=\frac{a-bx_{2k+1}}{2},$$

d'où

$$\frac{|q(qx-p)|}{|q_{2k}(q_{2k}x-p_{2k})|}=\left|\frac{(by_{2k+1}-a)(bx_{2k+1}-a)}{4}\right|.$$

On a $\frac{1}{C(x)}=\underline{\lim}\,|Q(Qx-P)|$, où $\frac{P}{Q}$ décrit Ξ, et les trois familles de fractions qui correspondent aux solutions de (T), cet ensemble de fractions englobant certainement toutes les réduites. Or $\left|\frac{(by'-a)(bx'-a)}{4}\right|$ vaut respectivement :

pour $(-\bar{\omega}, 3)$: $\left|\frac{\bar{\omega}^2}{4}\frac{(3\sqrt{5}-1)}{11}\frac{(3\sqrt{5}+1)}{11}\right|=1$;

pour $(\omega+2, \bar{\omega}+2)$: racine carrée de $\frac{(96+24\sqrt{5})(96-24\sqrt{5})}{4^2.11^2}=\frac{36}{11}>1$;

pour $(-3, \omega)$: $\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}{4}=1$.

Comme toutes ces quantités sont supérieures à 1, on a $C(x)=\overline{\lim}\left|\frac{x_n-y_n}{d_n}\right|$ bien que Ξ ne soit pas la suite de meilleure approximation de x; c'est-à-dire, puisque $\left|\frac{x_{2k+1}-y_{2k+1}}{2}\right|$ et $|x_{2k}-y_{2k}|$ ont la même limite $\sqrt{\frac{5}{11}}$, $C(x)=\sqrt{\frac{5}{11}}$. En particulier, on a donc $C_{43}\leq\sqrt{\frac{5}{11}}$. La valeur exacte de C_{43} est inconnue.

Après ces exemples, on conçoit que dans chaque cas particulier, l'obtention de majorations « raisonnables » de C n'exige qu'une patience proportionnée à la complication du corps.

III. — Réduites. Table des valeurs du déterminant de deux réduites consécutives.

III. 1. Soient $\frac{p_0}{q_0}$ et $\frac{p_1}{q_1}$ deux réduites consécutives d'un nombre ξ qui n'appartient pas à K, à éléments dans un ordre A de K, de discriminant $-D$. Ceci

implique, avec les notations de II. 2 (x et y étant remplacés par x et y), que le réseau L des couples (a, b) d'éléments de A vérifiant les conditions

$$ap_1 + bp_0 \equiv 0 \pmod{d} \qquad aq_1 + bq_0 \equiv 0 \pmod{d}$$

n'a d'autre point que l'origine dans la région définie par

$$\left| b - \frac{a}{x} \right| < |d| \qquad |by - a| < |d|.$$

On peut encore dire que le réseau L′ transformé de L par la transformation

$$(a, b) \to \left(\frac{by - a}{d}, \frac{b - \frac{a}{x}}{d} \right)$$

n'a d'autre point que l'origine dans la région définie par $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$, z_1 et z_2 étant deux variables complexes.

L est transformé en A^2 par la transformation $(a, b) \to \left(\frac{ap_1 + bp_0}{d}, \frac{aq_1 + bq_0}{d} \right)$, donc son déterminant (en tant que réseau à quatre dimensions réelles) est

$$\Delta(L) = \|d\| \Delta(A^2) = \frac{D \|d\|}{4}.$$

Le déterminant de L′ est, de même, $\frac{D \left| 1 - \frac{y}{x} \right|^2}{4 \|d\|}$.

Si nous désignons par β le déterminant critique du « bicercle » défini par $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$, nous obtenons donc l'inégalité

$$\beta \leq \frac{D \left| 1 - \frac{y}{x} \right|^2}{4 \|d\|} \qquad \text{ou bien} \qquad |d_1| \leq \sqrt{\frac{D}{4\beta}} \left| 1 - \frac{y}{x} \right|$$

ou encore, compte tenu de l'identité $\left| 1 - \frac{y}{x} \right| = \left| \frac{d}{q_1(q_0\xi - p_0)} \right|$,

$$|q_1(q_0\xi - p_0)| \leq \sqrt{\frac{D}{4\beta}}.$$

On obtient donc un théorème sur l'approximation des réduites analogue à celui qui est classique dans le cas rationnel, avec la constante 1 au second membre.

Ici, le second membre dépend de la valeur de β, laquelle est encore inconnue. β est évidemment inférieur au carré du déterminant critique du cercle, soit $\frac{3}{4} = 0{,}75$.

En sens inverse, le théorème de Minkowski donne $\beta > \frac{\pi^2}{16} = 0{,}61\ldots$.

---

(19) Mahler, *On lattice points in a cylinder* (*Quat. J. Math.*, t. 17, 1946, p. 16). *Voir* aussi :

La méthode introduite par Mahler (19) montre que $\beta > \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}68\ldots$. On peut conjecturer que la valeur de β est $\frac{3}{4}$. Dans ce cas, pour $D = 3$ on obtiendrait le théorème $|q_1(q_0\xi - p_0)| < 1$, d'ailleurs établi dans IV. 4, et qui est « le meilleur possible de son espèce ».

Le théorème que nous avons obtenu a un autre aspect : si l'on tient compte que $|x| > 1$, $|y| < 1$, on a $\left|1 - \frac{y}{x}\right| < 2$ et par suite $|d| < \sqrt{\frac{D}{\beta}}$. On obtient ainsi une borne pour le déterminant de deux réduites consécutives dans un ordre de discriminant $-D$.

III. 2. Nous allons rechercher quelles valeurs peut prendre ce déterminant d, lorsque A est l'anneau E de tous les entiers de K. D'après $|x| > 1$ et $|y| < 1$, le réseau L n'a pas de points dans la région définie par $|a| + |b| < |d|$, et même pas de points tels que $|a| + |b| \leq |d|$, $a.b \neq 0$.

Étudions les idéaux $\mathfrak{i}_0 = (p_0, q_0)$ et $\mathfrak{i}_1 = (p_1, q_1)$ qui divisent d, et posons

$$d = \mathfrak{i}_0\mathfrak{j}_0 = \mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_1.$$

S'il y a dans la classe de $\mathfrak{i}_0$ (lorsqu'on considère les idéaux principaux comme équivalents) un idéal $\mathfrak{i}$ tel que $\|\mathfrak{i}\| < \|\mathfrak{i}_0\|$ (la norme étant aussi définie pour les idéaux !), l'idéal $\mathfrak{i}\mathfrak{j}_0$ est un nombre b non nul de E, tel que $|b| < |d|$. Avec $a = 0$, il satisfait donc $|a| + |b| < |d|$, ce qui est impossible.

Ainsi, $\mathfrak{i}_0$ doit avoir une norme minimum, parmi les idéaux qui lui sont équivalents. Il en est de même pour $\mathfrak{i}_1$.

En particulier, si $\mathfrak{i}_0$ est principal, il est égal à 1. Il existe alors des entiers h, k tels que $p_0h + q_0k = 1$. Posons $P = ap_1 + bp_0$, $Q = aq_1 + bq_0$; le système $P \equiv 0$, $Q \equiv 0 \pmod d$ équivaut à $q_0P - p_0Q \equiv 0$, $hP + kQ \equiv 0 \pmod d$, ce qui s'écrit encore $da \equiv 0, b \equiv sa \pmod d$, ou bien seulement $b \equiv sa \pmod d$, où s est un entier. Si, de plus, $\mathfrak{i}_1$ est aussi principal, alors s est inversible $(\bmod d)$. Tel est le cas, en particulier, si le corps K n'a pas d'idéaux non principaux.

Remarquons encore que, d'après l'impossibilité de $|a| + |b| \leq |d|$ avec $a.b \neq 0$, il ne peut y avoir, dans la classe de $s \pmod d$, ni dans la classe inverse, aucun entier de module $\leq |d| - 1$.

III. 3. Indiquons un lemme immédiat.

Supposons d'abord K dépourvu d'idéaux non principaux.

Supposons donnés trois nombres complexes x, y, d tels que $|x| > 1$, $x \notin K$; $|y| < 1$, $y \in K$; $d \neq 0$, $d \in E$, et supposons que les systèmes (S'_0), (S''_1) et (T) soient impossibles en entiers (de E) non tous deux nuls.

---

(19) Chabauty, *Sur des problèmes de géométrie des nombres* (*Colloque international d'Algèbre et Théorie des nombres de Paris*, 1949, p. 27).

Alors on peut trouver un nombre $\xi \notin K$ et deux réduites consécutives $\frac{p_0}{q_0}$ et $\frac{p_1}{q_1}$ du nombre ξ, de façon que $p_0 q_1 - p_1 q_0 = d$, $-\frac{q_0}{q_1} = y$ et $\frac{q_0\xi - p_0}{q_1\xi - p_1} = x$.

La démonstration est évidente : y étant mis sous forme irréductible $-\frac{q_0}{q_1}$, on peut déterminer successivement p_0, p_1 (d'après l'absence d'idéaux non principaux), puis ξ (puisque $x \notin K$, c'est possible et la solution n'est pas dans K). D'après l'énoncé, $\frac{p_0}{q_0}$ et $\frac{p_1}{q_1}$ sont deux réduites consécutives de ξ.

Dans le cas général où K peut avoir des idéaux non principaux, on peut seulement satisfaire la condition que $\left|y + \frac{q_0}{q_1}\right|$ soit arbitrairement petit [avec $(q_0, q_1) = 1$], et alors le reste subsiste.

III. 4. Nous pouvons maintenant dresser une table des valeurs de d pour les corps les plus simples ([20]). Nous nous limiterons à ceux qui n'ont pas d'idéaux non principaux, nommément ceux où $D = 3, 4, 7, 8, 11$ et 19.

Naturellement, d n'est défini qu'à la multiplication près par une unité; nous n'écrirons qu'un représentant de chaque classe, et même un seul représentant pour deux classes imaginaires conjuguées.

$d = 1$ intervient pour tout corps K, comme le montre par exemple la considération des réduites des nombres réels, d'après II. 3.

$D = 3$.

D'après III. 1, $d = 1$, $\omega + 1$ ou 2.

Si $d = 2$, un système complet de restes (mod 2) est 0, 1, ω, $\bar{\omega}$. Comme tous ces nombres ont un module ≤ 1, il y a contradiction avec la remarque finale de III. 2 : 2 n'est pas une valeur de d.

Si $d = \omega + 1$, un système complet de restes (mod $\omega + 1$) est -1, 0, 1. Il y a lieu d'examiner les relations $b \equiv \varepsilon a \pmod{\omega + 1}$, avec $\varepsilon = \pm 1$. On a les trois solutions $\varepsilon b = 1$, $a = 1$, $-\omega$ ou $-\bar{\omega}$. Le raisonnement de III. 2 ne suffit plus, mais je vais montrer que quels que soient x et y, les inégalités $|by - a| < \sqrt{3}$, $\left|b - \frac{a}{x}\right| < \sqrt{3}$ sont vérifiées par au moins l'un des trois couples (a, b).

Il suffit de montrer que chacune des deux inégalités ne peut être fausse que pour un seul couple. Or, si l'on avait par exemple $|t + \omega| \geq \sqrt{3}$ et $|t + \bar{\omega}| \geq \sqrt{3}$ pour $|t| < 1$, en posant $t = m + n\sqrt{-1}$ (m, n réels), on aurait

([20]) On peut donner des résultats partiels, tels que le suivant, pour un corps quelconque. Tous les entiers naturels inférieurs à $|\omega|$ (resp. $|\theta|$) sont des valeurs de d, au moins s'ils sont premiers avec $\frac{m+1}{4}$ (resp. m).

$\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\left(n\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\geq 3$, d'où $2(m^2+n^2)+2m+2\geq 6$, ce qui contredit $m^2+n^2<1$.

Ainsi, dans le cas $D=3$, d ne peut être qu'une unité : même résultat que dans le cas réel.

$D=4$.

D'après III. 1, $d=1$, $\theta+1$, 2 ou $\theta+2$.

Si $d=\theta+2$ ou 2, les classes premières à d sont représentables par des unités, ce qui contredit la remarque finale de III. 2.

Si $d=\theta+1$, supposons L défini par la relation $a\equiv b\pmod{\theta+1}$ et prenons (par exemple) x et y tels que

$$|x-1|>\sqrt{2},\qquad |y-\theta|>\sqrt{2},\qquad \left|1+\frac{1}{x}\right|>\sqrt{2},\qquad \left|1+\frac{\theta}{x}\right|>\sqrt{2}.$$

Il en résulte facilement $\frac{|1+x|}{|x-y|}<\sqrt{2}$, et, pour les solutions de $|by-a|\leq\sqrt{2}$, $\left|b-\frac{a}{x}\right|\leq\sqrt{2}$, ceci implique $|a|<2$ et $|b|<2$. Mais, tous les entiers de module $\sqrt{2}$ étant équivalents, l'impossibilité de ce système avec $a\equiv b\pmod{\theta+1}$ résulte de son impossibilité pour $|a|=|b|=1$, laquelle résulte précisément du choix de x et y. Eu égard au lemme de III. 3, nous voyons que $\theta+1$ est une valeur de d.

Remarque. — On pourra montrer que le cas envisagé est le seul, à des rotations ou symétries près, où $d=\theta+1$ (à la condition de « fermer » certaines des régions où se trouvent x et y). On a donc, dans tous les cas où $d=\theta+1$, comme ici, $x-y\leq\sqrt{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$. et l'on voit que chacune des deux réduites dont le déterminant est $\theta+1$ vérifie $|q(q\xi-p)|\geq\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

$D=7$.

D'après III. 1, $d=1$, ω, 2, $\omega+1$, $2\omega-1$, 2ω, $\omega+2$ ou 3.

Si $d=3$, 2ω, $\omega+2$, $\omega+1$ ou 2, les classes premières à d sont représentables par des entiers de module inférieur à $|d|-1$, ce qui contredit la remarque de III. 2.

Si $d=2\omega-1$, un système complet de restes $(\mathrm{mod}\,2\omega-1)$ est -1, $-\bar{\omega}$, 0, ω, 1, $\omega+1$, 2. Mais les classes de $\omega+1$ et 2 ont pour inverses celles de $-\omega$ et ω, et, comme $\omega=\sqrt{2}<\sqrt{7}-1$, la remarque de III. 2 montre que $2\omega-1$ n'est pas une valeur de d.

Si $d=\omega$, on vérifiera que la relation $b\equiv a\pmod{\omega}$, avec x voisin de 1 et y voisin de -1, par exemple, conduit à un système (T*) impossible; donc ω est une valeur de d.

$D = 8$.

D'après III. 1, $d = 1, \theta, \theta+1, 2, \theta+2, 2\theta, 2\theta+1, 3$ ou $\theta+3$.

Si $d = 3, 2\theta+1, 2\theta$ ou $\theta+2$, les classes premières à d sont représentables par des entiers de module inférieur à $|d|-1$, ce qui contredit III. 2.

Si $d = \theta+3$, un système complet de restes est formé par $0, 1, 2, \theta, \theta+1, \theta+2$ et leurs opposés.
Il ne reste, d'après III. 2, à examiner (au signe près) que la relation $b \equiv a(\theta+2) \pmod{\theta+3}$ qui admet la solution $a = \bar{\theta}, b = 0$, où $|a|+|b| = 2\sqrt{2} < \sqrt{11} = |d|$.

Si $d = 2$, on vérifiera que la relation $b \equiv a(\theta+1) \pmod 2$ donne un système (T*) impossible avec x voisin de 1 et y voisin de -1, par exemple.

Si $d = \theta+1$, on vérifiera que la relation $b \equiv a \pmod{\theta+1}$ donne un système (T*) impossible avec x voisin de 1 et y voisin de -1, vérifiant les conditions $\left|1+\frac{\theta}{x}\right| > \sqrt{3}, |\theta y+1| > \sqrt{3}$.

Si $d = \theta$, on vérifiera que la relation $b \equiv a \pmod\theta$ donne un système (T*) impossible avec x voisin de 1 et y voisin de -1.

$D = 11$.

D'après III. 1, $d = 1, \omega, 2, \omega+1, 3, \omega+2, 2\omega-1, 2\omega, 2\omega+1, \omega+3$ ou 4.

Si $d = \omega+3, 2\omega, 2\omega-1$ ou $\omega+2$, les classes premières à d qui ne sont pas représentables par des entiers de module inférieur à $|d|-1$ ont pour inverses des classes représentables par de tels entiers, ce qui contredit III. 2.

Si $d = 4$, il ne subsiste, au signe près, que la relation $b \equiv (2\omega-1)a$, qui admet la solution $a = \bar{\omega}, b = 1+\omega$, telle que $|a|+|b| = \sqrt{3}+\sqrt{5} < 4$, ce qui contredit III 2.

Si $d = 2\omega+1$, il ne subsiste, au signe près, que la relation $b \equiv 4a$, qui admet la solution $a = \omega, b = -2$, telle que $|a|+|b| = 2+\sqrt{3} < \sqrt{15} = |d|$, ce qui contredit III. 2.

Si $d = 3$, il ne subsiste, au signe près, que la relation $b \equiv a(\omega+1)$, qui donne des solutions au système (T), quels que soient x et y.

En effet, supposons au contraire (T) impossible. D'après $|x| > 1$, on ne peut avoir à la fois $\left|\bar{\omega} - \frac{\bar{\omega}}{x}\right| \geq 3$ et $\left|\omega + \frac{\omega}{x}\right| \geq 3$ et par suite on n'a pas à la fois $|\bar{\omega}y - \bar{\omega}| < 3$, $|\omega y + \omega| < 3$; supposons par exemple $|\omega y + \omega| \geq 3$. De même, on montre que ou bien $|y-(\omega+1)| \geq 3$, ou bien $|(\omega+1)y-1| \geq 3$; mais chacune de ces deux hypothèses contredit $|\omega y+\omega| \geq 3$, puisque $|y| < 1$. Ainsi (T) est toujours possible, et 3 n'est pas une valeur de d.

Si $d = \omega+1$, on vérifiera l'impossibilité de (T*) pour la relation $b \equiv a\bar{\omega}$

avec x voisin de 1 et y voisin de -1, vérifiant les conditions $\left|1+\frac{\bar{\omega}}{x}\right|>\sqrt{5}$, $|\bar{\omega}y-1|>\sqrt{5}$.

Si $d=2$ ou ω, on vérifiera l'impossibilité de (T*) pour les relations respectives $b\equiv a\omega \pmod 2$ et $b\equiv a \pmod\omega$, avec x voisin de 1 et y voisin de -1.

D = 19.

D'après III. 1, $d=1$, 2, ω, $\omega+1$, 3, $\omega+2$, 4, $\omega+3$, $2\omega-1$, 2ω, $2\omega+1$, 5, ou $\omega+4$.

Si $d=2\omega$, $\omega+3$ ou $\omega+2$, la contradiction avec III. 2 est immédiate.

Si $d=\omega+4$, il ne reste, au signe près, que $s=-9$ et 11, appartenant d'ailleurs à des classes inverses. Mais, d'après $-9\bar{\omega}\equiv\bar{\omega}\equiv 11\bar{\omega}$, on peut satisfaire les congruences correspondantes avec $|a|+|b|=2\sqrt{5}<5$.

Si $d=5$, il ne reste, aux symétries près, que $s=2\omega-1$ et $2\omega+1$, permettant $a=\bar{\omega}$ et $b=\bar{\omega}$, donc $|a|+|b|=2\sqrt{5}<5$.

Si $d=2\omega+1$, il ne reste, au signe près, que $s=6$ et 4, appartenant à des classes inverses. Pour $b\equiv 6a$ par exemple, on a $a=2$, $b=-\omega$ donnant $|a|+|b|=2+\sqrt{5}<\sqrt{23}$.

Si $d=2\omega-1$, il ne reste, au signe près, que $s=4$ et 5, appartenant à des classes inverses. Pour $b\equiv 5a$ par exemple, on a $a=2$, $b=\omega$ donnant $|a|+|b|=2+\sqrt{5}<\sqrt{19}$.

Si $d=4$, il ne reste, aux symétries près, que $s=2\omega-1$ et $2\omega+1$, permettant $a=2$ et $b=\pm 2$, donc $|a|+|b|\leqq 4$.

Si $d=3$, avec $b\equiv a(\omega+1)$; ou $d=\omega+1$, avec $b\equiv 3a$; ou $d=\omega$, avec $b\equiv 2a$; ou $d=2$, avec $b\equiv a\omega$, on vérifiera l'impossibilité de (T*) avec x voisin de 1 et y voisin de -1, et, dans le second cas, la condition supplémentaire $\left|1+\frac{\bar{\omega}}{x}\right|>\sqrt{7}$.

Table des valeurs de d.

D	*d.*	D	*d.*
3	1	8	1, θ, $\theta+1$, 2
4	1, $\theta+1$	11	1, ω, 2, $\omega+1$
7	1, ω	19	1, 2, ω, $\omega+1$, 3

Il faut naturellement compléter cette table par les rotations et symétries.

IV. — Meilleures suites régulières. Précisions pour D = 3 et 4.

IV.1. Nous supposons que K est l'un des cinq corps où *l'algorithme d'Euclide* est valable, c'est-à-dire D = 3, 4, 7, 8 ou 11.

De l'algorithme d'Euclide résulte, pour toute fraction irréductible $\frac{p_0}{q_0}$ donnée, l'existence d'au moins une fraction $\frac{p}{q}$ adjacente à $\frac{p_0}{q_0}$ et telle que $|qx-p|<|q_0x-p_0|$, x étant un nombre complexe donné qui n'appartient pas à K. De plus, $\frac{p}{q}$ sera irréductible.

On peut donc définir des suites de fractions approchant x, qu'on appelle *meilleures suites régulières* de x : $\frac{p_0}{q_0}$ étant une réduite quelconque de x (irréductible puisqu'il n'y a pas dans K d'idéaux non principaux), $\frac{p_n}{q_n}$ sera la plus simple des fractions $\frac{p}{q}$ adjacentes à $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ telles que $|qx-p|<|q_{n-1}x-p_{n-1}|$, étant entendu que, s'il y a plusieurs fractions aussi simples vérifiant cette condition, $\frac{p_n}{q_n}$ doit être l'une de celles qui rendent $|qx-p|$ le plus petit possible (pour les « cas limites », *voir* en II. 1 la définition des réduites).

On voit immédiatement qu'aucun dénominateur q_n n'est nul, sauf peut-être q_0 (et alors $|p_0|=1$).

D'après les conditions d'adjacence, on peut, en multipliant au besoin p_n et q_n par une même unité, écrire les formules de récurrence :

$$p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2}, \qquad q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2},$$

où a_n est un entier, qu'on peut appeler le quotient incomplet de rang n.

Posons

$$x_n=-\frac{q_{n-2}x-p_{n-2}}{q_{n-1}x-p_{n-1}} \qquad \text{et} \qquad y_n=-\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}.$$

x_n et y_n sont finis et non nuls, le premier hors de K et le second dans K, et ils satisfont à la même récurrence :

$$x_n-a_n=\frac{1}{x_{n+1}}, \qquad y_n-a_n=\frac{1}{y_{n+1}}.$$

Le quotient incomplet a_n est défini, à partir de x_n et de y_n, par les conditions que $|x_n-a_n|<1$ et $|y_n-a_n|$ minimum, étant entendu qu'en cas de doute, il faut rendre aussi $|x_n-a_n|$ minimum, ce qui s'exprime encore par l'impossibilité des systèmes (l'inconnue étant l'entier a) :

$$\begin{aligned} &|x_n-a|<1 && |y_n-a|<|y_n-a_n|,\\ &|x_n-a|<|x_n-a_n| && |y_n-a|=|y_n-a_n|. \end{aligned}$$

Ces systèmes peuvent encore s'écrire, en posant $a-a_n=b$:

$$\begin{aligned} &|bx_{n+1}-1|<x_{n+1} && |by_{n+1}-1|<1,\\ &|bx_{n+1}-1|<1 && |by_{n+1}-1|=1. \end{aligned}$$

La dernière équation pouvant évidemment s'écrire $|by_{n+1} - 1| \leq 1$, ce sont donc les systèmes (T) et (S') avec $a = 1$.

En particulier, en prenant pour b une unité $\frac{1}{u}$, on a, à tout rang n, l'impossibilité que $x_n \in i(u)$, $y_n \in i'(u)$.

IV.2. Il résulte immédiatement des définitions qu'on a $|x_n| > 1$, mais il n'est pas évident que $|y_n| < 1$. Nous allons établir ce point, essentiel pour la validité de l'algorithme.

Nous utilisons, à titre de lemme, l'invariance par le groupe modulaire de K d'une famille F de cercles finis et infinis comprenant :

1° les cercles $\frac{(a)}{b}$ avec $b \in N$, $a \in E$, b divisant $\|a\| - 1$;

2° les droites $[u, z] = c$ avec $u \in U$, $c \in Z$.

Il suffit de vérifier l'invariance par les translations d ($d \in E$) et par l'inversion par rapport au cercle (o).

Or la première, évidente pour les droites, résulte pour les cercles du fait que $\|a + db\| - 1 = \|a\| - 1 + b[a, d] + b^2\|d\|$ est divisible par b en même temps que $\|a\| - 1$.

Pour la seconde, remarquons que si a est complexe, mais non de module 1, et b réel non nul, l'inverse par rapport à (o) du cercle $\frac{(a)}{b}$ est le cercle $\frac{(a)}{c}$ avec $bc = \|a\| - 1$, ce qui prouve qu'un cercle de F devient un cercle de F, à moins que $a \in U$. Dans ce dernier cas, l'inverse de $\frac{(a)}{b}$ est la droite $[z, \bar{a}] = b$ (et réciproquement); la droite $[z, a] = o$ devient $[z, \bar{a}] = o$; F est bien invariante.

Démontrons maintenant la propriété envisagée. Supposons, au contraire, $|y_{n+1}| \geq 1$. Alors $|y_n - a_n| \leq 1$, c'est-à-dire $y_n \in i'(a_n)$, tandis que $x_n \in i(a_n)$. Donc x_n et y_n appartiennent à un même cercle de F (je sous-entends que x_n est à l'intérieur et y_n à l'intérieur ou sur la frontière).

Or il est impossible que, à quelque rang i, x_i et y_i appartiennent (avec le même sous-entendu) à un cercle $\frac{(a)}{b}$ de F où a soit une unité. Nous l'avons vu pour $b = 1$, et c'est vrai *a fortiori* pour $b \in N$, les cercles correspondants étant intérieurs au précédent. De la sorte, la transformation modulaire qui fait passer de x_n et y_n à x_{n-1} et y_{n-1} transforme le cercle de F auquel les premiers appartiennent en un véritable cercle, et par conséquent les intérieurs sont associés. Donc x_{n-1} et y_{n-1} appartiennent à un même cercle de F; de même pour x_{n-2} et y_{n-2}, etc., donc $\frac{1}{x_2}$ et $\frac{1}{y_2}$ appartiennent à un même cercle $\frac{(a)}{b}$ de F, c'est-à-dire qu'on a

$$\left|a - \frac{b}{x_2}\right| < 1, \qquad \left|a - \frac{b}{y_2}\right| \leq 1$$

et la fraction $\frac{p}{q} = \frac{ap_1 + bp_0}{aq_1 + bq_0}$ vérifie

$$|qx - p| < |q_0 x - p_0|, \quad |q| \leq |q_0|,$$

ce qui contredit l'hypothèse que $\frac{p_0}{q_0}$ est une réduite. De cette absurdité résulte que, à tout rang n, on a $|y_n| < 1$.

Remarque. — On démontrera aussi l'impossibilité de $x_n \in i'\frac{(a)}{b}$, $y_n \in i\frac{(a)}{b}$ pour tout cercle $\frac{(a)}{b}$ de F.

IV. 3. Montrons que $|x_n - y_n|$ est borné inférieurement par une quantité positive.

En effet, le couple (x_n, y_n) appartient à l'ensemble Ω des couples (x, y) tels que $|x| \geq 1$, $|y| \leq 1$ et que les deux inégalités simultanées $|x - a| < 1$ et $|y - a| < 1$ soient impossibles pour tout $a \in E$. S'il existait dans Ω des couples tels que $|x - y|$ soit arbitrairement petit, il y aurait des couples où $x = y$; un tel nombre complexe serait à une distance au moins égale à 1 de tout $a \in E$, ce qui est impossible, puisque l'algorithme d'Euclide est valable pour K.

Il existe donc un nombre $g > 0$ tel que $|x_n - y_n| > g$. L'interprétation de ce résultat est immédiate, en écrivant que

$$|x_n - y_n| = \left| \frac{p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1}}{q_{n-1}(q_{n-1}x - p_{n-1})} \right| = \frac{1}{|q_{n-1}(q_{n-1}x - p_{n-1})|}.$$

On a donc, pour chaque fraction $\frac{p}{q}$ d'une meilleure suite régulière du nombre x, $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{g|q|^2}$.

Nous avons vu plus haut que toute suite régulière de fractions commençant par une réduite de x est une meilleure suite régulière de x à la condition d'impliquer à chaque rang n l'impossibilité des systèmes (T) et (S') avec $a = 1$.

De l'existence de $g > 0$ résulte aisément l'existence d'une constante finie B telle qu'il suffit de vérifier cette impossibilité pour $|b| < B$. Comment peut-on définir un système minimum de conditions à vérifier à chaque rang? Peut-on s'affranchir de la condition de départ? Quelles relations y-a-t-il entre les différentes « meilleures suites régulières » d'un même nombre? Existe-t-il un nombre x, une meilleure suite régulière de x, et un rang n tels que x_n et y_n prennent des valeurs données convenablement choisies? Peut-on prendre pour meilleure suite régulière celle dont la première fraction est $\frac{1}{0}$? A ces questions, liées à celle de la « valeur exacte » de g, je ne sais apporter que des réponses partielles, pour lesquelles il est évidemment nécessaire de disjoindre les différents corps. On notera que l'utilisation « pratique » de l'algorithme (dans des démonstrations telles que celles de V et VI) ne souffre pas de cette situation.

Pour terminer ces considérations générales, je donne une définition. Il résulte évidemment de ce qui précède qu'une suite infinie d'entiers prise arbitrairement n'est pas la suite des quotients incomplets d'une meilleure suite régulière d'un nombre x (ou, comme nous dirons plus brièvement, un développement de x). Il existe des séquences d'un nombre fini d'entiers qui ne figurent — à titre de quotients incomplets consécutifs — dans aucun développement. Telles sont par exemple la séquence réduite au seul entier 0, ou bien celle composée d'un entier rationnel positif et d'un entier rationnel négatif. Ces séquences sont dites interdites. Les exemples précédents concernent des séquences interdites dans tous les corps. Il y en a aussi de particulières à chaque corps; on en verra de nombreux exemples.

Nous allons examiner plus en détail les cas $D = 3$ et $D = 4$.

IV. 4. $D = 3$.

D'après les résultats de III. 4, nous voyons que la meilleure suite régulière qui débute par la réduite $\frac{p_0}{q_0}$ ne diffère pas de l'ensemble des réduites suivant $\frac{p_0}{q_0}$ dans la suite de meilleure approximation. Nous allons donner de ce fait remarquable une deuxième démonstration, en même temps que nous répondrons aux questions précédentes.

Soit donnée une suite régulière de fractions où les nombres x_n et y_n vérifient $|x_n| > 1$ et $|y_n| < 1$ et rendent impossible le système

$$(T) \qquad |bx_n - a| < |x_n| \qquad |by_n - a| < 1$$

lorsque a et b sont des unités (où l'on peut supposer $a = 1$, donc les meilleures suites régulières vérifient ces propriétés). Montrons que ce système est également impossible en entiers quelconques a, b (ce qui entraîne que la suite considérée est l'ensemble de toutes les réduites, à partir de l'une d'entre elles). Nous utilisons comme intermédiaire une minoration de $|x_n - y_n|$.

D'après les rotations et symétries, on peut supposer $0 \leq \arg x_n \leq \frac{\pi}{6}$, de sorte que x_n satisfait $|bx_n - 1| < |x_n|$, avec $b = 1$ et $b = \bar{\omega}$. On doit donc avoir $|y_n - 1| \geq 1$ et $|y_n - \omega| \geq 1$, et le minimum de $|x_n - y_n|$ est fourni, pour y_n, par les points 0 et $\bar{\omega}$; donc $|x_n - y_n| \geq 1$. En fait, le minimum est fourni par 0 tant que $\arg(x_n - 1) \geq \frac{\pi}{6}$, c'est-à-dire $|\omega x_n - 1| \geq 1$; dans le cas contraire, $|\omega x_n - 1| < 1$ implique $|y_n - \bar{\omega}| \geq 1$ et le minimum est encore fourni par 0; ainsi, on a, dans tous les cas, $|x_n - y_n| \geq |x_n|$ (avec l'inégalité stricte, sauf au début). Si le système (T) a des solutions, c'est avec

$$|b| < \frac{1 + |x_n|}{|x_n - y_n|} \qquad \text{et} \qquad |a| < \frac{(1 + |y_n|)\,|x_n|}{|x_n - y_n|}$$

donc, ici, $|b| < 1 + \frac{1}{|x_n|}$, $|a| < 1 + |y_n|$, c'est-à-dire $|a|$ et $|b| = 1$ ou $\sqrt{3}$.

Mais (T) est impossible avec $a=b=1$, donc aussi avec $|a|=|b|=\sqrt{3}$, car tous les entiers de norme 3 sont équivalents. Eu égard aux rotations, il suffit donc de vérifier l'impossibilité pour $b=1$, $a=\omega+1$ et pour $b=\omega+1$, $a=1$. Même, une seule des deux vérifications suffit, puisque les hypothèses sont invariantes par l'échange de x_n et $\frac{1}{y_n}$, de y_n et $\frac{1}{x_n}$, et de a et b.

Supposons donc $b=1$, $a=\omega+1$; alors $y_n \in i(\omega+1)$ implique $y_n \in i(\omega)$ et $y_n \in i(1)$, tandis que $|x_n-(\omega+1)|<|x_n|$ implique $|x_n-\omega|<|x_n|$ ou $|x_n-1|<|x_n|$, ce qui montre l'impossibilité.

Nous avons donc obtenu la démonstration cherchée, répondu aux questions du paragraphe précédent, et découvert que la meilleure valeur de g est 1; nous avons même un résultat un peu plus fort. En effet, $|x_n-y_n|>|x_n|$ (pour $n>2$) implique

$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{|q_n q_{n+1}|} \qquad (\text{pour } n>0).$$

Que ce théorème soit « le meilleur possible » résulte de la démonstration, ou encore de la considération des nombres x réels.

IV. 5. $D=4$.

Soit donnée une suite régulière de fractions où, à tous les rangs n, les nombres x_n et y_n vérifient $|x_n|>1$ et $|y_n|<1$ et rendent impossibles les systèmes (T) et (S′) pour $|a|=1$ et $|b|=1$ ou $\sqrt{2}$. Les meilleures suites régulières vérifient ces conditions.

Montrons d'abord que $|x_n-y_n|>1$. Nous pouvons supposer $0\leq \arg x_n \leq \frac{\pi}{4}$. On a donc $|x_n-1|<|x_n|$.

Si $\mathcal{I}(x_n)>\frac{1}{2}$, de sorte que $|x_n-\theta|<|x_n|$, on a donc $|y_n-1|\geq 1$, $|y_n-\theta|\geq 1$, d'où résulte $|x_n-y_n|>|x_n|>1$.

Supposons maintenant $\mathcal{I}(x_n)\leq\frac{1}{2}$. Si $x_n \in i(1+\theta)$, on a $|(1-\theta)x_n-1|<|x_n|$ donc $|(1-\theta)y_n-1|\geq 1$, ce qui implique encore $|x_n-y_n|>|x_n|>1$. Enfin, si $x_n \in e'(1+\theta)$, on a $|x_n-y_n>|1-y_n|\geq 1$.

Montrons maintenant que toutes les fractions de la suite sont des réduites, c'est-à-dire que les systèmes (S′) et (S″) sont impossibles. Ils le sont évidemment pour $|a|=1$ et $|b|=1$ ou $\sqrt{2}$, le premier par hypothèse, et le second parce qu'il implique (T). D'autre part, les solutions de (S′) et (S″) vérifient $|b|<\frac{2}{|x_n-y_n|}$ et $|a|<\frac{|x_n|+|y_n|}{|x_n-y_n|}$. D'après les raisonnements précédents, ceci implique $|b|<2$.

Montrons qu'on a aussi $|a|<2$.

Ceci est évident dans les deux premiers cas du raisonnement précédent, d'après $|x_n - y_n| > |x_n| > 1 > |y_n|$.

Examinons le troisième cas, où $x_n \in e'(1+\theta)$ avec $0 \leq \mathcal{I}(x_n) \leq \frac{1}{2}$ et $\mathcal{R}(x_n) \geq 1$. On a $y_n \in e(1)$. Montrons d'abord que y_n est du même côté que 0 de la droite joignant 1 et θ, c'est-à-dire $|1+\theta-y_n| \geq |y_n|$. En effet, dans le cas contraire, on aurait $|1+\theta-y_n| < |y_n|$ et $|1+\theta-x_n| < |x_n|$, ce qui donnerait une solution de (T) au rang précédent avec $|a|=1$ et $|b|=\sqrt{2}$. Soit maintenant α l'intersection extérieure à (0) des cercles (1) et $(1+\theta)$, et β l'intersection intérieure à (0) du cercle (1) et de la droite joignant 1 et θ. On voit aisément que

$$\left|\frac{x_n}{x_n-y_n}\right| \leq \left|\frac{x_n}{x_n-\beta}\right| \leq \left|\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\right| \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{y_n}{x_n-y_n}\right| \leq \left|\frac{y_n}{1-y_n}\right| \leq \left|\frac{\beta}{1-\beta}\right| = |\beta|$$

de sorte que

$$|a| < \left|\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\right| + |\beta| = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} = 1,218\ldots + 0,765\ldots = 1,983\ldots < 2.$$

Comme tous les entiers de norme 2 sont équivalents, l'impossibilité de (S') et (S'') pour $|a|=|b|=\sqrt{2}$ résulte de cette impossibilité pour $|a|=|b|=1$.

Il nous reste à examiner, à des rotations près, les systèmes

$$|x_n-(1+\theta)|<1 \qquad |y_n-(1+\theta)| \leq 1$$

et

$$|x_n-(1+\theta)| \leq 1 \qquad |y_n-(1+\theta)|<1.$$

Or le premier s'écrit :

$$|(1-\theta)x_n-1|<|x_n| \qquad |(1-\theta)y_n-1| \leq |y_n|.$$

Il implique un système (T) puisque $|y_n|<1$, donc est impossible. Le deuxième implique $|x_{n-1}-a| \leq 1$, $|y_{n-1}-a|<1$ avec $a=a_{n-1}-\theta+1$, donc il implique un système (T) avec $b=1$ au rang $n-1$. D'autre part, $y_n \in i(1+\theta) \cap i(0)$ est donc contenu dans $i(1) \cup i(\theta)$ et l'on peut supposer, d'après l'impossibilité de (T) pour $|a|=|b|=1$, et à une symétrie près, $\mathcal{I}(x_n) \leq \frac{1}{2}$ et $y_n \in e(1)$. On a alors nécessairement $a_{n-1}=\theta-1$, $2\theta-1$, θ ou 2θ. Dans le premier cas, $a=0$; il y a contradiction avec $|x_n|>1$. Dans les deux suivants, $|a|=1$; il y a contradiction avec l'impossibilité de (T) pour $|a|=|b|=1$. Enfin, dans le cas $a_{n-1}=2\theta$, on a $|x_{n-1}-\theta|<|x_{n-1}|$ et $|y_{n-1}-\theta|<1$, ce qui est encore impossible.

Ainsi, toutes les fractions de la suite sont des réduites.

Examinons maintenant le système (T). Il implique $|b| < \frac{1+|x_n|}{|x_n-y_n|}$ et

$a| < \frac{|x_n|(1+|y_n|)}{|x_n - y_n|}$ Or, nous avons vu que $\left|\frac{x_n}{x_n - y_n}\right| < 1{,}218\ldots$, de sorte que $|a|$ et $|b|$ sont bornés par $2{,}218\ldots$ et ne peuvent donc prendre que les valeurs 1, $\sqrt{2}$ et 2. On vérifiera aisément qu'il n'y a pas de solutions avec $|a|$ ou $|b| = 2$. Les seules solutions possibles sont donc avec $|a| = \sqrt{2}$ et $|b| = 1$, donc aux rotations près, par exemple $a = 1 + \theta$ et $b = 1$. On a donc $|x_n - (1+\theta)| < |x_n|$, et, puisqu'on peut supposer par symétrie $\arg x_n \leq \frac{\pi}{4}$, $\mathcal{R}(x_n) > \frac{1}{2}$; donc $y_n \in e'(1)$ puisque (T) est impossible pour $a = b = 1$. On a déjà vu qu'on a de plus $|1 + \theta - y_n| \geq |y_n|$, ce qui limite y_n à un triangle (curviligne) dont les sommets sont 0, β et γ, ce dernier étant l'intersection intérieure à (o) de (1) et $(1+\theta)$, et par conséquent x_n est limité par les trois conditions

$$|x_n - (1+\theta)| < |x_n|, \qquad \mathcal{R}(x_n) \leq \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad x_n \in e(1+\theta).$$

Il résulte de ce régionnement que le système (T) possède au plus une solution (à une équivalence près). Lorsqu'il existe une solution, c'est-à-dire lorsque x_n et y_n sont dans les régions précédentes (ou celles qui s'en déduisent par une même rotation ou symétrie) la fraction correspondante $\frac{p'}{q'}$ est une réduite, d'après son unicité.

Alors $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$, $\frac{p'}{q'}$ et $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ sont des réduites consécutives.

Si x_n et y_n sont tels que (T) est impossible, on peut trouver, d'après III.3, un nombre x et deux fractions adjacentes avec x_n et y_n donnés, qui soient deux réduites consécutives de x.

Supposons maintenant (T) possible au rang n, x_n et y_n étant dans les régions indiquées précédemment. On voit facilement que $a_{n-1} = 0$ ou $0 - 1$ et que le système (T) est impossible au rang $n - 1$ (d'où il résulte qu'il est aussi impossible au rang suivant). Il existe donc un nombre x dont une meilleure suite régulière contient deux fractions consécutives avec x_n et y_n donnés, ces fractions n'étant pas deux réduites consécutives.

Sur les cinq réduites consécutives $\frac{p_{n-3}}{q_{n-3}}$, $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, $\frac{p_n}{q_n}$, une seule, $\frac{p'}{q'}$, manque dans toute meilleure suite régulière contenant la première. Mais $\frac{p'}{q'}$ est adjacente à $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$; donc la meilleure suite régulière de départ $\frac{p'}{q'}$ est identique aux précédentes dès le rang suivant. Toutes les meilleures suites régulières sont identiques à partir d'un certain rang.

La considération de $\frac{p'}{q'}$ n'offre guère d'intérêt que si

$$|q'(q'x - p')| < |q_{n-1}(q_{n-1}x - p_{n-1})|,$$

ce qui s'exprime par $|x_n-(1+\theta)|\,|y_n-(1+\theta)|<1$. On a donc, en vertu de $1>|y_n-(1+\theta)|\geqq|\beta-(1+\theta)|=\sqrt{2-\sqrt{2}}$, la majoration $|x_n-y_n|<1+\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}<2,4$; cette borne grossière suffit à limiter l'utilité de la réduite « intermédiaire ».

On a vu que la valeur exacte de g est 1. On peut aussi déterminer, sans aucune difficulté, les « valeurs exactes » des différentes constantes g^* telles que $|qx-p|<\frac{1}{g^*|q^*|}$, où $\frac{p}{q}$ est l'une des réduites, et $\frac{p^*}{q^*}$ sa suivante, soit dans la suite de meilleure approximation, soit dans les meilleures suites régulières.

V. — Détermination de la constante d'Hurwitz de $R(\sqrt{-11})$.

V. 1. D'après II. 5, la constante d'Hurwitz C_{11} de $R(\sqrt{-11})$ est au plus égale à $\frac{\sqrt{5}}{2}=1,118\ldots$. Nous allons rechercher s'il existe des nombres x tels que $C(x)<\frac{\sqrt{5}}{2}$. Si l'on développe ces nombres en une meilleure suite régulière, on a $\overline{\lim}\,|x_n-y_n|\leqq C(x)$, donc *a fortiori* $\overline{\lim}\,|x_n-y_n|<\frac{\sqrt{5}}{2}$. On peut donc exclure les meilleures suites régulières présentant une infinité de rangs n où $|x_n-y_n|\geqq\frac{\sqrt{5}}{2}$. Pour préciser, nous dirons qu'une séquence de quotients incomplets est exclue (λ), où λ est un nombre réel supérieur à $\frac{\sqrt{5}}{2}$, si, dans toute meilleure suite régulière contenant cette séquence, on a nécessairement $|x_n-y_n|\geqq\lambda$ pour au moins un rang n (lié à la séquence). Ainsi, si a est un entier différent de ±1, $\pm\omega$, $\pm\bar{\omega}$, $\pm(\omega+1)$, $\pm(\bar{\omega}+1)$, ±2, $\pm(\omega+2)$, $\pm(\bar{\omega}+2)$, ±3, on a $|a|\geqq\sqrt{11}=3,316\ldots$ et la séquence constituée de ce seul entier est exclue $(1,31)$, puisque dans toute meilleure suite régulière où $a_n=a$, on a $|x_n-y_n|\geqq|a|-|x_n-a|-|y_n|>|a|-2$ d'après $|y_n|<1$, $|x_n-a_n|<1$.

Une séquence exclue ne peut donc plus, à partir d'un certain rang, figurer dans les developpements des nombres x que nous cherchons. En particulier, ces développements sont constitués, à partir d'un certain rang, uniquement par les dix-huit entiers énumérés neuf lignes plus haut.

Il est aisé de restreindre cette liste.

En effet, si $a_n=\omega+2$, $\bar{\omega}+2$ ou 3, on a $\mathcal{R}(x_n)>2$, car d'après $|\omega+2-y_n|>|\omega+1-y_n|$, $a_n=\omega+2$ implique $x_n\in e'(\omega+1)$. En particulier $|x_n-1|<|x_n|$, donc on a $|y_n-1|\geqq1$ puisque (T) est impossible pour $a=b=1$. Or $y_n\in i(0)\cap e'(1)$ implique $\mathcal{R}(y_n)<\frac{1}{2}$. On a donc

$\mathcal{R}(x_n - y_n) > 1{,}5$, donc aussi $|x_n - y_n| > 1{,}5$ et les six derniers entiers de la liste sont exclus (1,5).

V. 2. Supposons maintenant $a_n = 2$.
Comme précédemment, on a $x_n \in e'(1)$ et $y_n \in e'(1)$.

Si x_n n'est ni dans $i(\omega+1)$, ni dans $i(\bar{\omega}+1)$, $\mathcal{R}(x_n)$ est minimum lorsque x_n est l'intersection, intérieure à (2), de (1) et $(\omega+1)$, soit $\frac{15+\sqrt{33}+i(3\sqrt{11}-\sqrt{3})}{12}$, donc on a $\mathcal{R}(x_n) \geq \frac{15+\sqrt{33}}{12}$, et $\mathcal{R}(x_n - y_n) \geq \frac{9+\sqrt{33}}{12} = 1{,}228\ldots$.

Si $x_n \in i(\omega+1)$, par exemple, on a $|\omega+1-y_n| \geq |2-y_n|$. On vérifiera élémentairement que le minimum de la distance de la région $i(\omega+1) \cap i(2) \cap e'(1)$ à la partie de la région $i(0) \cap e'(1)$ satisfaisant $|\omega+1-y| \geq |2-y|$ est obtenu pour les points $x = \frac{3+i\sqrt{3}}{2}$ et $y = \frac{5-\sqrt{22}+i\sqrt{12-2\sqrt{22}}}{6}$; on a donc $|x_n - y_n| \geq |x-y| \geq \mathcal{R}(x-y) = \frac{4+\sqrt{22}}{6} = 1{,}448\ldots$.

Ainsi 2 est exclu (1,22) et nous pouvons nous limiter aux développements constitués (à partir d'un certain rang) par les entiers ± 1, $\pm\omega$, $\pm\bar{\omega}$, $\pm(\omega+1)$, $\pm(\bar{\omega}+1)$.

V. 3. Étudions maintenant les séquences à deux termes $a_{p-1}a_p$, où $a_{p-1}+\omega$ et $a_p - \omega$ sont des entiers rationnels.

Comme $y_{p-1} \in i(0)$, $y_{p-1} - a_{p-1} = \frac{1}{y_p} \in i(-a_{p-1})$, donc selon que a_{p-1} est $-\omega-1$, $-\omega$, $\bar{\omega}$ ou $\bar{\omega}+1$, y_p appartient à $i\frac{(\bar{\omega}+1)}{4}$, $i\frac{(\bar{\omega})}{2}$, $i\frac{(-\omega)}{2}$ ou $i\frac{(-\omega-1)}{4}$; quant à x_p il appartient à $i(-\bar{\omega}-1)$, $i(-\bar{\omega})$, $i(\omega)$ ou $i(\omega+1)$.

Il y a seize cas possibles; on constatera qu'ils se ramènent à six par des considérations de symétrie.

Si $x_p \in i(\omega+1)$, tandis que $y_n \in i\frac{(\omega)}{2}$, $i\frac{(-\omega)}{2}$ ou $i\frac{(-\omega-1)}{4}$, $|x_p - y_p|$ est supérieur respectivement à $\frac{\sqrt{31}-3}{2} = 1{,}283\ldots$, $\frac{\sqrt{37}-3}{2} = 1{,}541\ldots$ ou $\frac{5\sqrt{5}-5}{4} = 1{,}545\ldots$.

Si $x_p \in i(\omega+1)$, $y_p \in i\frac{(\omega+1)}{4}$, on a $|x_p - y_p| > \left|x_p - \frac{\omega+1}{4}\right| - \frac{1}{4}$. Mais, comme $x_p \in e'(1)$, $\left|x_p - \frac{\omega+1}{4}\right|$ est minimum pour $x_p = \frac{9+\sqrt{33}+i(3\sqrt{11}+\sqrt{3})}{12}$ et vaut alors $\left|\frac{9+2\sqrt{33}+i(9\sqrt{11}+2\sqrt{3})}{24}\right|$, soit $\frac{\sqrt{31+2\sqrt{33}}}{4} = 1{,}629\ldots$; donc $|x_p - y_p| > 1{,}379$.

Si $x_p \in i(\omega)$, $y_p \in i\frac{(-\omega)}{2}$, la projection de $x_p - y_p$ sur la droite $o\omega$ est supérieure à $\sqrt{3} - \frac{1}{2} = 1{,}232\ldots$; donc $|x_p - y_p| > 1{,}232\ldots$.

Si $x_p \in i(\omega)$, $y_p \in i\frac{(\bar{\omega})}{2}$; on a $|x_p - y_p| > \left|x_p - \frac{\bar{\omega}}{2}\right| - \frac{1}{2}$.

Comme $x_p \in e'(1) \cap e(0)$, $\left|x_p - \frac{\bar{\omega}}{2}\right|$ est minimum pour $x_p = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ et vaut alors $\left|\frac{1 + i(2\sqrt{3} + \sqrt{11})}{4}\right| = \frac{\sqrt{6 + \sqrt{33}}}{2} = 1{,}713\ldots$; donc $|x_p - y_p| > 1{,}123\ldots$.

En résumé, les séquences à deux termes étudiées sont exclues (1,21).

V. 4. Supposons maintenant $a_n = \omega + 1$.

Montrons d'abord qu'on a nécessairement $a_{n-1} = -\bar{\omega}$ (ce qui signifie que les séquences à deux termes a, $\omega + 1$ sont exclues pour $a \neq -\bar{\omega}$). Comme $|\omega + 1 - y_n|$ est supérieur à $|\omega - y_n|$ et à $|1 - y_n|$, on a $x_n \in e'(1) \cap e'(\omega) \cap i(\omega + 1)$. De plus, $\mathcal{R}(x_n) > \frac{1}{2}$, donc $y_n \in e'(1)$.

Supposons d'abord $y_n \in i(0) \cap e'(1) \cap e'\frac{(\omega)}{2}$. On vérifiera élémentairement que $|x_n - y_n|$ est minimum pour $x_n = \frac{9 + \sqrt{33} + i(3\sqrt{11} + \sqrt{3})}{12}$, $y_n = \frac{4 - \sqrt{11} + i(2\sqrt{11} - 3)}{10}$, de sorte que $|x_n - y_n| > |1{,}1 + i\,0{,}6| > 1{,}25$ et ce cas est exclu (1,25) (le sens de cette expression se passe de définition).

Supposons maintenant, au contraire, $y_n \in i(0) \cap e'(1) \cap i\frac{(\omega)}{2}$, d'où $a_{n+1} - y_{n-1} \in i(-\bar{\omega}) \cap d'\left(-\frac{1}{2}\right)$, donc $a_{n+1} = \omega$ ou $-\bar{\omega}$; mais, si $a_{n-1} = \omega$, $y_{n-1} \in i(1)$ tandis que $x_n \in d(0)$ implique $x_{n+1} \in d\left(\frac{1}{2}\right)$, ce qui contredit l'impossibilité de (T) pour $a = b = 1$.

Examinons les valeurs possibles de a_{n+1} et a_{n+2}.

Remarquons d'abord que si $x_n \in i(\omega + 1) \cap e'(\omega)$ avec $\mathcal{I}(x) \geqq \mathcal{I}(\omega + 1)$, on a $|x_n| \geqq |\omega + 1| = \sqrt{5}$, donc $|x_n - y_n| > 1{,}236\ldots$.

On peut donc supposer $\mathcal{I}(x_n) < \mathcal{I}(\omega + 1)$, c'est-à-dire $\mathcal{I}(x_{n+1}) > 0$. De plus, $x_n \in e'(\omega) \cap e'(1)$ implique $x_{n+1} \in d'\left(-\frac{1}{2}\right) \cap e'\frac{(-\omega)}{2}$, donc $a_{n+1} = -\bar{\omega}$, ω, $\omega + 1$ ou 1. Mais dans le cas $a_{n+1} = 1$, on a $\mathcal{R}(x_n) > 2$ tandis que $\mathcal{R}(y_n) < 0{,}5$, donc $|x_n - y_n| > 1{,}5$.

Quant au cas $a_{n+1} = \omega + 1$, nous venons de voir qu'il est exclu (1,25) si $a_n \neq -\bar{\omega}$, ce qui est précisément le cas.

Il reste donc seulement $a_{n+1} = -\bar{\omega}$ ou ω.

De plus, si $x_{n+1} \in i(-\bar{\omega}) \cap i(\omega)$, comme $a_n - y_n \in d(0)$ implique $y_{n+1} \in g(0)$,

on a $|y_{n+1}+\bar{\omega}|<|y_{n+1}-\omega|$, et, par suite, $a_{n+1}=-\omega$. Donc, si $a_{n+1}=\omega$, on a $x_{n+1}\in i(\omega)\cap e'(-\bar{\omega})$, donc $x_{n+2}\in d(0)$ et aussi $x_n\in d\left(\frac{3}{2}\right)$.

Si $a_{n+1}=-\bar{\omega}$, on a $x_{n+1}\in i(-\bar{\omega})\cap d'\left(-\frac{1}{2}\right)\cap e'\frac{(-\bar{\omega})}{2}$, et par suite $x_{n+2}\in e(0)\cap d'(0)\cap e'(\omega)$, d'où $a_{n+2}=\omega+1$, 1, $\bar{\omega}+1$, $\bar{\omega}$ ou $-\omega$. Mais les trois derniers sont exclus (1,21) d'après V. 3; donc $a_{n+2}=\omega+1$ ou 1. Dans ce dernier cas, où $a_{n+2}=1$, on a encore $x_n\in d\left(\frac{3}{2}\right)$.

V. 5. Nous venons de voir que $\omega+1$ ne peut être suivi que de ω ou de $-\bar{\omega}$, ce dernier étant nécessairement suivi de $\omega+1$ ou de 1; dès lors, si la séquence $\omega+1\ -\bar{\omega}$ ne se répète pas indéfiniment, nous finirons par rencontrer $\omega+1$ suivi de ω ou de $-\bar{\omega}$ 1. Désignons ce rang par n : on a $a_n=\omega+1$ et $\mathcal{R}(x_n)>1,5$. Montrons que ceci impose $y_n\in i(0)\cap e'(1)\cap i\frac{(\omega+1)}{2}$. En effet, si $\mathcal{I}(y_n)\leq 0$, d'après $y_n\in i(0)\cap e'(1)$, le minimum de $|\omega+1-y_n|$ est atteint pour $y_n=0$, donc on a $|x_n-y_n|>\sqrt{5}-1=1,236\ldots$. Si $\mathcal{I}(y_n)>0$, mais $y_n\in e'\frac{(\omega+1)}{2}$, $\mathcal{R}(y_n)$ est maximum pour $y_n=\frac{9-\sqrt{33}+i(3\sqrt{11}-\sqrt{3})}{12}$ et vaut $\frac{9-\sqrt{33}}{12}$. On a donc $|x_n-y_n|>\frac{9+\sqrt{33}}{12}=1,228\ldots$.

Supposons maintenant $y_n\in i(0)\cap e'(1)\cap i\frac{(\omega+1)}{2}$ et examinons quels entiers peuvent précéder $a_{n-1}=-\bar{\omega}$. On a d'abord $y_{n-1}-a_{n-1}\in e(0)\cap g'\left(\frac{1}{2}\right)\cap i\frac{(\bar{\omega}+1)}{2}$, puis $y_{n-1}\in e(-\bar{\omega})\cap g'(0)\cap i\frac{(\omega)}{2}$ et $y_{n-2}-a_{n-2}\in e\frac{(-\omega)}{2}\cap g'(0)\cap i(\bar{\omega})$, d'où $a_{n-2}=-\bar{\omega}$ ou ω.

Si $a_{n-2}=\omega$, on a $y_{n-2}\in e\frac{(\omega)}{2}\cap g'\left(\frac{1}{2}\right)\cap i(1)$, d'où $y_{n-3}-a_{n-3}\in e(\bar{\omega})\cap e'(1)\cap d\left(\frac{1}{2}\right)$ et $a_{n-3}=-\omega$, $-\omega-1$ ou $-\bar{\omega}-1$.

Mais $-\omega$ et $-\omega-1$ ne peuvent être suivis de ω d'après V. 3. D'autre part, la séquence à deux termes $a_{n-3}=-\bar{\omega}-1$, $a_{n-2}=\omega$ se déduit par la symétrie $z\to -\bar{z}$ de la séquence $\omega+1\ -\omega$, et, d'après V. 4, a_{n-1} devrait être égal à $-\bar{\omega}-1$ ou -1, ce qui n'est pas ici le cas. Donc l'hypothèse $a_{n-2}=\omega$ est exclue.

Si $a_{n-2}=-\omega$, on a $y_{n-2}\in e\frac{(-\bar{\omega}-1)}{2}\cap g'\left(-\frac{1}{2}\right)\cap i(0)$, et par suite $y_{n-3}-a_{n-3}\in e\frac{(-\omega-1)}{2}\cap i'(-1)\cap e(0)$ et $a_{n-3}=\omega+1$, 1, $\omega+1$ ou $-\omega$. Les deux derniers sont exclus d'après V. 3; $a_{n-3}=\omega+1$ ne peut être suivi de $-\bar{\omega}\ -\bar{\omega}$ d'après V. 4; enfin, si $a_{n-3}=1$, on a $x_n\in e'(1)$, donc $x_{n-1}\in g'(0)$, puis $x_{n-2}\in g'\left(-\frac{1}{2}\right)$, et $x_{n-3}\in i'(0)$, ce qui est impossible.

Ainsi $\omega+1$ est exclu (1,21) sauf peut-être dans les suites pour lesquelles on a, à partir d'un certain rang, $a_{2p}=\omega+1$ et $a_{2p+1}=-\bar{\omega}$. Mais alors, x_{2n} est égal à l'une des racines de l'équation $x=\omega+1+1/(-\bar{\omega}+1/x)$ ou $-\bar{\omega}x^2+(3+\bar{\omega})x-\omega-1=0$, et y_{2n} tend vers l'autre racine, donc $|x_{2n}-y_{2n}|$ est voisin de $\left|\frac{\sqrt{-3\omega-3}}{-\bar{\omega}}\right|=\sqrt[4]{5}=1,495\ldots$, ce qui est encore exclu.

Donc, $\omega+1$ est exclu (1,21).

V.6. Il nous reste à étudier les développements constitués (à partir d'un certain rang) uniquement par les entiers 1, ω et leurs symétriques.

Signalons d'abord quelques types de séquences interdites (au sens de la définition donnée dans IV. 3).

I. Les séquences suivantes sont interdites parce qu'elles imposent, au rang de leur premier terme, $x_n\in i'(0)$.

$$1\ -1 \qquad\qquad \omega\ -\bar{\omega}\ \ \omega$$
$$1\ -\omega\ -1 \qquad\qquad \omega\ \ \omega\ -\bar{\omega}\ -\bar{\omega}$$
$$1\ \ \bar{\omega}\ -\omega\ -1 \qquad\qquad 1\ -\omega\ -\omega\ -\omega$$
$$1\ -\omega\ -\omega\ -1 \qquad\qquad 1\ -\omega\ -\omega\ \ \bar{\omega}$$

II. Sont interdites les séquences où $a_n=\bar{\omega}$, $x_n\in i(-\omega)$ et $|y_n+\omega|<|y_n-\bar{\omega}|$, c'est-à-dire $y_n\in g(0)$, en particulier celles où $a_n=\omega$ est précédé de 1, 1 $\bar{\omega}$, ω ω ou 1 $-\omega$ ω et suivi de -1, $-\omega$ -1 ou $-\omega$ $-\omega$.

III. De même, les séquences où $a_n=1$, $x_n\in i(\omega)$ et $|y_n-\omega|<|y_n-1|$, en particulier celles où $a_n=1$ est précédé de $-\omega$ $-\omega$ 1, $-\bar{\omega}$ ω, 1 $-\bar{\omega}$ $-\bar{\omega}$, ω $-\bar{\omega}$ ou $-\omega$ 1 $-\omega$ et suivi de $-\omega$ $-\omega$ ou $-\bar{\omega}$ $\bar{\omega}$.

Naturellement, les séquences symétriques sont aussi interdites.

V. 7. Montrons maintenant que 1 (ou -1) doit intervenir une infinité de fois dans le développement. Supposons au contraire qu'à partir d'un certain rang le développement soit constitué uniquement par ω et ses symétriques. D'après V.3, on peut supposer qu'il contient uniquement ω et $-\bar{\omega}$. Donc, ou bien un seul de ces entiers intervient à partir d'un certain rang, ou bien on rencontre une infinité de fois un cas tel que $a_n=\omega$, $a_{n+1}=-\bar{\omega}$. D'après I, on ne peut avoir $a_{n+2}=\omega$, donc on a $a_{n+2}=-\bar{\omega}$; on rencontre donc certainement un cas tel que $a_p=-\bar{\omega}$, $a_{p+1}=-\bar{\omega}$, $a_{p+2}=\omega$. Mais, d'après I, on ne peut avoir $a_{p-3}=\omega$ ni $a_{p+3}=-\bar{\omega}$, d'où la contradiction.

Il faut donc qu'un seul entier, soit ω, intervienne à partir d'un certain rang. Mais alors, x_n est égal à l'une des racines de l'équation $x=\omega+\frac{1}{x}$, et y_n tend

vers l'autre racine, donc $|x_n - y_n|$ est voisin de $\sqrt[4]{5} = 1{,}495\ldots$: et ce cas est exclu.

V. 8. Les développements que nous cherchons contiennent donc 1 (ou -1) une infinité de fois. Nous supposons donc maintenant $a_n = 1$ et examinons les valeurs possibles des entiers suivants. Il suffit d'examiner les trois cas où $a_{n+1} = 1$, $\bar{\omega}$ ou $-\omega$. (Désormais l'utilisation de V.3 ne sera plus explicitée.)

1° $a_n = 1$, $a_{n+1} = 1$:

$a_{n+2} = -1$ est interdit; $a_{n+2} = 1$ implique $x_{n+1} \in d\left(\frac{3}{2}\right)$, et, comme $y_{n+1} \in g'\left(-\frac{1}{2}\right)$, $|x_{n+1} - y_{n+1}| > 2$.

Si $a_{n+2} = \omega$, comme $y_{n+2} \in g(0)$, on a nécessairement $x_{n+2} \in e'(-\bar{\omega})$, donc $x_{n+2} \in d(0)$, ce qui implique $x_{n+1} \in d(1)$ et $|x_{n+1} - y_{n+1}| > 1{,}5$. On a donc $a_{n+2} = -\omega$ ou $-\bar{\omega}$. On verra de même que $a_{n-1} = -\omega$ ou $-\bar{\omega}$.

Supposons désormais $a_{n+2} = -\omega$. On a donc $x_{n+1} \in i\frac{(\omega+1)}{2}$. Si $a_{n-1} = -\bar{\omega}$, $y_{n+1} \in i\frac{(-\omega-1)}{2}$ et $|x_{n+1} - y_{n+1}| > |\omega + 1| - 1 = \sqrt{5} - 1 = 1{,}236\ldots$. On a donc $a_{n-1} = -\omega$, ce qui donne la séquence $-\omega \ 1 \ 1 \ -\omega$.

Examinons a_{n+3} et a_{n-2}.

Si $a_{n+3} = 1$, on a $x_{n+2} \in d(0)$, $x_{n+1} \in d(1)$ et $|x_{n+1} - y_{n+1}| > 1{,}5$; $a_{n+3} = -1$ est interdit (I); donc $a_{n+3} = -\omega$ ou $\bar{\omega}$.

Donc $a_{n-2} = -\omega$ est interdit (III); $a_{n-2} = -1$ est interdit (II); si $a_{n-2} = 1$, on a $y_n \in g(0)$ et $x_n \in d\left(\frac{3}{2}\right)$, donc $|x_n - y_n| > 1{,}5$; donc $a_{n-2} = \bar{\omega}$. Cherchons enfin a_{n-3} : $a_{n-3} = -1$ ou $-\omega$ est interdit (I); donc $a_{n-3} = 1$ ou $\bar{\omega}$.

Montrons qu'il en résulte $y_{n-2} \in g'(0)$: en effet, si l'on suppose que, pour $a_{n-3} = \bar{\omega}$, $y_{n-2} \in d(0)$, ceci implique $y_{n-3} \in d\left(\frac{1}{2}\right)$, tandis que $x_{n-3} \in i(1)$; donc c'est absurde : on a bien, par suite, $y_{n-2} \in g'(0)$; donc $y_{n-1} \in i'(-1)$; $y_n \in i'\frac{(-\omega)}{2}$, donc $\mathcal{R}(y_n) \leq \frac{1}{4}$, tandis que $\mathcal{R}(x_n) \geq \frac{3}{2}$; d'où $|x_n - y_n| > 1{,}25$.

Ce cas est donc exclu.

2° $a_n = 1$, $a_{n+1} = \bar{\omega}$:

$a_{n+2} = -1$ est interdit (II), et $a_{n+2} = 1$ est exclu (1,5) au rang $n+1$, comme plus haut; donc $a_{n+2} = -\omega$ ou $\bar{\omega}$.

Si $a_{n+2} = -\omega$, $a_{n+3} = -\omega$ ou -1 est interdit (II), $a_{n+3} = \omega$ est interdit (I), donc $a_{n+3} = 1$.

Si $a_{n+2} = \bar{\omega}$, $a_{n+3} = -1$ est interdit (II), donc $a_{n+3} = 1$, $\bar{\omega}$ ou $-\omega$. Si $a_{n+3} = -\omega$, $a_{n+4} = -1$ est interdit (II); $a_{n+4} = \bar{\omega}$ ou $-\omega$ sont interdits (I);

donc $a_{n+4}=1$; donc si $a_{n+3}=\overline{\omega}$ ou $-\omega$, on a $x_{n+3}\in i(\overline{\omega})$, donc $x_{n+2}\in i\frac{(1+\overline{\omega})}{2}$, $x_{n+1}\in i\frac{(2+\overline{\omega})}{2}$, donc $x_{n+1}\in d\left(\frac{3}{4}\right)$. Comme $y_{n+1}\in g\left(-\frac{1}{2}\right)$, on a $|x_{n+1}-y_{n+1}|>1{,}25$.

Reste le cas où $a_{n+3}=1$. Alors $x_{n+2}\in i(\overline{\omega})\cap d(1)$. Si de plus $x_{n+2}\in e^{i}\frac{(\overline{\omega}+1)}{2}$, le minimum de $\left|x_{n+2}+\frac{1}{2}\right|$ est obtenu pour $x_{n+2}=1-i\frac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{4}$ et vaut 1,960.... Comme $y_{n+1}\in g\left(\frac{1}{2}\right)$ entraîne $y_{n+2}\in i\frac{(-1)}{2}$, on a donc $|x_{n+2}-y_{n+2}|>1{,}460$. Si maintenant $x_{n+2}\in i\frac{(\overline{\omega}+1)}{2}$, on a $x_{n+1}\in i\frac{(\overline{\omega}+2)}{2}$, donc $x_{n+1}\in d\left(\frac{3}{4}\right)$ et $|x_{n+1}-y_{n+1}|>1{,}25$.

Conclusion :

1 ne peut être suivi de $\overline{\omega}$ que dans la séquence $1\,\overline{\omega}\,-\omega\,1$, que nous noterons A.

3° $a_n=1$, $a_{n+1}=-\omega$:

$a_{n+2}=-1$ est interdit (I), donc $a_{n+2}=-\omega$, $\overline{\omega}$ ou 1.
Si $a_{n+2}=-\omega$, $a_{n+3}=1$, car -1, $-\omega$, $\overline{\omega}$ sont interdits (I). Si $a_{n+2}=\overline{\omega}$, $a_{n+3}=1$ ou $\overline{\omega}$, car -1 et $-\omega$ sont interdits (I). Si $a_{n+3}=\overline{\omega}$, il peut être suivi d'un certain nombre de fois $\overline{\omega}$.
Introduisons donc les séquences $1\,-\omega\,\overline{\omega}\,\overline{\omega}$ et $\overline{\omega}\,\overline{\omega}\,\overline{\omega}$, en désignant par p le dernier rang, et en supposant $a_{p+1}\neq\overline{\omega}$. Cherchons a_{p+1} : $a_{p+1}=-1$ est interdit (II), ainsi que $a_{p+1}=-\omega$ suivi de $a_{p+2}=-\omega$ ou -1 ; $a_{p+1}=-\omega$, $a_{p+2}=\overline{\omega}$ est interdit (I) ; donc ou bien $a_{p+1}=1$, ou bien $a_{p+1}=-\omega$ et $a_{p+2}=1$.

Si $a_{p+1}=1$, $x_p\in d(1)$ tandis que, dans les deux cas, $y_p\in i\frac{(-\omega-1)}{2}$ donc $y_p\in g\left(-\frac{1}{1}\right)$ et $|x_p-y_p|>1{,}25$.

Conclusion :

1 ne peut être suivi de $-\omega$ que dans les séquences :

1	$-\omega$	1					notée	B
1	$-\omega$	$-\omega$	1				»	C
1	$-\omega$	$\overline{\omega}$	1				»	D
1	$-\omega$	$\overline{\omega}$	...	$\overline{\omega}$	$-\omega$	1	»	E (k fois $\overline{\omega}$, $k\geq 2$).

V. 9. Les développements cherchés sont donc constitués seulement par les séquences A, B, C, D, E et leurs symétriques. Mais, comme A, B, C, D, E commencent et finissent par 1 (et non -1), il faut se borner à ces séquences et à leurs imaginaires conjuguées, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$, $\overline{E}$.

Avant d'examiner ces combinaisons, prouvons que B ne peut être précédée que de $-\omega$.

Supposons donc $a_n = 1$, $a_{n+1} = -\omega$, $a_{n+2} = 1$.

Si $a_{n-1} = -\omega$, $y_{n+1} \in i\frac{(-\bar{\omega}-2)}{2}$ et $x_{n+1} \in i(-\omega) \cap e(0) \cap d(0)$, de sorte que $\left| x_{n+1} + \frac{\bar{\omega}+2}{2} \right|$ est minimum pour $x_{n+1} = -1$ et vaut alors $1{,}976\ldots$, d'où $|x_{n+1} - y_{n+1}| > 1{,}17$.

Si $a_{n-1} = \bar{\omega}$ ou ω, on a nécessairement la fin d'une séquence D ou $\bar{D}$.

Dans le premier cas, $a_{n-3} = 1$, $a_{n-2} = -\omega$, $a_{n-1} = \omega$, donc $y_{n-1} \in i\frac{(\omega)}{2}$ implique $y_n \in i(-\omega)$, d'où $|x_n - y_n| > \left| \frac{3\omega+2}{2} \right| - \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{37}-3}{2} = 1{,}541\ldots$, puisque $x_n \in i\frac{(\omega+2)}{2}$. Dans le second cas, $a_{n-3} = 1$, $a_{n-2} = -\bar{\omega}$, $a_{n-1} = \omega$, on a $y_n \in i(-1) \cap i(-\bar{\omega})$, donc $y_n \in i\frac{(-\bar{\omega}-1)}{2}$, et $x_n \in d(1)$, d'où $|x_n - y_n| > 1{,}25$.

Enfin $a_{n-1} = -1$ est interdit, et par suite on a $a_{n-1} = -\bar{\omega}$. De cette précision résulte la remarque, que les séquences $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$, E figurent toutes dans la liste de V. 8 (III) et impliquent au rang de leur dernier terme $|y_n - \omega| > |y_n - 1|$.

Introduisons quelques notations : UU′ désignera une séquence où, à un certain rang n, on a $a_n = 1$; $a_n a_{n+1} a_{n+2} \ldots$ constituant la séquence U′, alors que $\ldots a_{n-2} a_{n-1} a_n$ constituent la séquence U.

Désignons par Σ l'une quelconque des séquences A, B, C, D, E ; par $\bar{\Sigma}$ l'une quelconque des séquences $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$, $\bar{E}$; par Υ indifféremment Σ ou $\bar{\Sigma}$.

Envisageons les séquences $\bar{\Sigma}\Upsilon$. Il résulte de la remarque précédente qu'elles sont interdites pour $\Upsilon = C, D, E$, d'après III. $\Upsilon = \bar{B}$ a déjà été exclu.

Pour $\Upsilon = \bar{C}$, la projection de x_n sur la droite $o\bar{\omega}$ (orientée dans ce sens) est supérieure à $\frac{\sqrt{3}}{2}$, tandis que celle de y_n est inférieure à $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, d'où $|x_n - y_n| > \frac{5}{6}\sqrt{3} = 1{,}443\ldots$.

Enfin, pour $\Upsilon = \bar{A}$, $\bar{D}$, E, on a $x_n \in i\frac{(\omega+2)}{2}$, d'où, par projection sur la droite $\omega 1$, $|x_n - y_n| > \sqrt{3} - \frac{1}{2} = 1{,}232\ldots$.

Ainsi Υ ne peut être que A ou B; donc seules peuvent intervenir une infinité de fois les séquences A, B, $\bar{A}$, $\bar{B}$.

De plus, nous avons vu que B ne peut être précédée de $-\omega$, donc de A ou de B; et si $-\omega$ précède A, on a, au premier rang de A, $x_n \in i(\omega+1)$ et $y_n \in i\frac{(\bar{\omega})}{2}$, d'où $|x_n - y_n| > \left| \frac{3\omega+1}{2} \right| - \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{31}-3}{2} = 1{,}283\ldots$. Il y a donc alternance de séquences A ou B et de séquences $\bar{A}$ ou $\bar{B}$.

Mais, pour $\overline{B}A$, on a, au rang du 1 médian, $x_n \in i(\omega+1) \cap i(2)$, d'où $x_n \in i\frac{(\omega+3)}{2}$, et $y_n \in g(0)$, donc $|x_n - y_n| > 1{,}25$. Seules restent possibles, à partir d'un certain rang, les suites périodiques $A\overline{A}A\overline{A}\ldots$ et $B\overline{B}B\overline{B}\ldots$.

Pour les nombres dont le développement, à partir d'un certain rang, a pour période $A\overline{A}$, $\overline{\lim}|x_n - y_n|$ est au moins égale à la différence des racines de l'équation $x = 1 + 1/\omega + 1/-\omega + 1/1 + 1/\omega + 1/-\bar{\omega} + 1/x$ ou $4x^2 - 4x(1+\omega) + (1+3\bar{\omega}) = 0$ ce qui donne $\overline{\lim}|x_n - y_n| \geq \sqrt{2} = 1{,}414\ldots$.

Pour les nombres dont le développement, à partir d'un certain rang, a pour période $B\overline{B}$, $|x_n - y_n|$ a, pour chaque parité, la même limite que pour le nombre x de II. 5.

La démonstration de II. 5 prouve d'ailleurs que pour tous ces nombres (que nous appellerons critiques) $C(x) = \frac{\sqrt{5}}{2} = 1{,}118\ldots$.

En résumé, tous les nombres complexes sont exclus (1,21), sauf les nombres critiques, pour lesquels $C(x) = \frac{\sqrt{5}}{2}$. *Telle est donc la valeur de la constante d'Hurwitz de* $R(\sqrt{-11})$. *De plus, elle est isolée dans son spectre de Markoff. Les autres valeurs sont supérieures à* 1,21 (constante qu'on peut facilement améliorer de quelques centièmes).

V. 10. Remarques. — On peut énoncer le résultat $C_{11} \geq \frac{\sqrt{5}}{2}$ sous la forme : Pour tout x complexe, il existe une infinité de fractions $\frac{p}{q}$ de $R(\sqrt{-11})$ telles que $|q(qx-p)| < \frac{2}{\sqrt{5}} + \varepsilon$, si petit que soit $\varepsilon > 0$.

On peut remplacer ε *par* 0. Il suffit de le démontrer pour les nombres critiques. Or, pour ceux-ci, les formules de récurrence pour y_n se condensent, pour k assez grand, en :

$$\frac{y_{4k+4} - x}{y_{4k+3} - y} = \lambda \frac{y_{4k} - x}{y_{4k} - y}, \qquad \frac{y_{4k+6} - \bar{x}}{y_{4k+6} - \bar{y}} = \lambda \frac{y_{4k+2} - x}{y_{4k+2} - \bar{y}}$$

avec les notations de II. 5 et $\lambda = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$ réel > 1.

y_{4k} et y_{4k+2} tendent respectivement vers y et $\bar{y}$ le long de deux arcs de cercle (de rayon fini ou infini) passant respectivement par x, y et $\bar{x}$, $\bar{y}$. Notons que x et y sont sur (ω), mais $y_{4k} \in c'(\omega)$ d'après la remarque finale de IV. 2. On en déduit élémentairement que l'un des deux arcs au moins est supérieur à un demi-diamètre, ce qui montre que de $|x_{4k} - y_{4k}|$ et $|x_{4k+2} - y_{4k+2}|$ l'un au moins tend vers $\frac{\sqrt{5}}{2}$ par valeurs supérieures. Les fractions correspondantes satisfont $|q(qx-p)| < \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Comparons maintenant le développement précédent de x à celui que fournit *l'algorithme d'Hurwitz*. Désignons les nombres analogues aux précédents qui y interviennent par les mêmes lettres accentuées. Dans cet algorithme on choisit pour a'_n l'entier le plus proche de x'_n, avec $x'_0 = x$.

On obtient ainsi $a'_0 = 1$, $a'_1 = \omega$, $a'_2 = -\omega - 1$, $a'_3 = \omega + 1$ et l'on constate que $x'_4 = x'_2$, donc la suite est périodique (à deux termes) après deux termes irréguliers.

D'autre part, les formules de récurrence condensées :

$$p_{4k+4} = (\omega + 1)p_{4k+2} - p_{4k}, \qquad p_{4k+2} = (\bar{\omega} + 1)p_{4k} - p_{4k-2}$$

et les égalités $p_0 = p'_0$, $p_2 = p'_1$ donnent immédiatement

$$p_{8k} = p'_{4k}, \qquad p_{8k+2} = p'_{4k+1}, \qquad p_{8k+4} = -p'_{4k+2}, \qquad p_{8k+6} = -p'_{4k+3}$$

avec des égalités analogues pour les dénominateurs, d'où l'on tire

$$\lim |q'_n(q'_n x - p'_n)| = 1.$$

L'algorithme d'Hurwitz ne retient donc, parmi les réduites de x, que les moins bonnes.

Touche-t-on à l'explication du rôle effacé qu'il a joué dans les problèmes d'approximation de nombres complexes ?

VI. — Étude des petites valeurs du spectre de Markoff de $R(\sqrt{-3})$.

VI. 1. Perron a montré que $C_3 = \sqrt[4]{13}$. Notre but est de préciser la connaissance des petites valeurs du spectre de Markoff de $R(\sqrt{3})$. La démonstration cheminera, comme celle de V, par exclusion progressive des séquences impliquant, à certains rangs n, $|x_n - y_n|$ assez grand.

Pour commencer (VI. 2 à VI. 10) nous donnons quelques propriétés des nombres x tels que $C(x) < \sqrt{\frac{13}{3}} = 2{,}081\ldots$. Nous serons ensuite obligés de nous limiter aux nombres tels que $C(x)$ ne surpasse guère 2,07; ceci sera précisé en temps utile.

Indiquons ici une remarque sur le « retournement » des séquences. Soient $a_m\, a_{m+1} \ldots a_n$ et $b_m\, b_{m+1} \ldots b_n$ deux séquences de quotients incomplets telles que $a_{m+k} = -b_{n-k}$ (le changement de signe n'est pas essentiel). Désignons par des lettres non accentuées les nombres x et y associés à la première séquence, par des lettres accentuées ceux qui sont associés à la seconde. $\frac{1}{y'_{n-k+1}}$ et $\frac{1}{x'_{n-k+1}}$ satisfont aux mêmes récurrences vers les indices décroissants que x_{m+k} et y_{m+k} vers les indices croissants. De plus, dans le cas particulier du corps $R(\sqrt{-3})$, les régions permises pour (x_{m+k}, y_{m+k}) et $\left(\frac{1}{y'_{n-k+1}}, \frac{1}{x'_{n-k+1}}\right)$ sont les mêmes.

Comme $\frac{1}{x'_{j+1}} - \frac{1}{y'_{j+1}} = x'_j - y'_j$, les deux séquences sont simultanément exclues. Ce « principe de retournement », commun à R et à $R(\sqrt{-3})$, ne s'applique pas aux autres cas.

VI. 2. Si $|a_n| > 2$, et $0 \leq \arg x_n \leq \frac{\pi}{6}$ par exemple, on voit que $y_n \in e'(1) \cap e'(\omega)$ et $x_n \in e'(\omega+1) \cap e'(2)$, d'où $|x_n - y_n| > |\omega + 2| = \sqrt{7} > 2{,}6$. On a donc, à chaque rang, $|a_n| \leq 2$. Par suite, y_n et $x_n - a_n$ sont extérieurs à un certain voisinage de o que le lecteur précisera. Ceci sera utile plus loin.

Nous étudions d'abord (VI. 2, 3, 4,) l'intervention de quotients incomplets de module différent de 1.

Nous supposons $0 \leq \arg x_n \leq \frac{\pi}{6}$, donc $a_n = \omega + 1$ ou 2. On a dans tous les cas $y_n \in e'(1) \cap e'(\omega)$ et $x_n \in e'(1)$. Si, de plus, $x_n \in \overline{\omega}\, d\left(\frac{1}{2}\right)$, alors $y_n \in e'(\overline{\omega})$.

Si $x_n \in i(\omega+1) \cap i(2)$, $a_n = \omega + 1$ ou 2 selon que $\mathcal{R}(\omega y_n) <$ ou $> \frac{1}{2}$; si $\mathcal{R}(\omega y_n) = \frac{1}{2}$, $a_n = \omega + 1$ ou 2 selon que $\mathcal{R}(\omega x_n) <$ ou $> \frac{1}{2}$; enfin, si $\mathcal{R}(\omega y_n) = \mathcal{R}(\omega x_n) = \frac{1}{2}$, a_n est indéterminé, les fractions obtenues avec $a_n = 2$ ou $\omega + 1$ étant équivalentes.

Dans ce cas, et dans d'autres analogues, nous prendrons sans autre explication celle des valeurs de a_n qui nous sera la plus commode.

Éliminons quelques cas faciles :

Si $a_n = 2$ avec $x_n \in e'(\omega+1)$, $|a_{n+1}| \leq 2$ implique $x_n \in d\left(2 + \frac{2}{7}\right)$; de même $y_n \in g\left(-\frac{2}{7}\right)$; $|x_n - y_n| > 2{,}5$.

Si $a_n = \omega + 1$ avec $x_n \in e'(2)$, $|a_{n+1}| \leq 2$ implique $\mathcal{I}(\omega x_n) > \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$; $\mathcal{I}(\omega y_n) < 0$; donc $|x_n - y_n| > 2{,}09$.

Si $a_n = \omega + 1$ avec $x_n \in \overline{\omega}\, d\left(\frac{1}{2}\right)$, $x_n \in d\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $y_n \in g\left(-\frac{2}{7}\right)$; donc $|x_n - y_n| > 2{,}1$.

Si $a_n = 2$ avec $x_n \in i(\omega+1) \cap \overline{\omega}\, d'\left(\frac{1}{2}\right)$, il ne subsiste en fait que le cas $\mathcal{R}(\omega x_n) = \mathcal{R}(\omega y_n) = \frac{1}{2}$, où il nous plaît de prendre $a_n = \omega + 1$.

Il ne reste donc que deux cas, que nous allons étudier successivement :

A. $a_n = \omega + 1$, avec $x_n \in e'(1) \cap i(2) \cap \overline{\omega}\, g'\left(\frac{1}{2}\right)$.

B. $a_n = 2$, avec $x_n \in e'(1) \cap i(\omega+1) \cap \overline{\omega}\, g'\left(\frac{1}{2}\right)$.

VI. 3. Étudions $a_n = \omega + 1$ dans le cas A.

On a $x_{n+1} \in \omega\, \overline{d}'\left(-\frac{1}{2}\right) \cap \omega\, d\left(\frac{1}{2}\right) \cap e'(\omega)$, d'où, *a priori*, $a_{n+1} = 1$, $\overline{\omega} + 1$, 2, $\omega + 1$, 2ω. En fait, d'après VI. 2, il ne subsiste que $a_{n+1} = 1$ ou $\omega + 1$.

Si $a_{n+1}=1$, $x_n \in d(2) \cap \bar{\omega} g'\left(\frac{1}{2}\right)$, d'où $|x_n - y_n| > \left|2 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right| = \sqrt{\frac{13}{3}}$.

On a donc $a_{n+1}=\omega+1$, qui intervient d'après VI. 2 dans les deux cas : $x_{n+1} \in i(2\omega) \cap \bar{\omega}\, d'\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $x_{n+1} \in i(2) \cap \bar{\omega} g'\left(\frac{1}{2}\right)$. Dans le second cas, $|a_{n+2}| \leq 2$ implique $x_{n+1} \in i\frac{(4+\omega)}{2} \cup i\frac{(5+3\omega)}{3}$; $y_{n+1} \in e'(\omega) \cap i\frac{(-1-\bar{\omega})}{2}$; donc $|x_{n+1} - y_{n+1}| > \left|\frac{13+3\omega}{7}\right| = \frac{\sqrt{31}}{7} > 2.1$

Il ne reste donc que $a_{n+1}=\omega+1$, le champ de x_{n+1} se déduisant de celui de x_n par la transformation $z \to \omega z$; on a donc nécessairement la suite périodique (à six termes) :

$$\omega+1 \quad \omega+1 \quad \bar{\omega}-\omega \quad -\bar{\omega}-1 \quad -\omega-1 \quad \bar{\omega}-\omega \quad \omega+1 \quad \ldots$$

qui donne $C(x)=2$.

Si la périodicité est initiale, on a la suite de meilleure approximation de $x=1+\sqrt{\omega}$. On observera que chaque réduite de rang pair possède une réduite équivalente (mais non absolument) correspondant au choix d'un quotient incomplet équivalent à 2, au lieu d'un quotient incomplet équivalent à $\omega+1$. Les nombres considérés ont donc une infinité de développements (on notera la parenté avec II. 6), et nous en rencontrerons encore d'autres, ceux-là non conformes aux règles choisies.

VI.4. Étudions $a_n=2$ dans le cas B.

On a immédiatement $a_{n+1}=-\omega$ (et $a_{n-1}=-\omega$) et $x_{n+2} \in d'(0) \cap \bar{\omega} g\left(\frac{1}{2}\right)$.

Si $x_{n+2} \in i(1)$, $x_n \in d(2) \cap \bar{\omega} g\left(\frac{1}{2}\right)$, d'où $|x_n - y_n| > \sqrt{\frac{13}{3}}$.

Comme $y_{n+2} \in i\frac{(1-3\omega)}{2}$, si $\mathcal{J}(\omega x_{n+2}) \geq 3$, on a $|x_{n+2} - y_{n+2}| > \frac{3\sqrt{3}-1}{2} > 2{,}09$.

Enfin $\omega+1$ et $\omega-\bar{\omega}$ ne peuvent plus intervenir, et 2ω ne peut être précédé que de -1 ou ω. On a donc $a_{n+2}=\omega$ avec $x_{n+2} \in d'(0) \cap e'(1)$ (et, de même, $a_{n-2}=\omega$). On peut donc avoir, *a priori*, $a_{n+3}=\bar{\omega}+1$, $\bar{\omega}-\omega$, $-\omega-1$ (mais ils n'interviennent plus); 2, $2\bar{\omega}$, -2ω (mais ils ne peuvent être précédés de ω); -2, 1, $\bar{\omega}$ ou $-\omega$.

Montrons que ces trois derniers sont exclus. En effet $a_{n-2}=\omega$ implique $y_{n+2} \in i\frac{(11\bar{\omega}-5)}{9}$, et d'autre part $x_{n+2} \in d(1)$ ou $\omega\, d\left(\frac{3}{2}\right)$ ou $\bar{\omega} g(1)$, donc on a $|x_{n+2} - y_{n+2}| > \left|\frac{2i\sqrt{3}}{3} - y_{n+2}\right| > 2{,}1$.

Il ne reste donc que $a_{n+3}=-2$, le champ de x_{n+3} se déduisant de celui de x_n par la transformation $z \to -z$; on a donc nécessairement la suite périodique (à six termes) :

$$2 \quad -\omega \quad \omega \quad -2 \quad \omega \quad -\omega \quad 2 \quad \ldots$$

Les nombres correspondants sont les mêmes que dans VI. 3, mais le développement n'en est pas valable, certains x_n ayant pour module 1.

Nous pouvons donc énoncer le résultat partiel suivant :

Les nombres x tels que $C(x) < \sqrt{\frac{13}{3}}$ *comprennent les nombres de* VI. 3 *pour lesquels* $C(x) = 2$ *et des nombres dont tous les quotients incomplets, à partir d'un certain rang, ont pour module* 1.

VI. 5. Nous sommes donc ramenés à l'étude des séquences constituées uniquement par les six unités du corps $1, \omega, -\bar{\omega}, -1, -\omega$ et $\bar{\omega}$.

Introduisons de nouvelles notations. Parmi les séquences à deux termes, il y a six classes de séquences équivalentes, parmi lesquelles celle de $(-1, 1)$ est une classe de séquences interdites.

Désignons respectivement par A, B, C, $\bar{B}$, $\bar{C}$ les classes dont des représentants sont $1\ 1$, $1\ \omega$, $1\ -\omega$, $1\ \bar{\omega}$, $1\ -\bar{\omega}$. La notation des classes de séquences plus longues obéit à la convention suivante : on écrit, dans leur ordre naturel, les signes qui désignent les classes auxquelles appartiennent les séquences de deux quotients incomplets consécutifs qu'on peut extraire de la séquence donnée. Exemple : la classe dont un représentant est $1\ -\omega\ 1\ \bar{\omega}\ \omega$ sera notée $C\,C\,\bar{B}\,A$.

Il est clair que cette notation caractérise bien une classe de séquences équivalentes et que le choix arbitraire d'une des six unités pour l'un des quotients incomplets qui interviennent implicitement détermine complètement une séquence dans cette classe.

Examinons quelles séquences à deux chiffres contenant a_n peuvent intervenir suivant la position de x_n et y_n.

Distinguons dans le champ de x_n, soit $i(a_n) \cap e(0)$, huit régions définies comme suit :

$$(1. \quad |x - \omega a_n| < |x - a_n| \qquad (2. \quad |x - a_n| \leq |x - \omega a_n| < 1$$

$$(3. \quad |x - \omega a_n| \geq 1, \quad |x| \leq |x - \bar{\omega} a_n| \qquad (4. \quad |x - \omega a_n| \leq |x - \bar{\omega} a_n| < |x|$$

$(\bar{1}.$, $(\bar{2}.$, $(\bar{3}.$, $(\bar{4}.$ étant les régions respectivement symétriques par rapport à la droite $0\,a_n$.

De même, nous distinguons dans le champ de y_n, $i(0) \cap e(a_n)$, huit régions notées $.k)$ et $.\bar{k})$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ définies par la condition que les régions $(k.$ et $.k)$, et aussi les régions $(\bar{k}.$ et $.\bar{k})$, soient symétriques par rapport au point $\frac{a_n}{2}$.

Pour abréger, nous écrirons par exemple $(p.q.r.$ au lieu de $(p. \cup (q. \cup (r.$ et, le cas échéant : « a_n est en position $(u;v)$ » au lieu de « $x_n \in (u.$ et $y_n \in .v)$. »

L'impossibilité de (T) pour $|a|=|b|=1$ se traduit, avec ces notations, par l'interdiction des positions $(u;v)$ dans les cas suivants :

$$u(\text{resp. } v,\ \bar{u},\ \bar{v}) = 1 \text{ ou } 2, \qquad v(\text{resp. } u,\ \bar{v},\ \bar{u}) = 4,\ \bar{4},\ \bar{3},\ \bar{2} \text{ ou } 1.$$

Rappelons que, d'après IV. 4, les suites pour lesquelles, à chaque rang, a_n est dans l'une des positions non interdites sont des suites de meilleure approximation.

Le lecteur vérifiera aisément la correspondance suivante entre la position de a_n et la classe de la séquence $a_n a_{n+1}$.

Position de a_n.	Classe de $a_n a_{n+1}$.	Position de a_{n+1}.
(1.	C	(1.2.3.
(2.	B	(4.$\bar{4}$.$\bar{3}$.
(3;1)	B	(3.
	ou	
	A	(1.
(3;2.3.4.$\bar{4}$.$\bar{3}$)	$\bar{\text{B}}$	(2.3.
(4.	B	(1.
	ou	
	$\bar{\text{A}}$	(3.4.

On complètera par la symétrie $z \to \bar{z}$.

D'après le principe de retournement, il y a une correspondance analogue entre la position de a_n obtenue par échange du rôle de x et y, la classe de $a_{n-1}a_n$ et la position de a_{n-1}.

Ces correspondances « mécanisent » la recherche des séquences non interdites et seront systématiquement utilisées dans la suite.

VI. 6. Nous allons nous occuper d'abord des développements constitués (à partir d'un certain rang) par une seule des trois lettres A, B ou C (avec ou sans barre). Ensuite, nous envisagerons les mélanges possibles.

Les suites constituées uniquement par A (à partir d'un certain rang) donnent $C(x)=\sqrt{5}$ et sont donc sont intérêt.

Les suites constituées par C ou $\bar{\text{C}}$ (à partir d'un certain rang) comportent uniquement C, ou uniquement $\bar{\text{C}}$, car C ne peut être suivi de $\bar{\text{C}}$, d'après VI.5. Elles sont équivalentes ou symétriques à des suites où pour tout n assez grand, $a_n=\omega$. Pour ces suites $C(x)$ est égal au module de la différence des racines de l'équation $x^2-\omega x-1=0$, soit $\sqrt[4]{13}=1,8988\ldots$. Les nombres considérés sont les nombres « critiques », pour lesquels $C(x)=C_3$. Il résultera de la suite qu'ils sont les seuls nombres critiques.

VI. 7. Étudions les suites constituées par B et $\bar{\text{B}}$.

Remarquons d'abord que B $\bar{\text{B}}$ B est interdit par VI.5.

$B\,B\,B\,B\,B\,\overline{B}$ est représentée par $\omega\,1\,\omega\,1\,\omega\,1\,\overline{\omega}$; n étant le rang médian, on a $x_n \in i(\overline{\omega}+2)$ et $y_n \in i\frac{(-3\overline{\omega})}{4} \cap e'(\omega)$, d'où $|x_n - y_n| > 2,1$.

$\overline{B}\,B\,B\,B\,B\,\overline{B}$ est représentée par $\overline{\omega}\,1\,\omega\,1\,\omega\,1\,\overline{\omega}$; n étant le rang médian, on a $x_n \in i(\overline{\omega}+2)$ et $y_n \in i(-\overline{\omega}-1)$, d'où $|x_n - y_n| > 2,3$.

$B\,\overline{B}\,\overline{B}\,B\,B\,\overline{B}$ est représentée par $\omega\,1\,\omega\,1\,\omega\,1\,\omega$; n étant le rang médian, on a $x_n \in i(\overline{\omega}+2) \cap i\frac{(3)}{2}$ et $y_n \in i(-\omega-1) \cap i\frac{(-1)}{2}$, d'où $|x_n - y_n| > 2,1$.

Il résulte de ceci que, si une suite ne comprend pas uniquement (à partir d'un certain rang) des B ou des $\overline{B}$ [en ce cas, elle ne serait pas intéressante puisqu'elle donnerait $C(x) = \sqrt[4]{21} > 2,1$] elle est constituée de blocs de deux ou trois lettres identiques, deux blocs de deux ne pouvant se suivre.

Donc, ou bien il n'intervient, à partir d'un certain rang, que des blocs de trois $\left[\text{et l'on a une suite périodique donnant } C(x) = \sqrt{\frac{13}{3}}\right]$; ou bien intervient une infinité de fois une séquence égale (à la barre près) à $\overline{B}\,B\,B\,B\,B\,\overline{B}\,\overline{B}\,B\,B\,B\,B\,\overline{B}\,\overline{B}\,\overline{B}\,B$, représentée par $-\omega\,\omega\,1\,\omega\,1\,\omega\;1\,\omega\,1\,\omega\;-\omega\,\omega\;-\omega\;1$; n étant le rang de l'avant-dernier 1, on a $x_n \in i\frac{(9\overline{\omega}+9)}{11}$ et $y_n \in i\frac{(-220\overline{\omega}-169)}{439}$, d'où $|x_n - y_n| > 2,09$; ou bien enfin les blocs de deux et de trois alternent régulièrement. Si nous choisissons la suite $\ldots B\,\overline{B}\,\overline{B}\,B\,B\,B\,\overline{B}\,\overline{B}\,B\,B\,B\,\overline{B}\ldots$ représentée par $\ldots\,\omega\,1\,\overline{\omega}\,1\,\omega\,1\,\omega\;-\omega\,\omega\,1\,\omega\,1\,\overline{\omega}\ldots$, n étant le rang du second 1, $|x_n - y_n|$ tend vers le module de la différence des racines de l'équation $(3\omega+1)x^2 - 2x(3\omega-1) - (3+\omega) = 0$, soit $|x_n - y_n|^2 \to \frac{32\sqrt{3}}{13}$; on constate que $|x_p - y_p|^2$ a la même limite, sauf pour $p \equiv n+1 \pmod 5$, où $|x_p - y_p|^2 \to 2\sqrt{3}$. On a donc, pour les nombres considérés, $C(x) = \sqrt{\frac{32\sqrt{3}}{13}} = 2,0648\ldots$.

Ce sont les seuls nombres tels que $C(x) < \sqrt{\frac{13}{3}}$ *dont le développement ne contient que* B *et* $\overline{B}$ *à partir d'un certain rang.*

VI. 8. Montrons que A A est exclu.

Supposons $a_{n-1} = 1$, $a_n = 1$, $a_{n+1} = 1$. On a d'après VI. 5 : $a_{n-1} = 1(4.\overline{4}; 3.4.\overline{3}.\overline{4})$, $a_n = 1(4.\overline{4}; 4.\overline{4})$, $a_{n+1} = 1(3.4.\overline{3}.\overline{4}; 4.\overline{4})$; d'où $a_{n+2} = 1(3.4.\overline{3}.\overline{4}; 4.\overline{4})$ ou $\overline{\omega}(1.2.3; 2)$ ou $\omega(\overline{1}.\overline{2}.\overline{3}; \overline{2})$ et $a_{n-2} = 1(4.\overline{4}; 3.4.\overline{3}.\overline{4})$ ou $\overline{\omega}(2; 1.2.3)$ ou $\omega(\overline{2}; \overline{1}.\overline{2}.\overline{3})$.

Supposons d'abord $x_{n+2} \in i(1)$, donc $x_{n+1} \in d\left(\frac{3}{2}\right)$.

Si $a_{n-2} = 1$, $y_{n+1} \in i\left(\frac{-4}{5}\right)$, donc $|x_{n+1} - y_{n+1}| > 2,1$.

Si $a_{n-2}=\omega, y_{n+1}\in i\frac{(-\bar\omega-2)}{3}\cap e\frac{(-\bar\omega)}{2}$, donc $|x_{n+1}-y_{n+1}|>2,087$.
Si $a_{n-2}=\bar\omega$, on a la même inégalité.

Supposons maintenant $a_{n+2}=\omega(\bar 3;2)$, seul cas restant, à la symétrie près. Il suit, d'après VI. 5, $a_{n+3}=1(\bar 2.\bar 3;\bar 3)$ puis $a_{n+4}=\omega$, ce qui impose $x_n\in i\frac{(7)}{4}\cap i\frac{(3\omega+13)}{19}$, y_n étant dans la région symétrique, soit par rapport à la droite $\mathcal{R}=\frac{1}{2}$, soit par rapport au point $\frac{1}{2}$. De toute façon, $|x_n-y_n|>2,1$.

Les développements des nombres x tels que $C(x)<\sqrt{\frac{13}{2}}$ ne contiennent plus A A, *à partir d'un certain rang.*

VI. 9. D'après VI. 5, les séquences B et C ne peuvent être voisines. Étudions la séquence $\bar C$ B, représentée par $a_{n-1}=\omega$, $a_n=\omega$, $a_{n+1}=1$. On trouve immédiatement $a_{n-1}(\bar 1;\bar 1.\bar 2.\bar 3)$, d'où $a_{n-2}=\bar\omega$, 1 ou ω; et $a_{n+1}(3.4.\bar 4.\bar 3;\bar 4)$, d'où $a_{n+2}=1(3.4.\bar 4.\bar 3;4)$, ou $\omega(\bar 1.\bar 2.\bar 3;\bar 2)$ ou $\bar\omega(1.2.3;2)$.

x_{n+1} appartient donc à la réunion des régions $i(1)\cap e'(\omega)\cap\omega\, d(1)$, $i(1)\cap e'(\bar\omega)\cap\bar\omega\,\bar d(1)$ et $\omega g'(1)\cap\omega g'(1)\cap d\left(\frac{3}{2}\right)$.
Si $a_{n-2}=\bar\omega$, $y_{n+1}\in i\frac{(-2\bar\omega-1)}{2}$, d'où $|x_{n+1}-y_{n+1}|>2;1$.
Si $a_{n-2}=1$, c'est avec $.3.4.4.3)$, donc $y_{n+1}\in\omega g(0)\cap e'\frac{(-\omega)}{2}\cap i\frac{(-1-2\omega)}{3}$ et $|x_{n+1}-y_{n+1}|>\sqrt{\frac{20+6\sqrt{3}}{7}}>\sqrt{\frac{13}{3}}$. Il reste donc seulement le cas $a_{n-2}=\omega(\bar 1;\bar 1.\bar 2.\bar 3)$, c'est-à-dire la séquence $\bar C\,\bar C$ B.
$a_{n-3}=\omega, \bar\omega$ ou 1, donc $y_{n+1}\in\omega g(0)\cap\bar\omega g\left(-\frac{1}{2}\right)\cap\left[i\frac{(-\omega-3)}{4}\cap i(-\omega-1)\right]$, en particulier on a $y_{n+1}\in g\left(-\frac{5}{8}\right)$.
Si $x_{n+2}\in i(1)$, $x_{n+1}\in d\left(\frac{3}{2}\right)$ et $|x_{n+1}-y_{n+1}|>2,1$. Il reste donc $a_{n+2}=\omega(3;2)$ ou $\omega(3;2)$.
Si $a_{n+2}=\omega$, on trouve $a_{n+3}=1$ et $a_{n+4}=1$ ou ω, ce qui implique $x_{n+1}\in e'(\bar\omega)\cap\left[i\frac{(4+3\omega)}{4}\cup i\frac{(5+3\bar\omega)}{4}\right]$, d'où $|x_{n+1}-y_{n+1}|>\sqrt{\frac{919}{204}}>2,1$.
Si $a_{n+2}=\bar\omega$, on trouve de même $a_{n+3}=1$ et $a_{n+4}=\bar\omega$ $\left[a_{n+4}=1\right.$ impliquant $\left.x_{n+1}\in d\left(\frac{3}{2}\right)\right]$ ce qui donne une séquence C C B B B B. Ainsi :

La séquence C B *n'intervient, à partir d'un certain rang du développement des nombres tels que* $C(x)<\sqrt{\frac{13}{3}}$, *que par le groupement* C C B $\bar{\text{B}}$ B B.

VI. 10. Étudions le voisinage d'une séquence A et d'une séquence B ou $\overline{\mathrm{B}}$. Supposons que $a_{n-1}a_n a_{n+1}$ soit de la classe AB.

Il résulte de VI. 5 que $x_{n-1} \in (4.$, donc que $a_{n-2}a_{n-1}$ est de classe A, B ou $\overline{\mathrm{B}}$. Le premier cas est exclu par VI. 8.

Examinons successivement les deux autres.

Étude de BAB. — On a alors $a_{n+1}(\overline{1}.\overline{2}.\overline{3};\overline{2})$, donc $a_{n+1}a_{n+2}$ est de classe B ou $\overline{\mathrm{C}}$; ce dernier cas est exclu par VI. 9.

Il reste donc (par le principe du retournement) la séquence $\overline{\mathrm{B}}\,\overline{\mathrm{B}}$ABB avec $a_{n+2}(\overline{2}.\overline{3}.\overline{4}.4.3;\overline{3})$, d'où $a_{n+2}a_{n+3}$ de classe A, B ou $\overline{\mathrm{B}}$.

BBABBB est représentée par $1\,\overline{\omega}\,1\,1\,\omega\,1\,\overline{\omega}$ avec $a_{n+3} = \omega(1.2.3.$, d'où $x_n \in i(\overline{\omega}+2)$ et $y_n \in i\frac{(-3)}{4}$, donc $|x_n - y_n| > 2,1$.

BBABBA est représentée par $1\,\omega\,1\,1\,\omega\,1\,1$ avec $a_{n+3} = 1(3.4.4.3;4)$, $x_n \in i\frac{(3\overline{\omega}+5)}{4} \cap e'\frac{(3\overline{\omega}+4)}{4}$ et $y_{n-3} \in e'(\omega)$, d'où $y_n \in i\frac{(-3)}{4} \cap e'(-\omega)$, donc $|x_n - y_n| > 2,1$.

Il reste donc (par le principe de retournement) la séquence $\overline{\mathrm{B}}\,\overline{\mathrm{B}}\,\overline{\mathrm{B}}$ABBB, représentée par $\overline{\omega}\,1\,\omega\,1\,1\,\omega\,1\,\omega$.

On a $y_{n-1} \in i\frac{(-3\omega)}{4} \cap e'(\overline{\omega})$, donc $y_n \in i\frac{(-3)}{4} \subset i\frac{(-3\overline{\omega}-4)}{9}$, et $x_n \in i\frac{(3)}{2} \subset i\frac{(3\omega+4)}{4}$.

Si $x_n \in e'\frac{(\overline{\omega}+3)}{3}$, on a $|x_n - y_n| > 2,1$.

Dans le cas contraire, $x_{n-1} \in i\frac{(\omega+7)}{4}$ et $|x_{n-1} - y_{n-1}| > 2,09$.

La séquence $\overline{\mathrm{B}}$AB *n'intervient qu'un nombre fini de fois dans le développement des nombres tels que* $\mathrm{C}(x) < \sqrt{\frac{13}{3}}$.

Étude de BAB. — On voit comme précédemment qu'il ne reste que BBBABBB, représentée par $\omega\,1\,\omega\,1\,1\,\omega\,1\,\omega$ avec $x_{n+3} \in (\overline{1}.\overline{2}.3.\overline{4}.4.3.$

Si $x_{n+3} \in (\overline{1}.\overline{2}.\overline{3}.$, on a $x_{n+2} \in i(1) \cap e'(\overline{\omega}) \cap \overline{\omega}\,d(1)$, tandis que $y_{n+2} \in i\frac{(-16-21\overline{\omega})}{43}$, d'où $|x_{n+2} - y_{n+2}| > 2,1$.

Si $x_{n+3} \in (4.4.3.$, $a_{n+3}a_{n+4}$ est de classe A, B ou $\overline{\mathrm{B}}$, ce dernier cas seulement si $x_{n+3} \in (\overline{4}.$, et impliquant $x_{n+4} \in (\overline{1}.$ donc $a_{n+4}a_{n+5}$ de classe $\overline{\mathrm{C}}$, ce qui est impossible d'après VI. 9.

Si $\overline{\mathrm{B}}$ est la classe de $a_{n+3}a_{n+4}$, c'est-à-dire $a_{n+4} = -\omega$, on a $x_{n+1} \in i(2\omega+1)$ tandis que $y_{n+1} \in i\frac{(-13-3\overline{\omega})}{24} \cap i\frac{(-\overline{\omega})}{2}$, d'où $|x_{n+1} - y_{n+1}| > \frac{\sqrt{54796}}{76} - 1 > 2,08$.

Donc, si $C(x) < 2,08$, B A B n'intervient à partir d'un certain rang que par B B B A B B B B A, ce qui entraîne une suite périodique de période A B B B, et impose à $C(x)$ d'être égal au module de la différence des racines de l'équation $(2+\omega)x^2-(2+\bar{\omega})x-(2+\omega)=0$, soit $\sqrt{\frac{5}{7}}\sqrt{37} > \sqrt{\frac{13}{3}} > 2,08$.

A partir d'un certain rang du développement des nombres tels que $C(x) < 2,08$, A *ne peut voisiner avec* B *ou* $\bar{B}$.

VI. 11. De ceci, de VI. 9 et du début de VI. 7 résulte que C B n'intervient que dans C C B $\bar{B}$ B B B, représentée par $\omega\,\omega\,\omega\,1\,\bar{\omega}\,1\,\bar{\omega}-\bar{\omega}$ [pour $C(x) < 2,08$; « à partir d'un certain rang » sera désormais sous-entendu].

Désignons par n le rang du premier 1, abrégeons B $\bar{B}$ B B B en T, et examinons quelles séquences peuvent précéder celle-ci. Notons que $x_n \in i\frac{(27+12\omega)}{23}$. $\bar{C}\,\bar{C}\,C\,\bar{C}\,\bar{C}\,\bar{C}\,T$, représentée par $\omega\,\omega\,\omega\,\omega\,\omega\,\omega\,\omega\,1\,\bar{\omega}\,1\,\omega-\bar{\omega}$, implique $y_n \in i\frac{(-5-3\bar{\omega})}{8}$, d'où $|x_n-y_n| > 2,08$. $T\,\bar{C}\,\bar{C}\,\bar{C}\,\bar{C}\,\bar{C}\,T$, représentée par $-\bar{\omega}\,\bar{\omega}\,1\,\bar{\omega}\,1\,\omega\,\omega\,\omega\,\omega\,\omega\,\omega\,1\ldots$, implique $y_n \in i\frac{(-659-480\bar{\omega})}{1308}$, d'où $|x_n-y_n| > 2,08$. $T\,\bar{C}\,\bar{C}\,\bar{C}\,\bar{C}\,\bar{C}\,T$, représentée par $-\bar{\omega}\,\bar{\omega}\,1\,\bar{\omega}\,1\,\omega\,\omega\,\omega\,\omega\,\omega\,1\ldots$, implique $y_n \in i\frac{(-389-270\bar{\omega})}{750}$, d'où $|x_n-y_n| > 2,08$. $T\,\bar{C}\,\bar{C}\,\bar{C}\,\bar{C}\,T$, représentée par $-\bar{\omega}\,\bar{\omega}\,1\,\bar{\omega}\,1\,\omega\,\omega\,\omega\,\omega\,1\ldots$, implique $y_n \in i\frac{(-220-169\bar{\omega})}{439}$, d'où $|x_n-y_n| > 2,08$. $T\,C\,\bar{C}\,T$, représentée par $-\bar{\omega}\,\bar{\omega}\,1\,\omega\,1\,\omega\,\omega\,\omega\,1\ldots$, implique $y_n \in i\frac{(-129-91\bar{\omega})}{260}$, $y_{n+2} \in i\frac{(-480-659\omega)}{1308}$ et n'intervient, d'après VI. 7, que dans les trois cas suivants :

$T\,\bar{C}\,\bar{C}\,B\,\bar{B}\,\bar{B}\,\bar{B}\,B\,B\,B\,\bar{B}\,\bar{B}\,\bar{B}\,B$ représentée par $\ldots\,1\,\bar{\omega}\,1\,\bar{\omega}\,-\bar{\omega}\,\bar{\omega}\,1\,\bar{\omega}\,1\,\omega$

$T\,\bar{C}\,\bar{C}\,B\,B\,\bar{B}\,B\,B\,B\,B\,B$ » $\ldots\,1\,\bar{\omega}\,1\,\bar{\omega}\,-\bar{\omega}\,\bar{\omega}\,-\bar{\omega}\,-1$

$T\,\bar{C}\,\bar{C}\,B\,\bar{B}\,B\,\bar{B}\,B\,\bar{C}\,C$ » $\ldots\,1\,\omega\,1\,\bar{\omega}\,-\omega\,1\,-\omega$

(le premier 1 écrit représentant toujours a_n) qui impliquent respectivement $x_n \in i\frac{(1477+608\omega)}{1257}$, d'où $|x_n-y_n| > 2,08$; $x_{n+2} \in i\frac{(9+9\omega)}{11}$, d'où $|x_{n+2}-y_{n+2}| > 2,08$; $x_n \in i\frac{(8+3\omega)}{6}$, d'où $|x_n-y_n| > 2,08$.

Ainsi : *avec* $C(x) < 2,08$, C B *n'intervient que dans* A $\bar{C}\ldots\bar{C}$ T, *le nombre des* $\bar{C}$ *étant* 2, 3, 4 *ou* 5.

VI. 12. D'après VI. 5, 10 et 11, $A\bar{C}$ n'intervient que dans $CA\bar{C}$, précédée de A ou C et suivie de A ou $\bar{C}$.

$ACA\bar{C}\bar{C}T$, représentée par $\omega\,\bar{\omega}\,\bar{\omega}\,\omega\,\omega\,\omega\,1\,\bar{\omega}\,1\,\bar{\omega}-\omega$, où n est le rang du premier 1, donne $y_{n-3}\in i\frac{(-2\omega-1)}{2}\cap\omega g(0)$ et $x_{n-3}\in i\frac{(129+91\omega)}{141}$, d'où $|x_{n-3}-y_{n-3}|>2,2$.

$ACA\bar{C}CC$, représentée par $\omega\,\bar{\omega}\,\bar{\omega}\,\omega\,\omega\,\omega\,\omega$, où n est le dernier rang, donne, suivant qu'il suit B, A ou $\bar{C}$, $x_{n-3}\in i\frac{(\omega+1)}{2}\cap\bar{\omega}\,d(0)\cap i\frac{(3+4\omega)}{4}$, ou $i\frac{(\omega+1)}{2}\cap\bar{\omega}\,d(0)\cap i\frac{(4+3\omega)}{4}$, ou $i\frac{(\omega+1)}{2}\cap i(2)\cap\omega\,d(1)$, et dans tous les cas $|x_{n-3}-y_{n-3}|>2,1$. On a donc exclu $ACAC\bar{C}$, ce qui montre que $A\bar{C}$ n'intervient que dans $CCA\bar{C}\bar{C}$, sauf peut-être dans la suite périodique de période $ACA\bar{C}$. Mais celle-ci, représentée par $\omega\,\omega\,\bar{\omega}\,\bar{\omega}$, donne un autre développement (illégitime, certains x_n ayant pour module 1) des nombres de VI. 3.

$CCA\bar{C}\bar{C}$ peut être précédée de A, $\bar{B}$, C et suivie de A, B, $\bar{C}$. Mais :

$\bar{C}\bar{C}ACCA\bar{C}\bar{C}$, représentée par $\omega\,\omega\,\omega\,\bar{\omega}\,\bar{\omega}\,\bar{\omega}\,\omega\,\omega\,\omega$, n étant le dernier rang, donne $y_{n-3}\in i\frac{(-3-\omega)}{3}$, x_{n-3} étant inclus aux mêmes régions que huit lignes plus haut, translatées de $-i\sqrt{3}$, d'où $|x_{n-3}-y_{n-3}|>2,09$.

$\bar{T}CCA\bar{C}\bar{C}T$, représentée par $-\bar{\omega}\,\bar{\omega}\,1\,\bar{\omega}\,1\,\omega\,\omega\,\omega\,\bar{\omega}\,\bar{\omega}\,\bar{\omega}\,1\,\omega\,1\,\omega-\omega$, $n+7$ étant le dernier rang, donne $x_n\in i\frac{(129+91\bar{\omega})}{141}$, $y_n\in i\frac{(-129-91\bar{\omega})}{260}$, d'où d'où $|x_n-y_n|>2,08$.

$CCCA\bar{C}\bar{C}T$, représentée par $\omega\,\omega\,\omega\,\omega\,\bar{\omega}\,\bar{\omega}\,\bar{\omega}\,1\,\omega\,1\,\omega-\omega$, $n+7$ étant le dernier rang, donne $x_n\in i\frac{(129+91\bar{\omega})}{141}$, $y_n\in i(-\bar{\omega}-1)\cap\omega g(0)$, d'où $|x_n-y_n|>2,08$.

Avec $C(x)<2,08$, $A\bar{C}$ *n'intervient que dans* $CCCA\bar{C}\bar{C}\bar{C}$. Par suite, $\bar{C}\bar{B}$ *n'intervient que dans* $A\bar{C}\ldots\bar{C}T$, *avec* 3, 4, *ou* 5 *fois* $\bar{C}$.

Nous allons examiner successivement les suites où B (et $\bar{B}$) n'intervient plus à partir d'un certain rang, puis celles où il intervient une infinité de fois. *Nous nous restreindrons désormais aux nombres tels que* $C(x)<2,0703$.

VI. 13. Les séquences constituées de A, C et $\bar{C}$ peuvent être représentées par des séquences où ne figurent que ω et $\bar{\omega}$. Nous utiliserons ici une notation spéciale pour ces séquences, en indiquant le nombre de quotients incomplets identiques consécutifs, le point indiquant un changement de chiffre. Par exemple, 1.3.2.2 (qu'on peut aussi noter .3.2.2) représentera indifféremment les séquences $\omega\,\bar{\omega}\,\bar{\omega}\,\bar{\omega}\,\omega\,\omega\,\bar{\omega}\,\bar{\omega}$ ou $\bar{\omega}\,\omega\,\omega\,\omega\,\bar{\omega}\,\bar{\omega}\,\omega\,\omega$.

Les raisonnements déjà faits ont exclu .1. , .2. , et .3. . Montrons d'abord l'exclusion de .5. et de .6..

$\bar{\omega}\,\bar{\omega}\;\omega\;\omega\,\omega\;\omega\;\omega\,\bar{\omega}\,\bar{\omega}$, $n+3$ étant le dernier rang, donne $x_n \in i\frac{(2\omega+4)}{3}$ et $y_n \in i\frac{(-\bar{\omega}-3)}{3}$, d'où $|x_n - y_n| > 2,1$.

$\bar{\omega}\,\bar{\omega}\,\bar{\omega}\,\bar{\omega}\,\omega\,\omega\,\omega\,\omega\,\omega\,\omega\,\bar{\omega}\,\bar{\omega}\,\bar{\omega}\,\bar{\omega}$, $n+4$ étant le dernier rang, donne $x_n \in i(2\omega+1)$ et $y_n \in i\frac{(-97-64\bar{\omega})}{176}$, d'où $|x_n - y_n| > 2,072$.

Soit maintenant $a_n = \omega$ le dernier quotient incomplet de la dernière séquence .4. dans 7.4.7 ou 4.4.4.7 . On a $x_n \in i\frac{(26+70\omega)}{51}$ et $y_n \in i\frac{(-171-77\bar{\omega})}{318}$ ou $i\frac{(-161\bar{\omega}-369)}{690}$, d'où $|x_n - y_n| > 2,072$ dans les deux cas. Il en résulte que .4. ne peut intervenir que dans la suite périodique .4.4.4 . . . , donnant $C(x)$ égal au module de la différence des racines de $(1+\omega)x^2 - x - (1+\omega) = 0$, soit $\sqrt{\frac{13}{3}}$.

Ainsi toutes les tranches comportent au moins sept quotients incomplets. Montrons l'exclusion de .8. et de .11. .

Soit $a_{n+2} = \omega$ le dernier quotient incomplet de .8. dans 4.8.4; on a $x_n \in i\frac{(15\omega+34)}{30}$ et $y_n \in i\frac{(-64\bar{\omega}-97)}{176}$, d'où $|x_n - y_n| > 2,076$.

Soit $a_{n+2} = \omega$ le dernier quotient incomplet de .11. dans 4.11.7; on a $x_n \in i\frac{(171+77\omega)}{152}$ et $y_n \in i\frac{(-337\bar{\omega}-482)}{931}$, d'où $|x_n - y_n| > 2,073$.

Montrons l'exclusion de $.k.$ pour $k \geq 14$.

Soit $a_{n+2} = \omega$ le dernier quotient incomplet de 14. dans 14.9; on a $x_n \in i\frac{(506+229\omega)}{450}$ et $y_n \in i\frac{(-229-165\bar{\omega})}{450}$, d'où $|x_n - y_n| > 2,0703$.

Soit maintenant $a_n = \omega$ le dernier quotient incomplet de 11. dans 11.7.7; on a $x_n \in i\frac{(1378+3807\omega)}{2754}$ et $y_n \in i\frac{(-133-96\bar{\omega})}{261}$, d'où $|x_n - y_n| > 2,075$.

Soit $a_{n+2} = \omega$ le dernier quotient incomplet de .13. dans 7.13.9; on a $x_n \in i\frac{(506+229\omega)}{450}$ et $q_n \in i\frac{(-7129-5185\omega)}{14015}$, d'où $|x_n - y_n| > 2,073$. D'après les deux dernières exclusions, il ne nous reste que .7. , .9. , .10. et .12. .

Soit $a_n = \omega$ le dernier quotient incomplet de $.k.$ dans $7.k.7.7$ avec $k = 9$ ou 10 ($k = 12$ est déjà exclu); on a $x_n \in i\frac{(1378+3807\omega)}{2754}$ et, suivant le cas $y_n \in i\frac{(-2431-1701\bar{\omega})}{4698}$ ou $i\frac{(-4132-2997\bar{\omega})}{8182}$, d'où $|x_n - y_n| > 2,074$ dans les deux cas.

Or .7. ne peut intervenir que par ces séquences, ou par la suite périodique

$\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot \ldots$, fournissant l'équation $(17+13\bar{\omega})x^2-14x-(17+13\omega)=0$ et $C(x)=2\sqrt{\frac{728}{679}}>2,0709$.

Soit $a_n=\omega$ le dernier quotient incomplet de $.9.$ dans $7.9.9$; on a $x_n\in i\frac{(77+208\omega)}{152}$ et $y_n\in i\frac{(-337\bar{\omega}-482)}{931}$, d'où $|x_n-y_n|>2,072$.

Soit $a_n=\omega$ le dernier quotient incomplet de $.12.$ dans $7.12.10$; on a $x_n\in i\frac{(133+357\omega)}{261}$ et $y_n\in i\frac{(-8830\bar{\omega}-12314)}{24141}$, d'où $|x_n-y_n|>2,072$.

Il ne reste donc, finalement, que la suite périodique $.10.10.10\ldots$ fournissant l'équation $(11+8\omega)x^2-9x-(11+8\omega)=0$ et $C(x)=\sqrt{\frac{391}{91}}>2,072$.

Pour les nombres tels que $C(x)<2,0703$, B *intervient une infinité de fois, sauf dans les suites périodiques déjà signalées.*

VI. 14. Étudions de plus près les séquences A $\bar{C}\ldots\bar{C}$T, avec 3, 4 ou 5 fois $\bar{C}$.

CCCA$\bar{C}\bar{C}\bar{C}\bar{C}$T, représentée par $\bar{\omega}\,\bar{\omega}\,\bar{\omega}\,\bar{\omega}\,\omega\,\omega\,\omega\,\omega\,\omega\,1\,\bar{\omega}\,1\,\bar{\omega}-\bar{\omega}$, le dernier rang étant $n+7$, donne $x_n\in i\frac{(129+91\omega)}{141}$, $y_n\in i\frac{(-19-15\bar{\omega})}{30}$, $|x_n-y_n|>2,08$.

$\bar{C}\bar{C}\bar{C}$BBBBBBBB$\bar{B}$, représentée par $\omega\,\omega\,\omega\,\omega\,1\,\bar{\omega}\,1\,\bar{\omega}-\bar{\omega}\,\bar{\omega}-\bar{\omega}-1$, le dernier rang étant $n+5$, donne $x_n\in i\frac{(9+9\omega)}{11}$, $y_n\in i\frac{(-19-26\omega)}{51}$, $|x_n-y_n|>2,071$.

CCCA$\bar{C}\bar{C}\bar{C}\bar{C}\bar{C}$TT, représentée (le dernier rang étant $n+9$) par $\bar{\omega}\,\bar{\omega}\,\bar{\omega}\,\bar{\omega}\,\omega\,\omega\,\omega\,\omega\,\omega\,\omega\,1\,\bar{\omega}\,1\,\bar{\omega}-\bar{\omega}\,\bar{\omega}\,1\,\bar{\omega}\,1\,\omega$ donne $x_n\in i\frac{(1477+608\omega)}{1257}$ et $y_n\in i\frac{(-161-112\bar{\omega})}{321}$, d'où $|x_n-y_n|>2,08$.

CCCA$\bar{C}$CC$\bar{C}$CTC$\bar{C}\bar{C}$C, représentée (le dernier rang étant $n+7$) par $\bar{\omega}\,\bar{\omega}\,\bar{\omega}\,\bar{\omega}\,\omega\,\omega\,\omega\,\omega\,\omega\,\omega\,1\,\bar{\omega}\,1\,\bar{\omega}-\bar{\omega}\,1-\bar{\omega}\,1$, donne $x_n\in i\frac{(171+70\omega)}{145}$, et $y_n\in i\frac{(-161-112\bar{\omega})}{321}$, d'où $|x_n-y_n|>2,08$.

Il ne reste donc que les deux cas CCC$\bar{A}\bar{C}\bar{C}\bar{C}$TT *et* CCCA$\bar{C}CCT\bar{C}\bar{C}\bar{C}$ACCC. Étudions quelles séquences peuvent précéder CCCA$\bar{C}\bar{C}\bar{C}$T. Soit $a_n=\bar{\omega}$ le quotient incomplet intermédiaire entre le dernier C et A; on a $x_n\in i\frac{(220+608\bar{\omega})}{439}$. Si l'on n'a pas TCCCA$\bar{C}$CCT, on a CC$\bar{C}AC\ldots$CA$\bar{C}\bar{C}\bar{C}$T, avec k fois C. D'après les raisonnements de VI. 13, $k=3$, 6 ou 8.

CCCCCCCCCACCCT donne $y_n\in i\frac{(-77-56\omega)}{152}$, $|x_n-y_n|>2,0709$.

$\bar{C}\bar{C}\bar{C}$ACCCCCCCCCA$\bar{C}\bar{C}$CT donne $y_n\in i\frac{(-482-377\omega)}{931}$, $|x_n-y_n|>2,08$.

$\bar{C}\bar{C}\bar{C}ACCCA\bar{C}\bar{C}\bar{C}T$ donne $y_n \in i\frac{(-34-15\omega)}{63}$, $|x_n - y_n| > 2,08$.

Il reste donc seulement $k=6$. Mais $\bar{C}\bar{C}CCC\bar{C}\bar{C}ACCCCCCA\bar{C}\bar{C}\bar{C}T$ donne $y_n \in i\frac{(-812-566\omega)}{1619}$, $|x_n - y_n| > 2,0706$.

D'après les raisonnements de VI. 13, il reste seulement $TCCCACCCCCCACC\bar{C}T$.

Pour $C(x) < 2,0703$, A *et* C *n'interviennent que dans* $U = CCCACCC$ *et* $V = \bar{C}\bar{C}\bar{C}ACCCCCCCA\bar{C}\bar{C}\bar{C}$, *sauf dans les suites périodiques déjà signalées.*

Soit $a_{n+1} = \omega$ le terme de raccord entre T et V. On a $x_n \in i\frac{(378158+112540\omega)}{262823}$.

UTVT implique $y_n \in i\frac{(-273-755\omega)}{1558}$, $|x_n - y_n| > 2,0703$.

UTTVT implique $y_n \in i\frac{(-14616-40555\omega)}{83712}$, $|x_n - y_n| > 2,0703$.

TTTVT implique $y_n \in i\frac{(-11784-32700\omega)}{67945}$, $|x_n - y_n| > 2,0703$.

Ceci exclut V. De plus, soit $a_{n+1} = \omega$ le terme de raccord entre le T médian et le second U dans TUTUT (en tolérant la confusion de T, U et de leurs imaginaires conjuguées, qui est désormais sans inconvénient). On a $a_n = 1$, $x_n \in i\frac{(7006+2085\bar{\omega})}{4870}$, $y_n \in i\frac{(-11886-32853\omega)}{67801}$, $|x_n - y_n| > 2,0706$.

Ainsi :

Pour $C(x) < 2,0703$, *le développement de* x *est obtenu à partir d'un certain rang, ou bien par l'une des suites périodiques donnant respectivement* $C(x) = \sqrt[4]{13}$, 2 *et* $\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{13}}$, *ou bien par des combinaisons des séquences* U *et* T, *où les* U *n'apparaissent qu'entre deux* T *et les* T *par groupes d'au moins deux.*

VI. 15. Soit $a_n = \omega$ le terme de raccord entre C et A de U dans TTUTT. On a $x_n \in i\frac{(11784+32700\bar{\omega})}{23609}$, $y_n \in i\frac{(-6955-4829\omega)}{13920}$, $|x_n - y_n| > 2,070068$.

Il n'y a donc pas d'autres constantes d'approximation que celles déjà trouvées, inférieures à cette dernière valeur. En particulier :

Le spectre de Markoff de $R(\sqrt{-3})$ *possède trois premières valeurs isolées, qui sont* $\sqrt[4]{13} = 1,898815\ldots$, 2 *et* $\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{13}} = 2,064875\ldots$. *Les autres valeurs sont supérieures à* $2,070068$.

VI. 16. Considérons la suite périodique $s_k = [\mathrm{UTT}\ldots\mathrm{T}]$ (avec k fois T, $k \geq 2$), développement d'un nombre ξ_k, et, dans cette suite, les premiers termes des séquences A. Les nombres x associés à ces termes sont tous égaux à un nombre $x^{(k)}$, dont le conjugué sur $\mathrm{R}(\sqrt{-3})$, $y^{(k)}$, est la limite des nombres y correspondants. Lorsque k augmente indéfiniment, $x^{(k)}$ et $y^{(k)}$ ont pour limites les nombres x et y associés au rang correspondant dans le développement fictif $\ldots\mathrm{TTUTT}\ldots$ infini dans les deux sens [ceci résulte du lemme suivant : *soient, pour* $j = 1, 2, \ldots$, *donnés dans* E, *des* $e_j \neq 0$; $z = t_j(z')$ *la transformation* $z = e_j + \frac{1}{z'}$; r_j *des régions du plan complexe extérieures au cercle unité, telles que* $r_j = t_j(r_{j-1})$. *Alors le diamètre de* r_j *tend vers zéro lorsque* $j \to \infty$, *ce qui se déduit sans difficulté de la décroissance évidente de ce diamètre*]. Il en va de même pour les rangs obtenus en décalant les précédents d'une quantité fixe d.

Nous allons :

A. montrer que, à moins que $-5 < d < 6$, les nombres limites x et y sont suffisamment voisins de ceux de la suite périodique [T] pour que $|x - y| < 2{,}07$;

B. calculer les limites x et y pour $-4 \leq d \leq 5$ et voir que la plus grande des distances $|x - y|$ correspondantes surpasse 2,07. Il en résultera que cette valeur est point limite des $\mathrm{C}(\xi_k)$, et par suite point d'accumulation du spectre de Markoff de $\mathrm{R}(\sqrt{-3})$.

A. Représentons les séquences $\overline{\mathrm{B}}\mathrm{BUT}$ et $\overline{\mathrm{B}}\mathrm{BTT}$ respectivement par $\overline{\omega}\,1\,\omega\,\omega\,\omega\,\omega\,\overline{\omega}\,\overline{\omega}\,\overline{\omega}\,\overline{\omega}\,1\,\omega\,1\,\omega - \omega$ et $\overline{\omega}\,1\,\overline{\omega}\,1\,\omega\,1\,\overline{\omega} - \overline{\omega}\,\overline{\omega}\,1\,\overline{\omega}\,1\,\omega$. Au premier rang, les nombres x correspondants sont inclus respectivement à $i\dfrac{(9091 + 11886\overline{\omega})}{13971}$ et $i\dfrac{(9091 + 11784\overline{\omega})}{13920}$ et diffèrent donc (en module) de moins de 0,004.

Comme la seconde séquence est extraite de la suite T pour laquelle $\mathrm{C}(x) = 2{,}0648\ldots$, A est prouvé pour ce rang, correspondant à $d = -5$. Il l'est encore pour $d < -5$, d'après la « décroissance du diamètre » et aussi pour $d \geq 6$, par le « principe de retournement ».

B. Représentons le développement fictif $\ldots\mathrm{TTUTT}\ldots$ par

$$\ldots 1\,\omega\,1\,\overline{\omega}\,\overline{\omega}\,\overline{\omega}\,\overline{\omega}\,\omega\,\omega\,\omega\,\omega\,1\,\overline{\omega}\,1\,\overline{\omega} - \overline{\omega}\ldots,$$

en désignant le premier rang écrit par $n - 2$. On a donc $a_n = 1$, et nous devons calculer $|x_k - y_k|$ pour $n \leq k \leq n + 9$. D'après le principe de retournement, il suffit de prendre $n \leq k \leq n + 4$.

En fait, on trouve, après quelques calculs, $|x_{n+1} - y_{n+1}| < 1{,}9$; $x_{n+2} - y_{n+2}| < 2{,}04$; $|x_{n+3} - y_{n+3}| < 1{,}7$ et

$$|x_n - y_n| = |x_{n+4} - y_{n+4}| = \sqrt{\frac{28 + 16\sqrt{3}}{13}} = 2{,}070169\ldots$$

Ce nombre est un point d'accumulation du spectre de Markoff de $\mathrm{R}(\sqrt{-3})$.

Il serait intéressant de décider si c'est le plus petit point d'accumulation. On voit d'après VI. 15 que le plus petit point d'accumulation s'obtient par des combinaisons convenables des séquences T et U. La question est donc de savoir s'il y a des combinaisons plus adéquates que celles où les tranches de T ont une longueur indéfiniment croissante.

VII. — Définition d'un algorithme approprié au cas D = 19 et détermination de la constante d'Hurwitz de $\mathrm{R}(\sqrt{-19})$.

VII. 1. Bien que les considérations qui vont suivre puissent, dans une certaine mesure, s'étendre aux corps imaginaires quadratiques dépourvus d'idéaux non principaux, nous nous limiterons au corps $\mathrm{K} = \mathrm{R}(\sqrt{-19})$. Dedekind a montré que tous les idéaux de ce corps sont principaux; on a donc l'identité de Bezout, d'où l'on déduit, grâce à des considérations géométriques élémentaires et immédiates, le lemme suivant :

Lemme. — *Si* $\frac{p}{q}$ *est une fraction irréductible et* x *un nombre complexe non dans* K, *il existe une fraction* $\frac{p'}{q'}$ *telle que* $|q'x - p'| < |qx - p|$, *avec* $|pq' - p'q| = 1$ *ou* 2.

De plus, si $\frac{p'}{q'}$ est la plus simple de ces fractions — c'est-à-dire si toute fraction $\frac{p''}{q''}$ satisfaisant aux conditions du lemme vérifie $|q''| \geqq |q'|$ — et si $q' \neq 0$, elle est irréductible. En effet, un facteur commun à p' et q' doit diviser pq'-$p'q$, donc ce ne peut être que 2. Mais alors la fraction définie par $p'' = \frac{p'}{2}$ $q'' = \frac{q'}{2}$ vérifie $|q''| < |q'|$ et les conditions du lemme.

On peut donc ainsi définir des suites de fractions approchant x : $\frac{p_0}{q_0}$ étant une réduite quelconque de x (donc irréductible), $\frac{p_n}{q_n}$ sera, parmi les fractions $\frac{p}{q}$ telles que $|p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n| = 1$ ou 2, la plus simple de celles qui vérifient $|qx - p| < |q_{n-1} x - p_{n-1}|$, étant entendu que, s'il y a plusieurs fractions vérifiant cette condition $\frac{p_n}{q_n}$ doit être l'une de celles qui rendent $|qx - p|$ le plus petit possible.

On peut s'arranger pour que les nombres $b_n = (-1)^n (p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n)$ soient positifs, et l'on a les formules de récurrence :

$$b_{n-1} p_n = a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}, \qquad b_{n-1} q_n = a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2},$$

avec $a_n \in \mathrm{E}$.

Il y a quatre classes d'entiers (mod 2), qui forment un corps. En notant $\{e\}$ la classe de e pour $e \in \mathrm{E}$ ou même $e \in \mathrm{K}$, les quatre classes sont $\{0\}, \{1\}, \{\omega\}, \{\bar{\omega}\}$. Désormais, dans les congruences, l'indication (mod 2) sera le plus souvent sous-entendue.

Lorsque $b_{n-1} = 2$, les nombres $\frac{ap_{n-1} + bp_{n-2}}{b_{n-1}}$ et $\frac{aq_{n-1} + bq_{n-2}}{b_{n-1}}$ sont entiers à la condition que $a \equiv u_n b$ avec $u_n = \left\{\frac{p_{n-2}}{p_{n-1}}\right\} = \left\{\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}\right\}$. En particulier, $a_n \equiv u_n b_n$. Si $b_{n-2} = 1$, on a $u_n = \{\bar{a}_{n-1}\}$; si $b_n = 2$, on a $a_n \equiv 0$ et $u_{n+1} = u_n + \left\{\frac{a_n}{2}\right\}$; ces deux formules permettent de calculer les u_n de proche en proche.

Posons $x_n = -\frac{1}{b_{n-1}} \frac{q_{n-2} x - p_{n-2}}{q_{n-1} x - p_{n-1}}$ et $y_n = -\frac{1}{b_{n-1}} \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}$ (on s'écarte ici un peu des notations utilisées jusque là). Ces nombres satisfont à la même récurrence :

$$b_n x_n - \frac{a_n}{b_{n-1}} = \frac{1}{b_n x_{n+1}}, \qquad b_n y_n - \frac{a_n}{b_{n-1}} = \frac{1}{b_n y_{n+1}}.$$

Le couple (a_n, b_n) est défini, à partir de x_n et y_n, par les conditions que le couple soit permis, que $b_n = 1$ ou 2, que $\left| b_n x_n - \frac{a_n}{b_{n-1}} \right| < 1$ et que $\left| b_n y_n - \frac{a_n}{b_{n-1}} \right|$ soit minimum parmi tous les couples (a, b) permis satisfaisant les conditions précédentes, étant entendu qu'en cas de doute il faut rendre aussi $\left| b_n x_n - \frac{a_n}{b_{n-1}} \right|$ minimum.

Pour démontrer la croissance des dénominateurs, nous procédons de façon analogue à IV. 2. On pourra s'y reporter.

Soit $\mathfrak{F}$ la famille des cercles $\frac{(a)}{b}$ avec $a \in \mathrm{E}$, $b \in \mathrm{N}$, b divise $\|a\| - 1$, et des droites $[1, z] = v$ avec $v \in \mathrm{Z}$.

$\mathfrak{F}_\omega$ la famille comprenant :

les cercles $\frac{(a, 2)}{b}$ avec $a \in \mathrm{E}$, $b \in \mathrm{N}$, b divise $\|a\| - 4$ et $a \equiv \omega$;

les cercles $\frac{(a)}{2c}$ avec $a \in \mathrm{E}, c \in \mathrm{N}, c$ divise $\|a\| - 1$ et $c + c' \equiv [a, \omega], \left(c' = \frac{\|a\| - 1}{c}\right)$;

les droites $[1, z] = v + \frac{1}{2}$ avec $v \in \mathrm{Z}$.

$\mathfrak{F}_{\bar{\omega}}$ la famille imaginaire conjuguée de $\mathfrak{F}_\omega$.

Lemme a. — *$\mathfrak{F}$ est invariante par l'inversion $z \to \frac{1}{z}$. $\mathfrak{F}_\omega$ et $\mathfrak{F}_{\bar{\omega}}$ s'échangent par l'inversion $z \to \frac{1}{4z}$.*

LEMME b. — *$\mathcal{F}$ est invariante par les translations entières. Les translations $\frac{d}{2}$ avec $d \equiv \omega$ échangent $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_\omega$. Les translations $\frac{d}{2}$ avec $d \equiv 0$ ou 1 transforment $\mathcal{F}_\omega$ en $\mathcal{F}_\omega$ ou $\mathcal{F}_{\bar\omega}$.*

Nous omettons les démonstrations de ces deux lemmes, qui n'offrent pas de difficulté.

Introduisons encore quelques notations : Désignons par :

$\mathbf{Y}_n$ la proposition : $b_{n-1}|y_n| < 1$;

$\mathbf{U}_n$ la proposition : si $b_{n-1} = 2$, alors $u_n = \{\omega\}$ ou $\{\bar\omega\}$;

$\mathbf{A}'_n$ la proposition : si $b_{n-1} = 1$ et $b_n = 2$, alors $a_n \equiv \omega$ ou $\bar\omega$;

$\mathbf{A}''_n$ la proposition : si $b_{n-1} = 2$ et $b_n = 2$, alors $\frac{a_n}{2} \equiv 0$ ou 1 ;

$\mathbf{F}_n$ la proposition : $\mathbf{U}_n$ est vraie et x_n et y_n n'appartiennent pas (le premier à l'intérieur ou sur la frontière, le second à l'intérieur) à un même cercle de la famille $\mathcal{F}_n$ définie comme suit : si $b_{n-1} = 1$, $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}$; si $b_{n-1} = 2$, $u_n = \{\omega\}$, $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_\omega$; si $b_{n-1} = 2$, $u_n = \{\bar\omega\}$, $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{\bar\omega}$.

Remarquons que la définition de l'algorithme donne l'impossibilité du système

$$\left|bx_n - \frac{a}{b_{n-1}}\right| < 1, \qquad \left|by_n - \frac{a}{b_{n-1}}\right| < \left|b_n y_n - \frac{a_n}{b_{n-1}}\right|, \qquad a \equiv bu_n \pmod{b_{n-1}}$$

qui implique, en posant $cb_{n-1} = ba_n - ab_n$, celle de

$$\left|cx_{n+1} + \frac{b}{b_n}\right| < b_n|x_{n+1}|, \qquad \left|cy_{n+1} + \frac{b}{b_n}\right| < 1.$$

En prenant $b_n = 1$, $c = 1$, $b = \pm 1$, puis $b_n = 2$, $c = 2$, $b = \pm 2$, on obtient le

LEMME c. — *x_n et y_n n'appartiennent pas (le premier à l'intérieur ou sur la frontière, le second à l'intérieur) à un même cercle de $\mathcal{F}_n$ passant par l'origine.*

Les lemmes a, b et c entraînent le

LEMME d. — $\mathbf{F}_n$, $\mathbf{A}'_n$ *et* $\mathbf{A}''_n$ *impliquent* $\mathbf{F}_{n+1}$.

Si $b_n|y_{n+1}| \geq 1$, on a $y_n \in i'\frac{(u_n|b_{n-1})}{b_n}$, tandis que $x_n \in i\frac{(u_n|b_{n-1})}{b_n}$. Or $\frac{(u_n|b_{n-1})}{b_n}$ est un cercle de $\mathcal{F}_n$ lorsque $b_{n-1} = 1$, et il en est de même lorsque $b_{n-1} = 2$, pourvu que $\mathbf{A}''_n$ soit vraie. On a donc le

LEMME e. — $\mathbf{F}_n$ *et* $\mathbf{A}''_n$ *impliquent* $\mathbf{Y}_{n+1}$.

Pour prouver $\mathbf{A}'_n$ et $\mathbf{A}''_n$, il suffit de montrer l'impossibilité des deux cas : $b_{n-1} = 1$, $b_n = 2$, $a_n \equiv 1$ et $b_{n-1} = 2$, $b_n = 2$, $\frac{a_n}{2} \equiv \omega$ par exemple. Or, dans le

second cas, $\mathbf{U}_n$ implique que, ou bien le couple $\left(\frac{a_n}{2}, 1\right)$ est permis, et la contradiction avec les règles de l'algorithme est alors évidente, ou bien les couples $\left(\frac{a_n}{2} \pm 1, 1\right)$ sont permis. Dans le premier cas, les couples $\left(\frac{a_n \pm 1}{2}, 1\right)$ sont toujours permis. Donc, dans les deux cas, x_n est intérieur à deux cercles de rayon 1 correspondant à des couples permis. Les règles de l'algorithme imposent donc à y_n des restrictions correspondantes, qui impliquent son appartenance à l'intérieur ou à la frontière des mêmes cercles, ce qui contredit $\mathbf{F}_n$. On a donc le

LEMME *f*. — $\mathbf{F}_n$ *implique* $\mathbf{A}'_n$ *et* $\mathbf{A}''_n$.

Pour prouver $\mathbf{U}_n$ il suffit de montrer l'impossibilité que $u_n = \{1\}$. Mais, dans cette hypothèse, le couple $a_n = b_n = 1$ est permis. La fraction correspondante $\frac{p}{q}$ vérifie $\frac{q}{q_{n-1}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}\right)$ et $\frac{qx - p}{q_{n-2}x - p_{n-2}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{q_{n-1}x - p_{n-1}}{q_{n-2}x - p_{n-2}}\right)$, donc contredit les règles de l'algorithme si $|q_{n-2}| < |q_{n-1}|$. On a donc le

LEMME *g*. — $\mathbf{Y}_n$ *implique* $\mathbf{U}_n$.

D'après les lemmes précédents, pour démontrer toutes les propriétés envisagées, il suffit de vérifier $\mathbf{Y}_2$ et $\mathbf{F}_2$.

Mais $\mathbf{Y}_2$ est une conséquence immédiate du fait que $\frac{p_0}{q_0}$ est une réduite. Alors $\mathbf{U}_2$ est vrai et il suffit, d'après le lemme *a*, de vérifier que $\frac{1}{b_1^2 x_2}$ et $\frac{1}{b_1^2 y_2}$ n'appartiennent pas (au même sens que plus haut) à un même cercle de la famille déduite de $\mathcal{F}_2$ par l'inversion $z \to \frac{1}{b_1^2 z}$. Or ceci entraînerait, comme dans IV. 2, l'existence d'une fraction plus simple et strictement meilleure que $\frac{p_0}{q_0}$, ce qui est impossible, puisque celle-ci est une réduite.

Ainsi, $\mathbf{Y}_n$, $\mathbf{U}_n$, $\mathbf{A}'_n$, $\mathbf{A}''_n$, $\mathbf{F}_n$ sont vraies à tous les rangs. On en déduit en particulier l'existence d'une constante $g > 0$ telle que toutes les fractions $\frac{p}{q}$ du développement de x vérifient $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{g|q|^2}$.

On peut donner des résultats précédents une interprétation plus suggestive :

Considérons les cercles (a) pour $a \in \mathrm{E}$ et $\frac{(a)}{2}$ pour $a \equiv \omega$ ou $\overline{\omega}$, dont les intérieurs recouvrent le plan. Convenons pour un instant que la distance d'un point à un cercle est le quotient de sa distance au centre par le rayon. On a deux chaînes de points X_k et Y_k tels que X_{n+1} et Y_{n+1} soient les inverses de X_n et Y_n par rapport à celui des cercles contenant X_n à son intérieur dont Y_n est le plus proche (au sens indiqué). A ce cercle X_{n+1} est extérieur, Y_{n+1} intérieur. Avec son centre comme origine les affixes de X_{n+1} et Y_{n+1} sont x_{n+1} et y_{n+1}.

VII. 2. Pour prouver que $C_{19}=1$, il suffit, d'après II. 4, de montrer que dans le développement de tout nombre $x \notin K$ par l'algorithme précédent, on a $\overline{\lim}\,|x_n - y_n| \geq 1$. La démonstration de ce fait est l'objet des pages suivantes.

Pour abréger cet exposé, nous omettrons tous les calculs ; nous qualifierons d'*exclu* tout développement impliquant, à quelque rang n, $|x_n - y_n| \geq 1$, et aussi tout développement identique, à partir d'un certain rang, à la suite *critique* définie par $b_n = 1$, $a_{2k} = \omega$ et $a_{2k+1} = -\bar{\omega}$ (suite étudiée dans II, 4); enfin nous conviendrons que l'affirmation qu'une certaine circonstance a lieu pour les développements signifie que tous les développements présentant la circonstance contraire sont exclus.

Exemple. — Si $b_{n-1}=1$ et $\mathcal{I}(x_n) \geq 0$, alors on a $\mathcal{I}(y_n) > 0$. Ceci traduit le fait que si $b_{n-1}=1$, $\mathcal{I}(x_n) \geq 0$, $\mathcal{I}(y_n) \leq 0$, on a $|x_n - y_n| \geq 1$ ou bien $|x_{n-1} - y_{n-1}| \geq 1$ (la vérification en étant, comme toujours, laissée au lecteur).

On voit que, si $b_{n-1}=1$ et $\mathcal{I}(y_n) \geq 0$, on a, avec $b_n=1$, $a_n = 1, -1, \omega+1, \omega, -\bar{\omega}$ ou $-\bar{\omega}-1$; avec $b_n=2$, $a_n = \omega+2, \omega+1, \omega, -\omega, -\bar{\omega}-1$ ou $-\bar{\omega}-2$.

Si $b_{n-1}=2$ et $u_n=\omega$, on a, avec $b_n=2$, $a_n = 4, 2, -2$ ou -4 ; avec $b_n=1$, $a_n = \omega+2, \omega, -\bar{\omega}-1, \bar{\omega}+1, -\omega$ ou $-\omega-2$.

Signalons un exemple typique d'exclusion, qui sera souvent utilisé (sans avertissement) : le cas où $b_{n-1}=2$, $u_n=\bar{\omega}$, $x_n \in d'\left(-\frac{1}{4}\right) \cap e'(\bar{\omega}/2) \cap e'\big((\omega+1)/2\big)$ et $y_n \in g\left(-\frac{1}{4}\right)$ (voir aux rangs n, $n+1$, $n+2$).

VII.3. La première partie de la démonstration, la plus importante et, de beaucoup, la plus longue, concerne à la fois trois situations : le cas $b_{n-1}=1$, $b_n=1$, $a_n=1$, divisé en A, B, C, D, E, F ; les trois cas voisins G, H, I ; enfin les différents cas J (*voir* plus loin les définitions de tous ces cas). L'enchevêtrement des trois études correspondantes confère une certaine complexité à la démonstration globale, qui conduit finalement à l'exclusion de tous les cas déjà envisagés.

Étude préliminaire du cas $b_{n-1}=1$ $b_n=1$, $a_n=1$. — On voit immédiatement que, si $\mathcal{I}(x_n) \geq 0$, l'argument de x_n est supérieur à $\frac{\pi}{6}$. Distinguons les six cas suivants :

A : $x_n \in e(0) \cap i(1) \cap i\frac{(\omega)}{2}$;

B : $x_n \in e(0) \cap e'\frac{(\omega)}{2} \cap i\frac{(\omega+1)}{3}$;

C : $x_n \in i(1) \cap e'\frac{(\omega+1)}{3} \cap i\frac{(\omega+1)}{2}$;

D : $x_n \in i(1) \cap e'\frac{(\omega+1)}{2} \cap i\frac{(\omega+2)}{2}$;

E : $x_n \in e(0) \cap e'\frac{(\omega+1)}{2} \cap g'(1)$;

F : $x_n \in d(1) \cap e'\frac{(\omega+2)}{2}$.

Le cas échéant, nous désignerons par les mêmes lettres les cas respectivement imaginaires conjugués, aucune confusion n'étant possible.

L'étude de F est simple : on montre facilement que $b_{n+1}=1$, $a_{n+1}=-\omega$, $b_{n+2}=1$, $a_{n+2}=1$, $b_{n+3}=2$, $a_{n+3}=-\bar{\omega}$. Un examen plus précis aux rangs $n+3$, $n+1$ et $n+4$ montre que $b_{n+4}=1$, $a_{n+4}=-\bar{\omega}$, d'où une limitation de x_{n+5} assurant l'exclusion au rang $n+1$.

On peut aussi exclure D directement dans le cas particulier où

$$y_n \in g(0) \cup i\frac{(\omega)}{4} \cup i\frac{(2\omega-1)}{6} \cup i\frac{(2+4\omega)}{13}$$

(voir jusqu'au rang $n+2$). On remarquera que dans l'étude de G, H, I, J, le cas D n'intervient que par ce cas particulier et peut donc être négligé.

Enfin, on notera que, pour E, $a_{n+1}=-\omega$, $b_{n+1}=1$, le couple (a_{n+2}, b_{n+2}) pouvant être $(-\omega, 1)$, $(\bar{\omega}, 1)$ ou $(\bar{\omega}+1, 2)$. Dans le cas E′ où $y_n \in e'\frac{(\omega+1)}{2}$, on montre l'exclusion du dernier, et, par suite, $x_{n+1} \in i\frac{(-3\omega)}{4}$.

VII. 4 .Dans les cas G, H, I, on a, à une symétrie près, $b_{n-1}=2$, $u_n=\{\bar{\omega}\}$ et $x_n \in d\left(-\frac{1}{4}\right) \cap e(0) \cap e'(\bar{\omega}/2)$ avec, pour

$$\text{G} : \quad y_n \in i(0) \cap i\left((-\omega-1)/2\right) \cap g\left(-\frac{1}{4}\right);$$

$$\text{H} : \quad y_n \in i\frac{(-1)}{2} \cap i\left((-\omega-1)/2\right) \cap d'\left(-\frac{1}{4}\right);$$

$$\text{I} : \quad y_n \in i\frac{(-1)}{2} \cap e'\left((-\omega-1)/2\right) \cap i(\bar{\omega}/2).$$

En même temps que G sera traité le cas où $b_{n-1}=1$, $x_n \in d\left(\frac{1}{2}\right) \cap e'\frac{(\omega+1)}{2} \cap e'(1)$, $y_n \in i\frac{(\omega+1)}{2} \cap i(0) \cap e'(1)$ et celui où $b_{n-1}=1$, $x_n \in d\left(-\frac{1}{2}\right) \cap e'\frac{(-\bar{\omega})}{2} \cap e(0)$, $y_n \in i(0) \cap g\left(-\frac{1}{2}\right) \cap i\frac{(-\bar{\omega})}{2}$ dans lesquels la position relative de x_n et y_n est la même. Le dernier cas cité contient (avec un décalage d'un rang) le cas E″ complémentaire de E′ dans E. Nous ne nous assujettirons pas à indiquer les changements de notations correspondants à ces variantes du cas G.

Première étude de G. — Le couple (a_n, b_n) peut prendre les trois valeurs $(-\bar{\omega}, 1)$, $(2, 2)$ et $(\omega+1, 1)$.

Soit σ le cercle de centre $\frac{1}{2}-\frac{\omega}{6}$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{3}$, lieu des points dont le rapport des distances à $\frac{\omega+1}{2}$ et à $\frac{1}{2}$ est 2. Si $y_n \in i(\sigma)$, le second couple est préférable (c'est-à-dire fournit une fraction plus simple, donc doit être choisi si x_n est

intérieur aux deux cercles correspondants) au troisième ; c'est le contraire si $y_n \in e(\sigma)$. Dans les deux cas, le premier couple est préférable aux deux autres.

L'exclusion du troisième couple est, par suite, évidente si $y_n \in i(\sigma)$; on l'obtient aussi dans le cas contraire (voir jusqu'au rang $n+3$).

L'exclusion du second couple est aisée si $y_n \in e(\sigma)$; dans le cas contraire, on montre que $a_n = 2$, $b_n = 2$; $a_{n+1} = -\omega - 1$, $b_{n+1} = 1$; $a_{n+2} = 1$, $b_{n+2} = 1$ dans E'. Alors on a $x_n \in i\frac{\left((\omega+1)/2\right)}{3} \cap e'\left(-\bar{\omega}/2\right)$.

Pour le premier couple $a_n = -\omega$, $b_n = 1$, on obtient les résultats suivants : ou bien $x_n \in i\frac{(-\bar{\omega})}{2}$, avec $b_{n+1} = 1$ et $a_{n+1} = \omega$ ou $-\bar{\omega}$; ou bien $x_n \in i\frac{(-1)}{2} \cap i\left(-\bar{\omega}/2\right)$, en particulier $x_n \in i\frac{\left((\omega+1)/2\right)}{3}$, avec $a_{n+1} = 1$, $b_{n+1} = 1$ dans B, $a_{n+2} = -\omega - 1$, $b_{n+2} = 2$, $a_{n+3} = 2$, $b_{n+3} = 2$ et un nouveau cas G.

Première étude de H. — Les valeurs de (a_n, b_n) sont les mêmes que pour G, le troisième couple étant exclu immédiatement.

Dans le cas où $a_n = -\bar{\omega}$, $b_n = 1$, on a $x_n \in i\frac{\left((\omega+1)/2\right)}{3}$ dans trois cas : $a_{n+1} = \omega + 1$, $b_{n+1} = 2$; $a_{n+1} = \omega$, $b_{n+1} = 1$, $a_{n+2} = \omega$, $b_{n+2} = 2$; $a_{n+1} = 1$, $b_{n+1} = 1$ dans C et $a_{n+2} = -\omega$, $b_{n+2} = 2$ suivi de H. Ces cas exceptés, on a $a_{n+1} = \omega$, $b_{n+1} = 1$, donc $x_n \in i\frac{(-\bar{\omega})}{4}$, avec ou bien $a_{n+2} = -\bar{\omega}$, $b_{n+2} = 1$, ou bien $a_{n+2} = -\bar{\omega} - 1$, $b_{n+2} = 2$ et un cas G.

Dans le cas où $a_n = 2$, $b_n = 2$, on a $x_n \in i\frac{\left((\omega+1)/2\right)}{3}$ si $a_{n+1} = -\omega - 1$, $b_{n+1} = 1$, $a_{n+2} = 1$, $b_{n+2} = 1$ dans E'. Ce cas excepté, on peut montrer qu'il ne reste que $a_{n+1} = \omega + 1$, $b_{n+1} = 1$, avec ou bien $a_{n+2} = -\bar{\omega} - 1$, $b_{n+2} = 2$, $a_{n+3} = 2$, $b_{n+3} = 2$ et un cas G, ou bien $a_{n+2} = -\bar{\omega}$, $b_{n+2} = 2$ et un cas H nécessairement suivi de $a_{n+3} = -\omega$, $b_{n+3} = 1$.

Première étude de I. — Ici, il reste seulement $a_n = -\bar{\omega}$, $b_n = 1$, $a_{n+1} = \omega$, $b_{n+1} = 1$ avec ou bien $a_{n+2} = -\bar{\omega}$, $b_{n+2} = 1$, ou bien $a_{n+2} = -\bar{\omega} - 1$, $b_{n+2} = 2$ avec un cas G.

VII.5. La désignation générale de cas J s'applique à un certain nombre de cas où y_n est assez voisin de la valeur qu'il prend dans la suite critique. Nous montrerons que seule la suite critique peut suivre : on peut voir dans cette idée la clef de toute la démonstration.

Nous supposons que $b_{n-1}=1$ et nous désignons respectivement par

J_0 : le cas où $y_n \in i\frac{(-21\bar{\omega})}{76} \cap i\frac{(-\bar{\omega})}{2}$;

J'_0 : » $i\frac{(-24\bar{\omega}-1)}{88} \cap i\frac{(-\bar{\omega})}{2} \cap i\frac{(-3\bar{\omega}-1)}{12}$;

J_1 : » $i\frac{(-21\bar{\omega})}{76} \cap e'\frac{(-\bar{\omega})}{2}$;

J_2 : » $i\frac{(1-9\bar{\omega})}{33} \cap i\frac{(-\bar{\omega})}{2} \cap e'\frac{(\omega)}{4}$;

J'_2 : » $i\frac{(-8\omega)}{29} \cap i\frac{(-\bar{\omega})}{2} \cap e'\frac{(1-9\bar{\omega})}{33}$;

J_3 : » $i\frac{(-8\bar{\omega})}{29} \cap e'\frac{(-\bar{\omega})}{2} \cap i\frac{(\omega)}{4}$;

J_4 : » $i\frac{(1-9\bar{\omega})}{33} \cap i\frac{(-\bar{\omega})}{2} \cap i\frac{(\omega)}{4}$.

Dans tous les cas, nous supposons que $x_n \in e'\frac{(-\bar{\omega})}{2} \cap g'\left(\frac{1}{2}\right)$, et même, pour J_3 et J_4, que $x_n \in g'(0)$.

Quatre couples (a_n, b_n) sont possibles ; $(\omega, 2)$, $(-\bar{\omega}-1, 2)$, $(-1, 1)$ et $(-\bar{\omega}, 1)$. Dans ce dernier cas, on se retrouve dans un cas J au rang suivant, J_1 si l'on avait J_1 ou J_3, J'_0 si l'on avait J_4, et J_0 si l'on avait J_0, J'_0, J_2 ou J'_2. Il suffit donc d'étudier les trois premiers couples :

1° $a_n=\omega$, $b_n=2$. — On montre d'abord que $x_{n+1} \in i(\bar{\omega}/2)$; puis deux cas se présentent :

Si $x_{n+1} \in e'((-\omega-1)/2)$, on a $a_{n+1}=\bar{\omega}$, $b_{n+1}=1$; $a_{n+2}=-\omega$, $b_{n+2}=1$; et l'on obtient l'exclusion, *sauf dans le cas* J'_2.

Si $x_{n+1} \in i((-\omega-1)/2)$, on a :

pour J_1 *et* J_3, $a_{n+1}=\bar{\omega}$, $b_{n+1}=1$; puis $a_{n+2}=-\omega-1$, $b_{n+2}=2$ et un cas G qui s'exclut ; ou bien $a_{n+2}=-\omega$, $b_{n+2}=1$, dont l'exclusion est aisée.

pour J_0, J'_0 *et* J_4, $a_{n+1}=-\omega-1$, $b_{n+1}=1$; $a_{n+2}=1$, $b_{n+2}=1$, dans les cas E′ et C, ce dernier suivi de $a_{n+3}=-\bar{\omega}$, $b_{n+3}=2$ et G ; on obtient aussi l'exclusion, qui vaut ainsi pour le cas total, *sauf dans* J_2 *et* J'_2.

2° $a_n=-\bar{\omega}-1$, $b_n=2$. — On montre d'abord que $x_n \in i(-\bar{\omega})$, d'où $a_{n+1}=\bar{\omega}$, $b_{n+1}=1$, puis $b_{n+2}=1$ avec $a_{n+2}=-1$, $\bar{\omega}$ ou ω. $a_{n+2}=-1$ est dans E′, d'où son exclusion. On montre encore que $x_{n+2} \in i(\bar{\omega}) \cap g(0) \cap e'\frac{(-\omega)}{2}$, et il faut distinguer deux cas.

Dans J_1 et J_3, on a $a_{n+2}=-\omega$, $b_{n+2}=1$; $a_{n+3}=\bar{\omega}+1$, $b_{n+3}=2$ avec G ou bien $a_{n+3}=\bar{\omega}$, $b_{n+3}=1$, ce qui s'exclut de toute façon.

Dans les autres cas, on a $a_{n+2}=\bar{\omega}$, $b_{n+2}=1$; $a_{n+3}=-1$, $b_{n+3}=1$ dans E′ ou C, ce dernier entraînant G après le rang suivant, et l'on a l'exclusion au rang $n+4$, ou au rang n. Ce 2° est ainsi complètement exclu.

3° $a_n=-1$, $b_n=1$. — Négligeons le cas B, qui n'intervient pas dans les applications. Il reste donc C ou E′.

Dans E′, on a l'exclusion au rang $n-1$.

Dans C, il suit $a_{n+1}=\bar{\omega}$, $b_{n+1}=2$ dans les cas H et I. Compte tenu des limitations correspondantes et des exclusions aux rangs $n+1$ et surtout $n-1$, il reste $a_{n+2}=\omega$, $b_{n+2}=1$; $a_{n+3}=-\bar{\omega}$, $b_{n+3}=1$; $a_{n+4}=\omega+1$, $b_{n+4}=2$ avec un cas G qui donne l'exclusion restante au rang $n+4$.

Résumé des cas J. — Il peut rester $a_n=-1$, $b_n=1$ (cas B), et $a_n=\omega$, $b_n=2$ avec des limitations pour x dans les seuls cas J_2 et J'_2.

VII. 6. Premières conséquences. — Donnons d'abord une précision sur le cas G, lorsque $a_n=-\bar{\omega}$, $b_n=1$; $a_{n+1}=\omega$, $b_{n+1}=1$. Si $x_n\in e'\left((\omega+1)/2\right)$, on a $a_{n+2}=-\bar{\omega}$, $b_{n+2}=1$ avec, ensuite, un cas J_4 déjà exclu. D'autre part, si $a_n=-\bar{\omega}$, $b_n=1$; $a_{n+1}=-\bar{\omega}$, $b_{n+1}=1$; on a $a_{n+2}=1$, $b_{n+2}=1$ dans les cas E′ et C, ce dernier impliquant $x_n\in i\dfrac{(-\bar{\omega}-1)}{6}$.

Étudions maintenant le cas E′.

Nous avons vu qu'il reste deux cas :

1° $b_{n-1}=b_n=b_{n+1}=b_{n+2}=1$, $a_n=1$, $a_{n+1}=-\omega$, $a_{n+2}=\bar{\omega}$. On montre alors que :

ou bien $a_{n+3}=\bar{\omega}$, $b_{n+3}=2$; $a_{n+4}=\omega$, $b_{n+4}=1$; puis $a_{n+5}=-\bar{\omega}-1$, $b_{n+5}=2$ et un cas G, qu'on exclut d'après la première étude de ce cas ;
ou bien $a_{n+3}=-\omega$, $b_{n+3}=1$ et un cas J_3 déjà exclu.

2° $b_{n-1}=b_n=b_{n+1}=b_{n+2}=b_{n+3}=1$, $a_n=1$, $a_{n+1}=-\omega$, $a_{n+2}=-\omega$, $a_{n+3}=1$. Au dernier rang, on a C ou E′, mais on peut (en décalant au besoin les indices) supposer que c'est C.

On a alors $a_{n+4}=-\bar{\omega}$, $b_{n+4}=2$ et un cas H ou I.

En utilisant la première étude de ces cas, on obtient l'exclusion sans difficulté, sauf dans les deux cas suivants :

Si $a_{n+5}=-\omega$, $b_{n+5}=1$; $a_{n+6}=\bar{\omega}$, $b_{n+6}=1$; $a_{n+7}=\omega$, $b_{n+7}=1$; on a un cas J_2, dont il suit $a_{n+8}=\omega$, $b_{n+8}=2$ dans le cas indiqué plus haut, puis $a_{n+9}=-\bar{\omega}$, $b_{n+9}=1$, et $a_{n+10}=\omega$, $b_{n+10}=1$ ou bien $a_{n+10}=\omega+1$, $b_{n+10}=2$ et un cas I, donc $x_{n+10}\in i(\omega)$ de toute façon, et exclusion au rang $n+7$.

Si $a_{n+5}=2$, $b_{n+5}=2$; $a_{n+6}=\bar{\omega}+1$, $b_{n+6}=1$; $a_{n+7}=-\omega-1$, $b_{n+7}=2$;

$a_{n+8}=2$, $b_{n+8}=2$ et un cas G. L'exclusion s'obtient au rang $n+5$ ou au rang $n+3$, sauf dans le cas où $a_{n+9}=-\omega$, $b_{n+9}=1$; $a_{n+10}=-\omega$, $b_{n+10}=1$; $a_{n+11}=1$, $b_{n+11}=1$ (dans E′) ; $a_{n+12}=-\bar{\omega}$, $b_{n+12}=1$; $a_{n+13}=-\bar{\omega}$, $b_{n+13}=1$; $a_{n+14}=1$, $b_{n+14}=1$.

Si, à ce rang, on a E′, il y a exclusion au rang $n+12$; si c'est C, l'exclusion a lieu au rang $n+13$, compte tenu de ce qui peut suivre.

Le cas E′ *est donc exclu.*

VII. 7. Retour aux cas G, H, I. — Dans le cas G, si $a_n=-\bar{\omega}$, $b_n=1$; $a_{n+1}=\omega$, $b_{n+1}=1$; on montre que $a_{n+2}=\omega$, $b_{n+2}=2$; puis $a_{n+3}=-\omega-1$, $b_{n+3}=1$; $a_{n+4}=1$, $b_{n+4}=1$; $a_{n+5}=-\omega$, $b_{n+5}=2$ et un cas G.

Désignons la séquence comprise entre ces deux cas G par μ, et remarquons qu'en ce cas $x_n \in i\frac{\left((\omega+1)/2\right)}{3}$.

Cette inclusion est encore vraie si $a_n=-\bar{\omega}$, $b_n=1$; $a_{n+1}=1$, $b_{n+1}=1$ (cas B) qui implique $a_{n+2}=-\omega-1$, $b_{n+2}=2$; $a_{n+3}=2$, $b_{n+3}=2$ et un cas G ; désignons cette séquence par ν.

A part μ et ν, G ne peut être suivi que de $a_n=-\bar{\omega}$, $b_n=1$; $a_{n+1}=-\bar{\omega}$, $b_{n+1}=1$; $a_{n+2}=1$, $b_{n+2}=1$; $a_{n+3}=-\omega$, $b_{n+3}=2$ et un cas G d'où l'exclusion de ce dernier cas.

On termine en prouvant l'exclusion des combinaisons $\mu\nu\mu$, $\nu\nu\mu$, $\nu\nu\nu$ et $\mu\mu\mu$.

Le cas G *est donc exclu.*

Dans le cas H, il nous reste, si $a_n=-\bar{\omega}$, $b_n=1$, trois variantes d'après ce qui précède :

$a_n=-\omega$, $b_n=1$; $a_{n+1}=\omega$, $b_{n+1}=1$; $a_{n+2}=\omega$, $b_{n+2}=2$ qu'on exclut.

$a_n=-\bar{\omega}$, $b_n=1$; $a_{n+1}=\omega+1$, $b_{n+1}=2$ qu'on exclut.

$a_n=-\bar{\omega}$, $b_n=1$; $a_{n+1}=1$, $b_{n+1}=1$; $a_{n+2}=-\omega$, $b_{n+2}=2$ et un cas H suivi de $a_{n+3}=-\omega$, $b_{n+3}=1$, donc ce cas se répète et est facilement exclu, entraînant l'exclusion de H dans le cas où $a_n=-\omega$, $b_n=1$.

Mais l'autre cas, on l'a vu (E′ et G étant exclus) se ramène à celui-ci.

Le cas H *est donc exclu.*

Pour le cas I, son exclusion est maintenant évidente.

VII. 8. Retour au cas $b_{n-1}=1$, $b_n=1$, $a_n=1$. — B implique $a_{n+1}=-\omega-1$, $b_{n+1}=2$; $a_{n+2}=2$, $b_{n+2}=2$ et G ; il est donc exclu.

C implique $a_{n+1}=-\omega$, $b_{n+1}=2$ et G, H ou I ; il est donc exclu.

D implique $a_{n+1}=\omega$, $b_{n+1}=1$, qu'on exclut ; ou bien $a_{n+1}=\omega$, $b_{n+1}=2$;

puis $a_{n+2}=\omega$, $b_{n+2}=1$, ou bien $a_{n+2}=-\overline{\omega}-1$, $b_{n+2}=1$; dans les deux cas, ou bien il suit (1, 1), et l'exclusion résulte de nos connaissances actuelles sur ce cas, ou bien l'exclusion s'obtient directement (raisonner jusqu'au rang $n+4$).

E est exclu, puisque E′ l'est et que E″ l'est avec G.

Enfin A est facilement exclu au rang $n-1$.

Ainsi nous avons obtenu l'exclusion totale du cas $b_{n-1}=1$, $b_n=1$, $a_n=1$, achevant donc la première partie de la démonstration.

Remarque. — Il est maintenant aisé de lever les restrictions relatives à l'exclusion des cas J. On peut donc dire que tous les cas déjà envisagés sont exclus.

VII. 9. Introduisons de nouveaux cas analogues aux cas G, H, I. Ce sont les cas L et M où $b_{n-1}=2$, $u_n=\{\overline{\omega}\}$ et $x_n\in d\left(-\frac{1}{4}\right)\cap e(0)\cap e'(\overline{\omega}/2)$, avec en plus :

pour L : $y_n\in i(0)\cap i\left((-\omega-1)/2\right)\cap e'\frac{(-1)}{2}$;

pour M : $y_n\in g\left(-\frac{1}{4}\right)\cap e'\left((-\omega-1)/2\right)\cap i\frac{\left((-\omega-1)/2\right)}{3}$.

Au cas L est assimilé le cas L′ où $b_{n-1}=1$, $x_n\in d\left(-\frac{1}{2}\right)\cap e'\frac{(-\overline{\omega})}{2}\cap e(0)$ et $y_n\in i(-1)\cap i\frac{(-\overline{\omega})}{2}\cap e'\frac{(-\overline{\omega}-1)}{2}$, où la position relative de x_n et y_n est la même, et où les développements ultérieurs sont les mêmes, à un changement de notation près pour (a_n, b_n).

Désignons encore par K le cas où $b_{n-1}=2$, $u_n=\{\omega\}$, avec en plus $x_n\in d\left(-\frac{1}{4}\right)\subset e(0)\cap e'\left((-\omega)/2\right)$ et $y_n\in i(0)\cap g\left(-\frac{1}{4}\right)\cap i\left((-\omega)/2\right)$. A ce cas est assimilé, pour les mêmes raisons que précédemment, le cas où $b_{n-1}=1$, $x_n\in d(0)\cap e\frac{(\omega)}{2}\cap e(0)$ et $y_n\in i\frac{(\omega)}{2}\cap g(0)\cap i(0)$.

Étude de K. — On a $(a_n, b_n)=(\omega, 1)$, $(2, 2)$ ou $(\omega+1, 1)$; mais on montre facilement que $(2, 2)$ est exclu et que $(\omega+1, 1)$ implique un cas G ou un cas H, donc est exclu; il reste $(\omega, 1)$ qui implique un cas L′ au rang suivant.

Étude de L. — On a $(a_n, b_n)=(-\omega, 1)$, $(2, 2)$ ou $(\omega+1, 1)$, ce dernier étant facilement exclu.

Soit φ la variante où il suit $(2, 2)$; χ et ψ respectivement celles où $(-\overline{\omega}, 1)$ est suivi de $(\omega+1, 2)$ ou $(\omega, 1)$, qu'on montre être les seules possibles.

Variante φ. — Si $a_n=b_n=2$, il suit un cas K, d'où $a_{n+1}=\overline{\omega}$, $b_{n+1}=1$ avec

un cas L′ (où nous désignons encore par φ, χ, ψ les trois variantes correspondantes); on montre l'exclusion (rang n) s'il suit χ ou ψ; il reste donc seulement la suite périodique où $b_{2k}=1$, $b_{2k+1}=2$, $a_{4k}=a_{4k+1}=\omega$, $a_{4k+2}=a_{4k+3}=\overline{\omega}$ (à un changement de notation près). Cette suite est exclue.

Variante ψ. — Si $a_n=\overline{\omega}$, $b_n=1$ avec $a_{n+1}=\omega+1$, $b_{n+1}=2$, on a deux cas possibles :

1° $a_{n+2}=2$, $b_{n+2}=2$ avec $a_{n+3}=\omega$, $b_{n+3}=1$ et un cas L′ où la variante χ est exclue au rang $n+2$, et la variante ψ au rang $n+1$.

2° $a_{n+2}=-\omega$, $b_{n+2}=1$ et un cas K, d'où $a_{n+3}=\omega$, $b_{n+3}=1$ et un cas L′ où les deux variantes χ et ψ sont exclues au rang $n+1$.

Variante χ. — Si $a_n=-\omega$, $b_n=1$ avec $a_{n+1}=\omega$, $b_{n+1}=1$, après l'exclusion facile du cas où $a_{n+2}=\omega+1$, $b_{n+2}=1$, il reste trois cas :

1° $a_{n+2}=-\overline{\omega}-1$, $b_{n+2}=2$: ce cas se traite comme la variante ψ (avec un rang de décalage).

2° $a_{n+2}=\omega$, $b_{n+2}=2$: on a un cas K, d'où l'exclusion au rang $n+1$.

3° $a_{n+2}=-\overline{\omega}$, $b_{n+2}=1$: on a un cas J_2, déjà exclu.

Ainsi, les cas K *et* L *sont exclus* (L′ *aussi*).

Étude de M. — Le couple (a_n, b_n) peut prendre les trois valeurs $(-\overline{\omega}, 1)$, $(2, 2)$, $(\omega+1, 1)$.

Le premier entraîne un cas K.

Le second entraîne $a_{n+2}=\overline{\omega}$, $b_{n+1}=1$ et un cas L.

Le troisième entraîne facilement $a_{n+1}=-\overline{\omega}$, $b_{n+1}=2$, avec, ou bien un cas L au rang suivant, ou bien l'exclusion au rang $n-1$.

Donc le cas M *est exclu.*

VII. 10. Nous étudions maintenant tous les cas où $b_{n-1}=1$, $b_n=2$ et $\mathcal{J}(y_n)\geqq 0$. On peut supposer $\mathcal{R}(x_n)\geqq 0$; on a donc $a_n=-\overline{\omega}$, ω, $\omega+1$ ou $\omega+2$.

Remarque. — Quelques cas sont exclus indépendamment de VII. 9: Si $x_n\in i(1)$, ou bien encore si $x_n\in i\frac{(\omega+1)}{3}\cap e'(1)$ avec, si $a_n=\omega$, $x_n\in d\left(\frac{1}{2}\right)$, on arrive, dans tous les cas, à des cas G ou H, ou bien à des cas tels que $b_{k-1}=b_k=a_k=1$. L'exclusion résulte donc de VII. 7, 8.

Abordons maintenant l'étude systématique de tous les cas possibles.

$a_n=\omega+2$. — On montre d'abord l'exclusion si $x_n\in e'(\omega+1)$; le cas où $x_n\in i(\omega+1)$ se ramène à $a_{n+1}=\overline{\omega}$, $b_{n+1}=1$ avec un cas L′, ou bien à $a_{n+1}=-\omega-1$, $b_{n+1}=1$, $a_{n+2}=b_{n+2}=1$; ces deux cas sont déjà exclus.

$a_n = \omega + 1$. — Il reste cinq cas (pour l'énoncé de chacun nous supposons les précédents non réalisés) :

1° $x_n \in i(\omega)$: se ramène à G, donc exclu.

Remarque. — Dans tous les autres cas, on a les cas G ou M au rang $n+1$, lorsque $y_n \in i\frac{(\omega)}{2}$; nous supposons donc désormais le contraire.

2° $x_n \in i(\omega + 1)$: exclusion au rang n.

3° $x_n \in d(1)$: exclusion aux rangs n, $n-1$.

4° $x_n \in i(\omega)$: on montre que $a_{n+1} = -\omega$, $b_{n+1} = 1$, et $a_{n+2} = \overline{\omega}$, $b_{n+2} = 1$; puis $a_{n+3} = -\omega$, $b_{n+3} = 1$ (sinon on aurait un cas G, ou bien l'exclusion au rang n); enfin on a ou bien l'exclusion au rang n, ou bien un cas K ou un cas M.

5° Pour la région restante, on voit (rang $n+1$) que $a_{n+1} = \overline{\omega} + 1$, $b_{n+1} = 1$ et $a_{n+2} = -\omega$, $b_{n+2} = 1$. Compte tenu des valeurs possibles de (a_{n+3}, b_{n+3}), on obtient l'exclusion au rang $n-1$.

$a_n = -\overline{\omega}$. — On voit facilement qu'il ne reste que $a_{n+1} = -\omega$, $b_{n+1} = 1$ et un cas G, ou bien $a_{n+1} = 2$, $b_{n+1} = 2$ et un cas K.

VII. 11. Avant d'étudier le dernier cas, où $a_n = \omega$, signalons une extension des résultats de VII. 5.

Désignons par J* le cas où $b_{n-1} = 1$; $y_n \in i\frac{(\omega)}{4} \cup i\frac{(-\overline{\omega})}{4}$ et $x_n \in e'\frac{(-\overline{\omega})}{2}$.

L'exclusion en est immédiate si $x_n \in d'\left(\frac{1}{2}\right)$.

Supposons le contraire. Le couple (a_n, b_n) peut prendre les trois valeurs $(\omega, 2)$, $(\omega, 1)$ et $(-\overline{\omega}, 1)$.

Si $a_n = \omega$, $b_n = 2$, on peut avoir $a_{n+1} = \omega + 1$, $b_{n+1} = 1$; ou bien $a_{n+1} = \overline{\omega}$, $b_{n+1} = 1$.

Les deux cas s'excluent si $y_n \in e'\frac{(-\overline{\omega})}{2}$; dans le cas contraire, on a un cas K, déjà exclu.

Si $b_n = 1$ avec $a_n = \omega$ ou $-\overline{\omega}$, on se retrouve dans un cas J* au rang suivant. Mais, $a_n = a_{n+1} = \omega$, $b_n = b_{n+1} = 1$ étant impossible, il ne peut suivre que la suite critique.

Donc le cas J* *est exclu.*

Revenons au cas où $b_{n-1} = 1$, $b_n = 2$, $a_n = \{\omega\}$, $\mathcal{R}(x_n) \geqq 0$. L'exclusion est immédiate si $x_n \in d'\left(\frac{1}{2}\right)$. Distinguons, pour le reste, deux cas :

1° $x_n \in e'\frac{(-\overline{\omega})}{2}$. — Le couple (a_{n+1}, b_{n+1}) peut prendre les quatre valeurs $(\overline{\omega}, 1)$, $(\omega + 1, 1)$, $(\overline{\omega} + 2, 1)$ et $(4, 2)$.

Si $a_{n+1}=\omega$, $b_{n+1}=1$, on a un cas J* au rang suivant, d'où l'exclusion.
Dans les trois autres cas, l'exclusion s'obtient au rang $n-1$, ou bien on a un cas K, déjà exclu.

2° $x_n \in i\frac{(-\bar{\omega})}{2}$. — Le couple (a_{n+1}, b_{n+1}) peut prendre les quatre valeurs $(\bar{\omega}, 1)$, $(-\omega-1, 1)$, $(-\bar{\omega}-2, 1)$ et $(-4, 2)$.
Si $a_{n+1}=\bar{\omega}$, $b_{n+1}=1$, on a $a_{n+2}=-1$, $b_{n+2}=1$, d'où l'exclusion,
Si $a_{n+1}=-\omega-1$. $b_{n+1}=1$, on a un cas J* au rang suivant, d'où l'exclusion.
Si $a_{n+1}=-\bar{\omega}-2$, $b_{n+1}=1$, on a $a_{n+2}=\omega$, $b_{n+2}=2$, d'où (d'après ce que nous savons maintenant sur ce cas) $x_{n+1} \in i\frac{(-3)}{2}$, conclusion qui est aussi valable si $a_{n+4}=-4$, $b_{n+2}=2$; l'exclusion (aux rangs $n+1$ et $n-1$) s'en déduit.

VII. 12. Nous avons ainsi montré l'exclusion de tous les cas où $b_{n-1}=1$, $b_n=2$; il nous suffit donc d'examiner les cas où l'on a constamment $b_k=1$, ou bien constamment $b_k=2$.

Si $b_k=2$ constamment, on a $a_k=\pm 2$ ou ± 4; mais tous les a_k doivent être de même signe (par exemple positif); les exclusions faciles des cas où $a_n=2$, $a_{n+1}=4$, ou bien $a_{n-1}=a_n=a_{n-1}=2$, ou encore $a_{n-1}=a_n=a_{n+1}=4$ montrent que le cas entier est à rejeter.

Si $b_k=1$ constamment, on prouve aisément l'exclusion de $\omega+1$; l'étude de J* montre alors qu'il ne peut suivre que la suite critique.

Ainsi tous les cas possibles ont été exclus; la démonstration est terminée : on a $C_{19}=1$.

Remarque. — Dans bien des occasions, la constante d'exclusion utilisée a été exactement 1. Il faudrait donc un examen plus approfondi pour décider si 1 est une valeur isolée du spectre de Markoff de $R(\sqrt{-19})$.

CONVERGENCE
DE LA RÉPARTITION EMPIRIQUE
VERS LA RÉPARTITION THÉORIQUE

PAR M. R. FORTET ET Mlle E. MOURIER.

1. *Position du problème.* — Soit $\mathfrak{X}$ un espace quelconque de points x; $\mathcal{B}$ un corps borélien de sous-ensembles e de $\mathfrak{X}$, contenant $\mathfrak{X}$ lui-même; $P(e)$ une mesure sur $\mathcal{B}$, c'est-à-dire une fonction d'ensemble, définie et complètement additive sur $\mathcal{B}$, positive ou nulle, avec $P(\mathfrak{X})=1$. Nous considérons une suite indéfinie d'éléments aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_j, \ldots$ prenant leurs valeurs dans $\mathfrak{X}$, admettant tous $P(e)$ comme loi de probabilité (*cf.* A. Blanc-Lapierre et R. Fortet [1], p. 71) (1).

Soit $\varphi(e; x)$ la caractéristique de l'ensemble e [$\varphi(e; x)=1$ si $x \in e$; $\varphi(e; x)=0$ si $x \notin e$]; posons

$$P_n(e)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(e; X_j); \tag{1.1}$$

$P_n(e)$ est une mesure aléatoire; lorsque la suite $\{X_j\}$ est d'un type convenable, par exemple : suite d'éléments indépendants, en chaîne strictement stationnaire, etc., l'étude de la convergence stochastique de $P_n(e)$ vers $P(e)$ pour $n \to +\infty$ peut être considérée comme un des problèmes fondamentaux du Calcul des Probabilités; dans le cas où $\mathfrak{X}$ est la droite réelle ce problème est, au moins partiellement, résolu par le classique théorème de Glivenko-Cantelli (*cf.* § 6); le but de ce travail est d'étudier le comportement asymptotique de $P_n(e)$ sous des hypothèses beaucoup plus générales.

(1) Les numéros entre crochets, comme [1], renvoient à la bibliographie, p. 285.

Méthode. — Cette étude repose sur les idées suivantes : pour tout $x \in \mathfrak{X}$, $\varphi(e; x)$ est, en e, une mesure définie sur $\mathcal{B}$; toute combinaison linéaire d'un nombre fini de $\varphi(e; x)$ de la forme

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \varphi(e; x_j),$$

où $x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n$ sont n points distincts ou non de $\mathfrak{X}$ et $a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n$ n nombres quelconques, est, en e, une fonction d'ensemble bornée, définie et complètement additive sur $\mathcal{B}$: soit $\mathcal{E}$ l'ensemble de ces fonctions d'ensemble; $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel, réel ou complexe suivant que les a_j sont pris réels ou complexes; soit $\mathcal{E}'$ un espace vectoriel arbitraire, tel toutefois que $\mathcal{E}$ soit sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}'$.

Les $\varphi(e; X_j)$ sont alors des éléments aléatoires prenant leurs valeurs dans l'espace vectoriel $\mathcal{E}'$, et d'ailleurs de même loi de probabilité, mutuellement indépendants si les X_j le sont entre eux, en chaîne strictement stationnaire si les X_j sont en chaîne strictement stationnaire, etc. (1.1) fait apparaître $P_n(e)$ comme la moyenne arithmétique des $\varphi(e; X_j)$ pour $j = 1, 2, \ldots, n$; l'étude du comportement asymptotique de $P_n(e)$ est donc une étude de lois des grands nombres pour des éléments aléatoires prenant leurs valeurs dans un espace vectoriel $\mathcal{E}'$.

Or les seules lois des grands nombres concernant un espace vectoriel $\mathcal{E}'$, à la fois générales et précises actuellement connues, qui ont été données par E. Mourier [1], supposent que $\mathcal{E}'$ est un *espace de Banach séparable*. Il sera donc pour nous nécessaire, mais aussi suffisant, de construire une extension $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$ qui soit un espace de Banach séparable, pour, par simple application des résultats de E. Mourier [1], résoudre le problème posé.

Remarques. — *a.* Il est clair que dans la définition de $\mathcal{E}$, et par suite de $\mathcal{E}'$, on peut faire abstraction des $\varphi(e; x)$ dont le x appartient à un ensemble ω donné, arbitraire, tel que $P(\omega) = 0$.

b. Si $\lambda(e)$ est une fonction d'ensemble définie et complètement additive sur $\mathcal{B}$, d'ailleurs quelconque, on peut évidemment construire $\mathcal{E}$, et par suite $\mathcal{E}'$, à partir des fonctions d'ensemble $\varphi(e; x) - \lambda(e)$, au lieu des $\varphi(e; x)$; naturellement les résultats concerneront $P_n(e) - \lambda(e)$ au lieu de $P_n(e)$ elle-même.

Résultats. — La construction d'un $\mathcal{E}'$ qui soit un espace de Banach séparable peut être obtenue dans de nombreux cas, et de diverses façons selon les hypothèses faites sur $\mathfrak{X}$ et sur $P(e)$, et selon l'application envisagée.

Dans tout ce qui suit nous supposerons que :

α. $\mathfrak{X}$ est distancié et séparable;

β. Les sphères de $\mathfrak{X}$ font partie de $\mathcal{B}$.

(x', x'') désignera la distance de deux points quelconques x' et x'' de $\mathfrak{X}$.

Notons qu'un moyen d'assurer que $\mathscr{E}'$ est un espace de Banach est de le construire comme dual (fort) d'un espace de Banach de fonctions numériques de point définies sur $\mathscr{X}$: ce procédé sera suivi dans la section I ; dans la section II nous donnerons un exemple de construction directe de $\mathscr{E}'$.

SECTION I.

2. Définition et étude de l'espace $\mathscr{F}$. — Soit $\mathscr{F}$ l'espace des fonctions numériques réelles $f(x)$ définies sur $\mathscr{X}$ et telles que :

$$\text{b. s.}_{x',x''\in\mathscr{X}} \frac{|f(x')-f(x'')|}{(x',x'')} < +\infty.$$

On posera

$$\mathrm{M}[f] = \text{b. s.}_{x',x''\in\mathscr{X}} \frac{|f(x')-f(x'')|}{(x',x'')}, \tag{2.1}$$

$\mathscr{F}$ est évidemment un espace vectoriel réel; en prenant comme norme $\|f\|$ de $f\in\mathscr{F}$ le nombre $\mathrm{M}[f]$ défini par (2.1), $\mathscr{F}$ est un espace de Banach.

En effet :

1° $\mathrm{M}[f]$ est une norme, car :

$$\begin{cases} \alpha.\ \mathrm{M}[f]\geqq 0; \\ \beta.\ \mathrm{M}[f_1+f_2]\leqq \mathrm{M}[f_1]+\mathrm{M}[f_2], \qquad (f_1 \text{ et } f_2\in\mathscr{F}); \\ \gamma.\ \mathrm{M}[\lambda f]=|\lambda|\,\mathrm{M}[f], \qquad (f\in\mathscr{F}), \quad \lambda \text{ scalaire quelconque.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Mais observons que $\mathrm{M}[f]=0$ signifie non que f est identiquement nulle, mais seulement que f est constante; nous devrons donc considérer deux fonctions différant d'une constante comme identiques en tant qu'éléments de $\mathscr{F}$; toute fonction constante est l'élément nul θ de $\mathscr{F}$.

2° On vérifie aisément que $\mathscr{F}$ est complet; soit $\{f_n\}$ une suite d'éléments de $\mathscr{F}$, telle que $\mathrm{M}[f_{n+m}-f_n]\to 0$ si $n\to\infty$, uniformément en m; nous pouvons, x_0 désignant un point fixe arbitraire de $\mathscr{X}$, supposer $f_n(x_0)=0$ pour tout n; on a

$$|f_{n+m}(x)-f_n(x)| = |[f_{n+m}(x)-f_n(x)]-[f_{n+m}(x_0)-f_n(x_0)]| \leqq \mathrm{M}[f_{n+m}-f_n](x_0,x).$$

$|f_{n+m}(x)-f_n(x)|$ tend donc vers zéro, uniformément en m; donc $f_n(x)$ tend vers une limite, soit $l(x)$; montrons que $l\in\mathscr{F}$, c'est-à-dire que :

$$\text{b. s.}_{x',x''\in\mathscr{X}} \frac{|l(x')-l(x'')|}{(x',x'')} < +\infty ;$$

On a :

$$\frac{|l(x')-l(x'')|}{(x',x'')} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|f_n(x')-f_n(x'')|}{(x',x''')} ;$$

$$\frac{|f_n(x')-f_n(x'')|}{(x',x'')} \leqq \mathrm{M}[f_n].$$

Or $M[f_n]$ est bornée; on le voit en remarquant que si l'on prend n_0 assez grand pour que $M[f_n - f_{n_0}]$ soit inférieure à un nombre arbitraire A pour tout $n > n_0$, on a d'après (2.2) :

$$M[f_n] \leq M[f_n - f_{n_0}] + M[f_{n_0}] \leq A + M[f_{n_0}].$$

On remarque que la fonction $f(x) = (x_0, x)$, où x_0 est un point fixe arbitraire de $\mathfrak{X}$, appartient à $\mathfrak{F}$ avec $\|(x_0, x)\| = 1$.

Une construction de $\mathfrak{E}'$ à partir de $\mathfrak{F}$. — Soit $\mathfrak{F}^*$ l'espace de Banach défini comme étant le dual de $\mathfrak{F}$. Remarquons que toute fonction d'ensemble $\psi(e)$ du type :

$$\psi(e) = \varphi(e; x') - \varphi(e; x''), \tag{2.3}$$

où x' et x'' sont deux points quelconques de $\mathfrak{X}$, constitue une fonctionnelle linéaire continue f^* sur $\mathfrak{F}$ par la formule (2) :

$$\langle f^*, f \rangle = \int_{\mathfrak{X}} f(x)\, d\psi(e) = f(x') - f(x''), \tag{2.4}$$

on voit que

$$\|f^*\| = \underset{f \in \mathfrak{F}}{\text{b. s.}} \frac{|\langle f^*, f \rangle|}{M[f]} \leq \frac{M[f]\,(x', x'')}{M[f]} = (x', x'');$$

d'ailleurs on a plus précisément :

$$\|f^*\| = (x', x'') \tag{2.5}$$

comme on le vérifie en considérant la fonction $f(x) = (x, x'')$.

Soit $\{y_n\}$ une suite dénombrable de points de $\mathfrak{X}$, dense dans $\mathfrak{X}$: une telle suite existe puisque $\mathfrak{X}$ est séparable. Soit $\mathfrak{F}_1^*$ l'ensemble des fonctions d'ensemble du type :

$$\psi(e) = \varphi(e; y_j) - \varphi(e; y_k),$$

où y_j et y_k sont deux points quelconques de la suite $\{y_n\}$. $\mathfrak{F}_1^*$ est dénombrable et $\mathfrak{F}_1^* \subset \mathfrak{F}^*$.

Soit maintenant $\mathfrak{E}'$, le plus petit sous-espace vectoriel fermé de $\mathfrak{F}^*$ qui contient $\mathfrak{F}_1^*$: $\mathfrak{E}'$ est un sous-espace de Banach *séparable* puisque $\mathfrak{F}_1^*$ est dénombrable.

Soit $P(e)$ une loi de probabilité sur $[\mathfrak{X}; \mathfrak{B}]$, telle que :

$$\int_{\mathfrak{X}} (x_0, x)\, dP(e) < +\infty, \tag{2.6}$$

où x_0 est un point fixe quelconque de $\mathfrak{X}$; la propriété (2.6), évidemment indé-

(2) Étant donné un élément a d'un espace de Banach $\mathfrak{A}$ et un élément a^* du dual $\mathfrak{A}^*$ de $\mathfrak{A}$, nous désignons par $< a^*, a >$ le nombre obtenu en appliquant à a la fonctionnelle linéaire a^*.

pendante de x_0, entraine d'après (2.1) que toute fonction $f(x) \in \mathcal{F}$ est absolument sommable-P. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions d'ensemble du type :

$$\varphi_0(e; z) = \varphi(e; z) - \mathrm{P}(e), \tag{2.7}$$

où z est un point fixe quelconque de $\mathfrak{X}$ (*cf.* § 1, Remarque *b*).

Nous allons montrer que :

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'. \tag{2.8}$$

1° Soit $\{z_h\}$ $(h = 1, 2, \ldots)$ une suite dénombrable arbitraire de points z_h, de $\mathfrak{X}$ appartenant à la suite $\{y_n\}$; à z_h attribuons une masse $m_h \geq 0$, avec :

$$\sum_h m_h = 1, \qquad \sum_{n'} (x_0, z_h)\, m_h < +\infty \tag{2.9}$$

et soit $\mu(e)$ la mesure correspondant à cette répartition de masses; la fonction d'ensemble

$$\gamma(e) = \varphi(e; z) - \mu(e),$$

en tant que définissant une fonctionnelle linéaire f^* sur $\mathcal{F}$ par la formule :

$$\langle f'', f \rangle = \int_{\mathfrak{X}} f(x)\, d\gamma(e)$$

est un élément de $\mathcal{E}'$; d'abord f^* est une fonctionnelle linéaire continue d'après (2.9), on voit même que :

$$\| f^* \| \leq (x_0, z) + \sum_h (x_0, z_h)\, m_h, \tag{2.10}$$

quel que soit $x_0 \in \mathfrak{X}$.

Supposons pour commencer que z est un point de la suite $\{y_n\}$; posons :

$$\psi_h(e) = m_h[\varphi(e; z) - \varphi(e; z_h)],$$

$\psi_h(e)$ est un élément de $\mathcal{E}'$; donc :

$$\Psi_n(e) = \sum_{h=1}^{n} \psi_h(e)$$

aussi; or $\gamma(e)$ est limite forte dans $\mathcal{F}^*$ de $\Psi_n(e)$ lorsque $n \to +\infty$; en effet $\gamma(e) - \Psi_n(e)$ est une mesure du même type que $\gamma(e)$, la fonctionnelle linéaire f_n^* qu'elle définit satisfait d'après (2.10) à :

$$\| f_n^* \| \leq \left(1 - \sum_{h=1}^{n} m_h \right) (x_0, z) + \sum_{h>n} (x_0, z_h)\, m_h,$$

visiblement $\| f_n^* \| \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Donc $\gamma(e)$ est bien un élément de $\mathcal{E}'$. Étendons ce résultat au cas où z est un point quelconque; soit k tel que :

$$(z, y_k) < \varepsilon.$$

On peut écrire :

$$\gamma(e)=[\varphi(e;y_k)-\mu(e)]+[\varphi(e;z)-\varphi(e;y_k)];$$

$[\varphi(e;y_k)-\mu(e)]$ est un élément de $\mathscr{E}'$ d'après ce qui précède; $[\varphi(e;z)-\varphi(e;y_k)]$ est un élément de $\mathscr{F}^*$, dont la norme est inférieure à ε d'après (2.5); comme ε peut être pris arbitraire, $\gamma(e)$ est bien un élément de $\mathscr{E}'$.

2° En choisissant convenablement la suite $\{z_h\}$ et les masses m_h, la fonctionnelle linéaire définie par $\varphi_0(e;z)-\gamma(e)$ a une norme arbitrairement petite.

Soit $\Sigma_h(\rho)$ la sphère (ouverte pour fixer les idées) de centre y_h et de rayon $\rho>0$; $\mathscr{X}$ est la réunion des $\Sigma_h(\rho)$, quel que soit ρ d'ailleurs; posons :

$$\begin{aligned}
&S_1(\rho)=\Sigma_1(\rho),\\
&S_2(\rho)=\Sigma_2(\rho)\cap S_1(\rho),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&S_{h+1}(\rho)=\Sigma_{h+1}(\rho)-\Sigma_{h+1}(\rho)\cap\bigcup_{j=1}^{h}S_j(\rho).
\end{aligned}$$

Les ensembles $S_h(\rho)$ sont disjoints et leur somme est $\mathscr{X}$, ils sont mesurables-$\mathscr{B}$.

Prenons $z_h=y_h$, $m_h=P[S_h(e)]$; $\mu(e)$ et $\gamma(e)$ ayant les valeurs correspondantes, on a :

$$\varphi_0(e;z)-\gamma(e)=\mu(e)-P(e)$$

qui définit une fonctionnelle linéaire f^* par la formule :

$$\begin{aligned}
\langle f^*,f\rangle&=\int_{\mathscr{X}}f(x)\,d[\mu(e)-P(e)]=\int_{\mathscr{X}}f(x)\,d\mu(e)-\int_{\mathscr{X}}f(x)\,dP(e)\\
&=\int_{\mathscr{X}}f(x)\,d\mu(e)-\sum_h\int_{S_h(\rho)}f(x)\,dP\,(e).
\end{aligned}$$

Sur $S_h(\rho)$, on a

$$f(x)=f(z_h)+u_h(x),$$

avec

$$|u_h(x)|\leq M[f](z_h,x)\leq M[f]\rho.$$

D'où

$$\langle f^*,f\rangle=\int_{\mathscr{X}}f(x)\,d\mu(e)-\sum_h f(z_h)\,m_h-\sum_h\int_{S_h(\rho)}u_h(x)\,dP(e).$$

Or

$$\sum_h f(z_h)\,m_h=\int_{\mathscr{X}}f(x)\,d\mu(e),$$

$$\left|\sum_h\int_{S_h(\rho)}u_h(x)\,dP(e)\right|\leq M[f]\rho.$$

Donc

$$\|f^*\|\leq\rho$$

et comme ρ est arbitraire, le résultat annoncé est établi.

On en conclut que $\varphi_0(e;z)$ est un élément de $\mathscr{E}'$, c'est-à-dire que (2.8) est exact.

Remarquons que la norme de $\varphi_0(e;z)$ comme élément de $\mathscr{E}'$ (ou de $\mathscr{F}^*$) est au plus égale à :

$$\int_{\mathscr{X}} (z,x)\,d\mathrm{P}(e). \tag{2.11}$$

3. Convergence stochastique de $\mathrm{P}_n(e)$. — Soit $\{\mathrm{X}_j\}$ une suite d'éléments aléatoires prenant leurs valeurs dans $\mathscr{X}$, mutuellement indépendants, et obéissant tous à la même loi de probabilité $\mathrm{P}(e)$ ci-dessus, satistaisant donc à (2.6), quelconque par ailleurs; $\mathrm{P}_n(e)$ étant définie par (1.1),

$$\mathrm{P}_n(e)-\mathrm{P}(e)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}[\varphi(e;\mathrm{X}_j)-\mathrm{P}(e)]=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi_0(e;\mathrm{X}_j);$$

$\varphi_0(e;\mathrm{X}_j)$ est un élément aléatoire, que nous désignerons par Φ_j, prenant ses valeurs dans l'espace de Banach séparable $\mathscr{E}'$ construit au paragraphe 2; les Φ_j sont mutuellement indépendants et de même loi de probabilité; la moyenne arithmétique $\mathrm{P}_n(e)-\mathrm{P}(e)$ des Φ_j est aussi un élément de $\mathscr{E}'$; nous désignerons par

$$\|\varphi_0(e;x)\|,\quad \|\varphi_0(e;\mathrm{X}_j)\|,\quad \|\mathrm{P}_n(e)-\mathrm{P}(e)\|,\quad \ldots$$

les normes de $\varphi_0(e;x)$, $\varphi_0(e;\mathrm{X}_j)$, $\mathrm{P}_n(e)-\mathrm{P}(e)$, ... comme éléments de $\mathscr{E}'$. En vertu d'un théorème de E. Mourier (*cf.* E. Mourier [1]), on a :

Théorème 1. — *Presque-sûrement* $\|\mathrm{P}_n(e)-\mathrm{P}(e)\|$ *tend vers zéro lorsque* $n\to\infty$.

Le théorème de E. Mourier suppose toutefois que :

a. φ^* désignant une fonctionnelle linéaire continue quelconque sur $\mathscr{E}'$ si on l'applique à $\varphi_0(e;x)$ considéré comme élément de $\mathscr{E}'$, le nombre obtenu $\langle\varphi^*,\varphi_0(e;x)\rangle$ est une fonction du point x de $\mathscr{X}$: il faut que cette fonction de point soit mesurable-P.

b. Parce que $\mathscr{E}'$ est séparable, si *a* est satisfaite, $\|\varphi_0(e;x)\|$ est une fonction mesurable-P de x sur $\mathscr{X}$, il faut que :

$$\mathrm{E}[\,\|\varphi_0(e;\mathrm{X}_j)\|\,]<+\infty.$$

c. Si *a* et *b* sont satisfaites, $\varphi_0(e;\mathrm{X}_j)$ a une espérance mathématique $\overline{\varphi_0}=\mathrm{E}[\varphi_0(e;\mathrm{X}_j)]$; il faut que cette espérance mathématique soit l'élément nul 0 de $\mathscr{E}'$.

Nous allons montrer que sous les hypothèses déjà faites, les conditions *a*, *b* et *c* sont satisfaites :

a. $\langle \varphi^*, \varphi_0(e; x)\rangle$ est une fonction continue de x; on a en effet :

$$\begin{aligned}|\langle \varphi^*, \varphi_0(e; x')\rangle - \langle \varphi^*, \varphi_0(e; x'')\rangle| &= |\langle \varphi^*, \varphi_0(e; x') - \varphi_0(e; x'')\rangle| \\ &= |\langle \varphi^*, \varphi(e, x') - \varphi(e; x'')\rangle| \\ &\leq \|\varphi^*\| . \|\varphi(e; x') - \varphi(e; x'')\| \\ &\leq \|\varphi^*\| . (x', x'').\end{aligned}$$

Or toute fonction du point x continue sur $\mathfrak{X}$ est mesurable — P puisque $\mathcal{B}$ contient les sphères.

b. Quant à $\mathrm{E}[\|\varphi_0(e; \mathrm{X}_j)\|]$, sa valeur est :

$$\mathrm{E}[\|\varphi_0(e; \mathrm{X}_j)\|] = \int_{\mathfrak{X}} \|\varphi_0(e; x)\| \, d\mathrm{P}(\omega) \quad (^3)$$

qui est finie d'après (2.11).

c. Par définition de l'espérance mathématique, pour toute fonctionnelle φ^* on a :

$$\mathrm{E}[\langle \varphi^*, \varphi_0(e; \mathrm{X}_j)\rangle] = \langle \varphi^*, \overline{\varphi}_0\rangle. \tag{3.1}$$

Tout élément de $\mathcal{E}'$ est une fonctionnelle linéaire continue f^* sur $\mathcal{F}$; la forme $\langle f^*, f\rangle$, pour f^* variable dans $\mathcal{E}'$ et f fixe arbitraire dans $\mathcal{F}$, constitue une fonctionnelle linéaire continue sur $\mathcal{E}'$; appliquons (3.1) en prenant pour φ^* cette fonctionnelle définie par f; on trouve :

$$\begin{aligned}\langle \varphi^*, \overline{\varphi}_0\rangle &= \mathrm{E}\left[\int_{\mathfrak{X}} f(x) d\varphi_0(e; \mathrm{X}_j)\right] \\ &= \mathrm{E}\left[f(\mathrm{X}_j) - \int_{\mathfrak{X}} f(x)\, d\mathrm{P}(e)\right] \\ &= \int_{\mathfrak{X}} f(x)\, d\mathrm{P}(e) - \int_{\mathfrak{X}} f(x)\, d\mathrm{P}(e) = 0.\end{aligned}$$

De sorte que $\overline{\varphi}_0$ qui, en tant qu'élément de $\mathcal{E}'$, est une fonctionnelle linéaire continue sur $\mathcal{F}$ donne zéro quand on l'applique à un f quelconque de $\mathcal{F}$; c'est donc l'élément nul 0 de $\mathcal{E}'$.

Remarque. — Le théorème de E. Mourier utilisé ci-dessus suppose seulement que les X_j forment une suite strictement stationnaire; on peut donc l'appliquer sous cette hypothèse plus générale, il en résulte alors que presque-sûrement $\mathrm{P}_n(e) - \mathrm{P}(e)$ tend fortement vers un élément L de $\mathcal{E}'$, qui n'est pas forcément l'élément nul, mais peut être aléatoire d'espérance mathématique nulle. Toutefois ici et dans la suite de ce Mémoire nous nous limiterons pour simplifier au cas des X_j mutuellement indépendants, le lecteur fera sans peine d'éventuelles extensions au cas strictement stationnaire.

---

(3) Pour éviter une confusion avec le e de $\varphi_0(e; x)$, on a, dans cette formule, appelé ω l'ensemble dont P est une fonction.

En outre, un autre théorème de R. Fortet et E. Mourier [1], permet d'affirmer que :

THÉORÈME 2. — $\mathrm{E}[\,\|\,\mathrm{P}_n(e)-\mathrm{P}(e)\,\|\,]$ *tend vers zéro lorsque* $n\to+\infty$.

$\mathrm{P}_n(e)-\mathrm{P}(e)$ étant un élément de $\mathscr{E}'$, définit une fonctionnelle linéaire continue f^* sur $\mathscr{F}$ par la formule :

$$(3.2)\qquad \langle f^*, f\rangle=\int_{\mathscr{X}} f(x)\,d[\mathrm{P}_n(e)-\mathrm{P}(e)]=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(\mathrm{X}_j)-\mathrm{E}[f(\mathrm{X}_j)]$$

et l'on a

$$|\langle f^*, f\rangle|\leq\|f^*\|\,\mathrm{M}[f]=\|\,\mathrm{P}_n(e)-\mathrm{P}(e)\,\|\,\mathrm{M}[f],$$

il en résulte

THÉORÈME 3. — *Lorsque* $n\to+\infty$, *quel que soit le nombre positif fini* ρ, *presque-sûrement la moyenne arithmétique* $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(\mathrm{X}_j)$ *tend vers*

$$\int_{\mathscr{X}} f(x)\,d\mathrm{P}(e)=\mathrm{E}[f(\mathrm{X}_j)],$$

uniformément en f *pour* $f\in\mathscr{F}$ *avec* $\mathrm{M}[f]\leq\rho$.

En outre :

$$\mathrm{E}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(\mathrm{X}_j)-\mathrm{E}[f(\mathrm{X}_j)]\right|$$

tend vers zéro avec la même uniformité en f.

4. APPLICATION. — Il est naturel d'appliquer les résultats précédents au cas où $\mathscr{X}$ est la droite euclidienne réelle; la loi de probabilité $\mathrm{P}(e)$ est alors déterminée par sa fonction de répartition $\mathrm{F}(x)$, assujettie d'après (2.6) à :

$$(4.1)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,d\mathrm{F}(x)<+\infty.$$

$\mathrm{P}_n(e)$ est également déterminée par sa fonction de répartition $\mathrm{F}_n(x)$; le point essentiel est de trouver l'expression de la norme $\|\,\mathrm{P}_n(e)-\mathrm{P}(e)\,\|$ de $[\mathrm{P}_n(e)-\mathrm{P}(e)]$, comme élément de $\mathscr{F}^*$, en fonction de $\mathrm{F}(x)$ et $\mathrm{F}_n(x)$. Plus généralement, soit $\mathrm{G}(x)$ une fonction de répartition telle que :

$$(4.2)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,d\,\mathrm{G}(x)<+\infty$$

et quelconque par ailleurs; $\mathrm{G}(x)-\mathrm{F}(x)$ constitue un élément f^* de $\mathscr{F}^*$ par la formule :

$$(4.3)\qquad \langle f^*, f\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,d[\mathrm{G}(x)-\mathrm{F}(x)]\qquad (f\in\mathscr{F});$$

évaluons $\|f^*\|$ à partir de $\mathrm{F}(x)$ et $\mathrm{G}(x)$.

1° Prenons pour $f \in \mathcal{F}$ la fonction absolument continue dont la dérivée (par rapport à la mesure-L) $f'(x)$ vaut :

$$f'(x) = \varepsilon M \quad \text{si} \quad -\alpha \leq x \leq \beta \quad \begin{cases} (M > 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0); \\ \varepsilon = +1 \quad \text{si} \quad G(x) - F(x) \geq 0], \\ \varepsilon = -1 \quad \text{si} \quad G(x) - F(x) < 0]; \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \qquad \text{si} \quad x < -\alpha \quad \text{ou} \quad x > \beta$$

et supposons que $-\alpha$ et β sont des points de continuité pour $[G(x) - F(x)]$. On a :

$$\langle f^*, f \rangle = \lim_{a,b \to +\infty} \int_{-a}^{b} f(x)\, d[G(x) - F(x)]$$

[$-a$ et b points de continuité de $G(x) - F(x)$] ; d'où :

$$\langle f^*, f \rangle = \lim_{a,b \to +\infty} \left\{ |f(x)[G(x) - F(x)]|_{-a}^{b} - \int_{-a}^{b} [G(x) - F(x)] f'(x)\, dx \right\}$$

$$= -M \int_{-\alpha}^{\beta} |G(x) - F(x)|\, dx.$$

Il en résulte que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |G(x) - F(x)|\, dx < +\infty \tag{4.4}$$

et que

$$\|f^*\| \geq \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x) - F(x)|\, dx. \tag{4.5}$$

2° Si f est un élément quelconque de $\mathcal{F}$, $-a$ et b étant des points de continuité de $[G(x) - F(x)]$, on a :

$$\langle f^*, f \rangle = \lim_{a,b \to +\infty} \int_{-a}^{+b} f(x)\, d[G(x) - F(x)]$$

$$= \lim_{a,b \to +\infty} \{ |f(x)[G(x) - F(x)]|_{-a}^{b} - \int_{-a}^{b} [G(x) - F(x)]\, df \}.$$

Or l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} [G(x) - F(x)]\, df$ est absolument convergente, avec

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} [G(x) - F(x)]\, df \right| \leq M[f] \int_{-\infty}^{+\infty} [G(x) - F(x)]\, dx.$$

Donc la limite

$$\lim_{a,b \to +\infty} \{ |f(x)[G(x) - F(x)]|_{-a}^{b} \} = \lim_{-a,b \to +\infty} \{ f(b)[G(b) - F(b)] - f(-a)[G(-a) - F(-a)] \}$$

existe, quelle que soit la façon dont $-a$ et b tendent vers $+\infty$; ceci d'ailleurs quelle que soit $f \in \mathcal{F}$; prenons alors :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leq 0, \\ x & \text{pour } x > 0. \end{cases}$$

On en déduit que la limite :

$$\lim_{|x| \to +\infty} |x[G(x) - F(x)]|$$

existe ; donc elle vaut zéro, sans quoi (4.4) ne pourrait avoir lieu. Il en résulte que pour tout $f \in \mathcal{F}$, on a :

$$\langle f^*, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, d[G(x) - F(x)] = -\int_{-\infty}^{+\infty} [G(x) - F(x)]\, df(x),$$

donc :

$$\|f^*\| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x) - F(x)|\, dx; \tag{4.6}$$

(4.5) et (4.6) prouvent que :

$$\|f^*\| = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x) - F(x)|\, dx; \tag{4.7}$$

en d'autres termes, $\|f^*\|$ est l'aire arithmétique comprise entre le graphique de $F(x)$ et celui de $G(x)$; (4.7) résout le problème posé et nous en tirons en outre que :

Presque-sûrement :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_n(x) - F(x)|\, dx = 0$$

et que

$$\lim_{n \to +\infty} E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} |F_n(x) - F(x)|\, dx \right] = 0.$$

Ainsi les théorèmes généraux du paragraphe 3 fournissent des théorèmes nouveaux même dans le cas si connu de la droite réelle.

5. Variante de la méthode précédente. — La construction de $\mathcal{E}'$ ne vaut que si $P(e)$ satisfait à la condition (2.6) ; une modification convenable permet d'éviter cette restriction.

Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{F}$ qui satisfont à la condition :

$$\text{b. s. } |f(x)| = N[f] < +\infty$$
$$x \in \mathcal{X}$$

En prenant comme norme dans $\mathcal{G}$ la quantité :

$$\|f\| = M[f] + N[f],$$

$\mathcal{G}$ est un espace de Banach; notons que deux fonctions de $\mathcal{G}$ qui diffèrent d'une constante ne sont pas identiques. Soit $\mathcal{G}^*$ le dual de $\mathcal{G}$. Toute fonction d'ensemble $m(e)$ sur $\mathcal{B}$, complètement additive et bornée, constitue un élément f^* de $\mathcal{G}^*$ par la formule :

$$\langle f^*, f\rangle = \int f(x)\, dm(e)$$

et l'on voit que :

$$\|f^*\| \leq |m|(\mathfrak{X})$$

en désignant par $|m|(e)$ la variation totale (¹) de $m(e)$. En particulier si $P(e)$ est une loi de probabilité quelconque sur $\mathcal{B}$, $P(e)$ est un élément de $\mathcal{G}^*$; tout $\varphi(e; x)$ est un élément de $\mathcal{G}^*$. Soit $\mathcal{E}'$ le plus petit sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{G}^*$ contenant tous les $\varphi(e; y_n)$; $\mathcal{E}'$ est séparable; on vérifie immédiatement que tout $\varphi(e; x)$ appartient à $\mathcal{E}'$, ainsi que toute mesure $m(e)$ du type :

$$m(e) = \sum_{k=1}^{n} m_k \varphi(e; z_k),$$

avec

$$m_k \geq 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} m_k \leq 1$$

les z_k appartenant à la suite $\{y_h\}$; il en est de même pour une mesure $m(e)$ du type :

$$m(e) = \sum_{k=1}^{+\infty} m_k \varphi(e; z_k),$$

avec la même condition pour les z_k et

$$m_k \geq 0, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} m_k \leq 1,$$

car la différence :

$$\mu_n(e) = m(e) - \sum_{k=1}^{n} m_k \varphi(e; z_k)$$

a sa variation totale sur $\mathfrak{X}$ égale à :

$$|\mu_n|(\mathfrak{X}) = \sum_{k>n} m_k,$$

quantité infiniment petite si $n \to +\infty$.

(¹) *Cf.* A. Blanc-Lapierre et R. Fortet [1], chap. XV.

$P(e)$ fait partie de $\mathscr{E}'$: reprenons les ensembles $S_n(\varrho)$ de la page 272; soit $m(e)$ la mesure constituée en affectant les centres x_n des sphères $\Sigma_n(\varrho)$ des masses $m_n = P[S_n(\varrho)]$; le calcul de la page 272 montre, en désignant par f^* l'élément de $\mathscr{G}^*$ constitué par $m(e) - P(e)$, que :

$$|\langle f^*, f\rangle| \leq M[f]\varrho \qquad (f \in \mathscr{G}),$$

$P(e) \in \mathscr{E}'$ en résulte immédiatement.

Il s'ensuit que $\varphi(e; X_j)$ est un élément aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathscr{E}'$ et satisfaisant (*mutatis mutandis* aux conditions a, b, c) de la page 273 :

a. Si φ^* est une fonctionnelle linéaire continue quelconque sur $\mathscr{E}'$, $\langle \varphi^*, \varphi(e; x)\rangle$ est une fonction de x mesurable — P ;

b. $E[\|\varphi(e; X_j)\|] < +\infty$;

c. $\varphi(e; X_j)$ a une espérance mathématique qui n'est autre que $P(e)$.

Les mêmes théorèmes de E. Mourier permettent d'énoncer :

Théorème 4. — $\|P_n(e) - P(e)\|$ *désignant la norme de* $[P_n(e) - P(e)]$ *comme élément de* $\mathscr{G}^*$, *lorsque* $n \to +\infty$:

1° *presque-sûrement,* $\|P_n(e) - P(e)\|$ *tend vers zéro;*

2° $E[\|P_n(e) - P(e)\|]$ *tend vers zéro;*

3° *quel que soit le nombre positif* ϱ, *uniformément en* f *pour* $f \in \mathscr{G}$, *avec* $M[f] + N[f] \leq \varrho$, *presque-sûrement la moyenne arithmétique* $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(X_j)$ *tend vers*

$$\int_{\mathscr{X}} f(x)\, dP(e) = E[f(X_j)]$$

et (avec la même uniformité en f*)*

$$E\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(X_j) - E[f(X_j)]\right| \to 0.$$

6° *Application.* — Comme espace $\mathscr{X}$ prenons le plan euclidien ; on peut supposer ce plan orienté, de sorte que les deux demi-plans que détermine dans $\mathscr{X}$ un axe arbitraire Δ peuvent être distingués l'un de l'autre, par exemple l'un étant qualifié de demi-plan à gauche (de Δ) et l'autre de demi-plan à droite ; nous désignerons par Δ^- le demi-plan à gauche, étant entendu pour fixer les idées que Δ ne fait pas partie de Δ^-.

Soient $\Delta_{-\varepsilon}$ et $\Delta_{+\varepsilon}$ les deux parallèles à Δ, situées à une distance ε ($\varepsilon > 0$) de Δ, respectivement à gauche et à droite.

Soit $P(e)$ une loi de probabilité sur le plan $\mathscr{X}$, absolument continue par rapport à la mesure de Borel ; nous allons étudier la convergence de $P_n(\Delta^-)$ vers $P(\Delta^-)$.

Soient :

$f(x)$ la fonction qui vaut 1 si $x \in \Delta^-$, 0 si $x \notin \Delta^-$;

$f_-(x)$ la fonction qui vaut 1 si $x \in \Delta^-_{-\varepsilon}$, 0 si $x \notin \Delta^-$, $\frac{\delta(x)}{\varepsilon}$, pour $x \notin \Delta^-_{-\varepsilon}$ et $\in \Delta^-$, $\delta(x)$, désignant la distance de x à Δ ;

$f_+(x)$ la fonction qui vaut 1 si $x \in \Delta^-$, 0 si $x \notin \Delta^-_{+\varepsilon}$, $1 - \frac{\delta(x)}{\varepsilon}$ pour $x \notin \Delta^-$ et $\in \Delta^-_{+\varepsilon}$ en désignant encore par $\delta(x)$ la distance de x à Δ.

On a :

$$f_-(x) \leq f(x) \leq f_+(x) \quad (x \in \mathfrak{X}); \tag{6.1}$$

$f_-(x)$ et $f_+(x)$ appartiennent à $\mathcal{G}$ et sont de même norme :

$$\|f_-\| = \|f_+\| = 1 + \frac{1}{\varepsilon}.$$

$P_n(\Delta^-)$ a pour valeur :

$$P_n(\Delta^-) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(X_j).$$

Posons

$$Q_n^+ = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f_+(X_j), \qquad Q_n^- = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f_-(X_j);$$

d'après (6.1), il vient ;

$$Q_n^- \leq P_n(\Delta^-) \leq Q_n^+. \tag{6.2}$$

Or :

$$P_n(\Delta^-) - P(\Delta^-) = [P_n(\Delta^-) - Q_n^-] + [Q_n^+ - P(\Delta^-_{+\varepsilon})] + [P(\Delta^-_{+\varepsilon}) - P(\Delta^-)].$$

D'après (6.2) :

$$P_n(\Delta^-) - Q_n^+ \leq Q_n^+ - Q_n^- \leq Q_n^+ - P(\Delta^-_{+\varepsilon}) + P(\Delta^-_{+\varepsilon}) - P(\Delta^-_{-\varepsilon}) + P(\Delta^-_{-\varepsilon}) - Q_n^-,$$

de sorte que :

$$|P_n(\Delta^-) - P(\Delta^-)| \leq 2|P(\Delta^-_{+\varepsilon}) - P(\Delta^-_{-\varepsilon})| + 2|Q_n^+ - P(\Delta^-_{+\varepsilon})| + |Q_n^- - P(\Delta^-_{-\varepsilon})|. \tag{6.3}$$

De plus on a visiblement :

$$P(\Delta^-) \leq E[f_+(X_j)] \leq P(\Delta^-_{+\varepsilon}),$$
$$P(\Delta^-_{-\varepsilon}) \leq E[f_-(X_j)] \leq P(\Delta^-).$$

De (6.3) on tire alors :

$$|P_n(\Delta^-) - P(\Delta^-)| \leq 5|P(\Delta^-_{+\varepsilon}) - P(\Delta^-_{-\varepsilon})| + 2|Q_n^+ - E[f_+(X_j)]| + |Q_n^- - E[f_-(X_j)]|. \tag{6.4}$$

Prenons ε assez petit pour que, quel que soit Δ, on ait :

$$P(\Delta^-_{+\varepsilon}) - P(\Delta^-_{-\varepsilon}) < \eta$$

(η, nombre positif arbitraire), ce qui est possible puisque $P(e)$ est absolument continue; ε étant ainsi choisi, d'après le théorème 4, 3°), presque-sûrement,

$$|Q_n^- - E[f_+(X_j)]| \quad \text{et} \quad |Q_n^- - E[f_-(X_j)]|$$

tendent vers zéro, uniformément par rapport à Δ puisque, lorsque ε est fixé, les normes $\|f_+\|$ et $\|f_-\|$ ne dépendent pas de Δ. On en conclut que :

Théorème 5. — *Lorsque* $n \to +\infty$, *presque-sûrement* $P_n(\Delta^-)$ *tend vers* $P(\Delta^-)$ *uniformément par rapport à* Δ.

Un résultat analogue a été obtenu (mais non encore publié) par J. Wolfowitz, qui a prouvé que $P_n(\Delta^-)$ tend presque-sûrement vers $P(\Delta^-)$ uniformément par rapport à Δ, mais en introduisant une hypothèse supplémentaire inutile. Ce théorème peut s'étendre dans diverses directions :

1° La restriction que $P(e)$ est absolument continue peut évidemment être sinon supprimée, du moins élargie;

2° On peut obtenir un résultat analogue pour d'autres familles de sous-ensembles du plan que la famille des demi-plans (par exemple, la famille des sous-ensembles déduits d'un sous-ensemble donné par un déplacement arbitraire);

3° On peut évidemment appliquer le théorème 5, *mutatis mutandis*, à n'importe quel espace euclidien $\mathfrak{X}$ à un nombre fini quelconque de dimensions. Prenons en particulier le cas où $\mathfrak{X}$ est la droite euclidienne : le rôle de Δ est alors joué par un nombre x arbitraire, $P(e)$ et $P_n(e)$ sont caractérisées par leurs fonctions de répartition $F(x)$ et $F_n(x)$; $F(x)$ étant absolument continue, on obtient que :

Presque-sûrement lorsque $n \to +\infty$, $|F_n(x) - F(x)|$ tend vers zéro, uniformément en x; ce qui est le théorème classique de Glivenko-Cantelli; plus précisément c'est le résultat de Glivenko : on passe sans difficulté au théorème général de Glivenko-Cantelli en levant la restriction que $F(x)$ est absolument continue.

Remarque. — Par rapport à la méthode du paragraphe 2 reposant sur la considération de la classe $\mathcal{F}$ de fonctions f, la variante du paragraphe 5 a consisté à *restreindre* la classe des fonctions f, réduite à l'espace $\mathcal{G}$ qui est un sous-espace de $\mathcal{F}$, de manière à pouvoir corrélativement élargir la classe des $P(e)$: cet élargissement s'est marqué par la suppression de la condition (2.6).

Mais il peut, au contraire, être avantageux de disposer de résultats concernant des $P(e)$ plus particulières, mais s'appliquant à des f plus générales : par exemple dans le cas où $\mathfrak{X}$ est la droite $x'Ox$, la considération des moments d'ordre supérieur au premier oblige à introduire des fonctions f du type : $f(x) = |x|^\alpha$, avec $\alpha > 1$, qui n'appartiennent pas à $\mathcal{F}$. Il est facile d'adapter la

méthode et d'élargir $\mathcal{F}$ de façon à englober de telles f, par exemple de la façon suivante :

Appelons $\mathcal{F}_{(\alpha)}$, $\alpha > 1$, quelconque, l'espace des fonctions $f(x)$ qui satisfont aux conditions suivantes, où x_0 désigne un point fixe arbitraire de $\mathfrak{X}$:

$$a. \quad \text{b. s.} \underset{\substack{(x_0,x')\leq r \\ (x_0,x'')\leq r}}{} \frac{|f(x')-f(x'')|}{(x',x'')} = \mathrm{M}(r) < +\infty ;$$

$$b. \quad \text{b. s.} \min_{r} \left[\mathrm{M}(r), \frac{\mathrm{M}(r)}{r^{\alpha-1}} \right] = \mathrm{M}_{(\alpha)}[f] < +\infty .$$

On constate que $\mathcal{F}_{(\alpha)}$, si l'on y prend $\mathrm{M}_{(\alpha)}[f]$ comme norme de f, est un espace de Banach; les fonctions f qui appartiennent à $\mathcal{F}_{(\alpha)}$ ne dépendent pas de x_0, par contre la norme $\mathrm{M}_{(\alpha)}[f]$ dépend de x_0. Comme pour $\mathcal{F}$, deux fonctions f et g de $\mathcal{F}_{(\alpha)}$ qui diffèrent d'une constante doivent être considérées comme identiques.

Supposons maintenant que $\mathrm{P}(e)$ soit telle que :

$$\int_{\mathfrak{X}} (x_0, x)^{\alpha} \, d\mathrm{P}(e) < +\infty, \tag{6.5}$$

condition d'ailleurs indépendante de x_0, on vérifie que les raisonnements du paragraphe 2, (6.5) jouant le rôle de (2.6), peuvent être reproduits *mutatis mutandis*, ce qui conduit à des énoncés analogues à ceux du paragraphe 3, que le lecteur formulera lui-même sans peine.

SECTION II.

7. Un exemple de construction directe de $\mathcal{E}'$. — Il y a des cas où il est possible de construire $\mathcal{E}'$ directement. A titre d'exemple, considérons le cas où $\mathfrak{X}$ est la droite et où la fonction de répartition $\mathrm{F}(x)$ caractérisant $\mathrm{P}(e)$ est continue; le changement de variable :

$$u = \mathrm{F}(x)$$

permet alors, comme il est classique, de se ramener au cas où les X_j sont des variables aléatoires de loi uniforme sur le segment (0, 1); plaçons-nous dans ces conditions. Soit $\mathcal{H}$ l'espace, de Hilbert et séparable, des fonctions $f(u)$ de carré sommable sur (0, 1) :

$$\int_0^1 |f(u)|^2 \, du < +\infty .$$

Toute fonction de répartition $\mathrm{F}(u)$ sur (0, 1), étant monotone, bornée, appartient à $\mathcal{H}$: en particulier la fonction de répartition $\mathrm{F}(u; \mathrm{X}_j)$ caractérisant $\varphi(e; \mathrm{X}_j)$, celle $\mathrm{F}_n(u)$ caractérisant $\mathrm{P}_n(e)$ sont des éléments aléatoires prenant leurs valeurs dans $\mathcal{H}$: on peut donc adopter $\mathcal{H}$ comme espace $\mathcal{E}'$.

On vérifie que l'élément aléatoire $F(u; X_j)$ satisfait aux conditions a, b, c (*cf.* p. 279) voulues pour que les théorèmes de E. Mourier [1] et R. Fortet et E. Mourier [1] utilisés précédemment soient applicables; en particulier, l'espérance mathématique de $F(u; X_j)$ est la fonction $f(u) = u$ sur $(0, 1)$; de plus :

$$\mathrm{E}[\|\mathrm{F}(u; X_j)\|^2] < +\infty. \tag{7.1}$$

Il en résulte :

THÉORÈME 6. — *Lorsque* $n \to +\infty$:

1° *Presque-sûrement,* $\int_0^1 |F_n(u) - u|^2 du \to 0$;

2° $\mathrm{E}\left[\int_0^1 |F_n(u) - u|^2 du\right] \to 0$;

3° *Quel que soit le nombre positif* ρ, *uniformément pour* $f(u)$ *telle que :* $\int_0^1 |f(u)|^2 du \leq \rho$, *presque-sûrement la moyenne arithmétique* $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(X_j)$ *tend vers* $\int_0^1 f(u)\,du$ *et (avec la même uniformité en* f*) :*

$$\mathrm{E}\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(X_j) - \int_0^1 f(u)\,du\right|^2\right] \to 0.$$

On peut d'ailleurs compléter ces résultats en utilisant le fait que $\mathscr{E}' = \mathscr{H}$ n'est pas un espace de Banach séparable quelconque, mais un espace de Hilbert.

Dans ces conditions, et compte tenu de (7.1), il résulte d'un théorème de E. Mourier [1] que, lorsque $n \to \infty$, la loi de probabilité de :

$$\sqrt{n}\,[F_n(u) - u]$$

(comme élément aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathscr{H}$) tend vers une loi laplacienne qu'on peut définir par sa caractéristique; comme une fonctionnelle linéaire continue quelconque sur $\mathscr{H}$ se définit par une fonction arbitraire $f(u)$ de carré sommable sur $(0, 1)$, cette caractéristique peut se représenter par :

$$\varphi(f) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{E}\left\{\left[\int_0^1 f(u)[\mathrm{F}(u; X_j) - u]\,du\right]^2\right\}\right\}. \tag{7.2}$$

Désignons par Z un élément aléatoire laplacien prenant ses valeurs dans $\mathscr{H}$ et obéissant à la loi de caractéristique (7.2). Un théorème de R Fortet et E. Mourier [2] nous indique alors que, lorsque $n \to +\infty$, la fonction de répartition de :

$$\Omega_n^2 = n\,\|F_n(u) - u\|^2 = n\int_0^1 |F_n(u) - u|^2\,du$$

tend vers la fonction de répartition de $\|Z\|^2$.

Or, un second théorème de R. Fortet et E. Mourier [2] nous permet de déterminer la fonction de répartition de $\|Z\|^2$; posons :

$$\Phi(f, g) = \mathrm{E}\left\{ \int_0^1 \int_0^1 f(u)\, g(v) |\mathrm{F}(u; X_j) - u| \, |\mathrm{F}(v; X_j) - v| \, du\, dv \right\}.$$

$\Phi(f, g)$ est une forme bilinéaire par rapport aux deux éléments f et g de $\mathfrak{H}$; c'est une forme complètement continue et définie positive, possédant un déterminant de Fredholm $\mathrm{D}(\lambda)$, qui n'est autre que le déterminant de Fredholm classique de l'opération linéaire intégrale symétrique définie positive et complètement continue :

$$g(v) = \int \mathrm{E}\{[\mathrm{F}(u; X_j) - u][\mathrm{F}(v; X_j) - v]\} f(u)\, du. \tag{7.3}$$

On sait que la caractéristique $\varphi(r) = \mathrm{E}[e^{ir\|Z\|^2}]$ de $\|Z\|^2$ est égale à :

$$\varphi(r) = |\mathrm{D}(2ir)|^{-\frac{1}{2}}. \tag{7.4}$$

Un calcul simple montre que :

$$\mathrm{E}\{[\mathrm{F}(u; X_j) - u][\mathrm{F}(v; X_j) - v]\} = |\min(u, v) - uv|,$$

de sorte que (7.3) s'écrit :

$$g(v) = \int_0^1 [\min(u, v) - uv] f(u)\, du. \tag{7.5}$$

La détermination du déterminant de Fredholm $\mathrm{D}(\lambda)$ de (7.5) est classique (*cf.* M. Kac [1]); on trouve

$$\mathrm{D}(\lambda) = \frac{\mathrm{sh}(\sqrt{-\lambda})}{\sqrt{-\lambda}}$$

et, par suite,

$$\varphi(r) = \left| \frac{\mathrm{sh}(\sqrt{-2ir})}{\sqrt{-2ir}} \right|^{-\frac{1}{2}}, \tag{7.6}$$

de sorte que la fonction de répartition de Ω_n^2 tend vers celle de caractéristique (7.6), résultat indiqué pour la première fois par H. Cramer. Il est clair que l'on pourrait opérer de façon tout à fait semblable à partir, au lieu de $\mathfrak{H}$, de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}'$ des fonctions $f(u)$ de carré sommable sur $(0, 1)$, non plus par rapport à la mesure — B, mais par rapport à une mesure arbitraire; on retrouve alors très simplement les résultats de T. W. Anderson et D. A. Darling [1] qui sont une extension du résultat de Cramer.

Une autre extension consiste à traiter par la même méthode le cas où $\mathfrak{X}$ est un espace euclidien à un nombre fini quelconque s de dimensions : quel que soit s il est possible de caractériser $\mathrm{P}(e)$ et $\mathrm{P}_n(e)$ par des fonctions de répartition $\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ et $\mathrm{F}_n(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ à s variables : tout ce qui précède

peut être refait, y compris la détermination de la loi asymptotique de $n\|F_n - F\|^2$; mais on remarquera que, pour $P(e)$ et $P_n(e)$ données, $F(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, $F_n(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ dépendent des axes auxquels on rapporte $\mathfrak{X}$.

L'exemple qui a fait l'objet de ce paragraphe montre que lorsque $\mathcal{E}'$ est un espace de Hilbert, il devient possible d'adjoindre aux théorème du type de ceux obtenus à la section I, d'intéressants résultats, comme la loi asymptotique de Ω_n^2.

Nous exposerons dans un autre Mémoire comment on peut systématiquement rechercher un espace $\mathcal{E}'$ qui soit un espace de Hilbert.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] T. W. Anderson et D. A. Darling, *Asymptotic Theory of certain goodness of fit criteria based on stochastic Processes* (*Ann. Math. Stat.*, t. 23, n° 2, june 1952).

[1] A. Blanc-Lapierre et R. Fortet, *Théorie des fonctions aléatoires*, Masson et Cie édit., Paris, 1953.

[1] R. Fortet et E. Mourier, *Loi des grands nombres et théorie ergodique* (*C. R. Acad. Sci.*, 234, 1952, p. 699).

[2] R. Fortet et E. Mourier, *Résultats complémentaires sur les éléments aléatoires prenant leurs valeurs dans un espace de Banach* (à l'impression).

[1] M. Kac, *On some connections between probability theory and differential and integral equations* (Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1950, University of California Press).

[1] E. Mourier, *Éléments aléatoires dans un espace de Banach* (*Thèse de Doctorat*, Paris, 1952).

SUR

LES COURBES DÉFINIES

PAR

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DANS L'ESPACE A m DIMENSIONS

PAR M. TARO URA.

INTRODUCTION.

Les travaux de H. Poincaré sur les courbes définies par les équations différentielles ont ouvert une nouvelle porte d'accès aux études des équations différentielles, c'est-à-dire que, par là, on a commencé les recherches qualitatives des solutions de ces équations. Après lui, beaucoup de géomètres ont repris ses idées et les ont approfondies et étendues à divers points de vue.

Je me propose de même de traiter les courbes définies par les équations, sous des conditions plus faibles de continuité et sous des hypothèses plus générales sur le domaine de définition des équations, autant qu'il est possible sans perdre des caractères intéressants des solutions.

Ainsi, envisageant des équations dans un domaine de l'espace à m dimensions, je ne suppose ni que les deuxièmes membres des équations soient holomorphes, ni que les points singuliers soient isolés, ni *a fortiori* qu'ils soient de première espèce. Cependant, pour confirmer l'existence et l'unicité des solutions, je suppose que les dérivées partielles du premier ordre des deuxièmes membres sont continues, et pour une autre raison, que le domaine de définition des équations est borné.

Au chapitre I, nous donnons les hypothèses précises, expliquons des notations spéciales et démontrons des théorèmes fondamentaux de la théorie des

équations différentielles, les modifiant sous une forme convenable pour les chapitres suivants.

Outre les hypothèses, le paragraphe I est consacré à la démonstration de l'existence et à l'énoncé de l'unicité des solutions d'après les théorèmes de Cauchy et de Lipschitz, en portant l'attention sur l'intervalle de définition des solutions. Nous étudions au paragraphe II le prolongement primitif d'une solution et la continuité des solutions par rapport aux points initiaux.

Au paragraphe III, nous considérons les solutions périodiques et expliquons la notion de caractéristiques, d'après la terminologie de Poincaré, et la relation entre les caractéristiques et les arcs ou les courbes de Jordan représentés par les solutions. Enfin nous donnons au paragraphe IV la définition de surfaces sans contact dans l'espace, d'abord en un point, puis dans un sous-domaine du domaine de définition des équations. Cette dernière définition semble un peu curieuse, mais elle aura une commodité.

Au chapitre II, nous envisageons les points limites d'une caractéristique et les régions invariantes.

L'objet du paragraphe I est la définition des points limites d'une caractéristique et la démonstration des théorèmes fondamentaux, sans supposer ni que l'ensemble des points limites soit disjoint d'avec la frontière du domaine de définition, ni qu'il soit contenu dans l'ensemble des points singuliers ou dans l'ensemble des points réguliers. Contrairement au paragraphe I, nous supposons au paragraphe II que les points limites sont contenus dans le domaine de définition ; nous démontrons quelques théorèmes, surtout en vue de traiter les régions invariantes.

Au paragraphe III, définissant les régions invariantes, nous voyons des propriétés fondamentales, surtout leurs relations avec les points limites des caractéristiques. On remarque que nous ne supposons pas qu'une région invariante soit fermée.

Le chapitre III traite de notions nouvelles de prolongement. Nous définissons au paragraphe I un ensemble D relatif à une caractéristique ou à un point de la frontière du domaine de définition des équations. Nous appelons un point de l'ensemble D prolongement indirect d'une caractéristique ou d'un point de la frontière du domaine de définition des équations. Cette notion est une extension de celle de Poincaré de prolongement d'une caractéristique aboutissant à un col. Le paragraphe II est consacré à une extension de la notion de prolongement indirect, par la définition d'un autre ensemble E, à titre d'introduction à une troisième extension. Cette dernière extension nous amène à obtenir un ensemble F fermé, connexe, et à un certain point de vue, réversible.

Nous traitons au chapitre IV le problème de stabilité. Au début du paragraphe I, l'emploi de l'ensemble des points limites nous permet d'introduire la notion classique de stabilité (de Liapounoff) et de l'étendre à une région invariante fermée. En outre, nous étendons la notion de centres au sens de

Bendixson au cas général d'un nombre de dimensions arbitraire et montrons la relation entre la notion de centres et celle de stabilité. Le paragraphe II introduit une notion nouvelle de stabilité plus forte que celle du paragraphe I. Cette définition est établie à l'aide de l'ensemble E du chapitre III et nous exprimons des propriétés d'une région invariante fortement stable avec les ensembles E et F.

Au chapitre V, nous revenons à l'étude des points limites d'une caractéristique. Nous les considérons dans le domaine de l'espace R_m au paragraphe I, et dans celui du plan au paragraphe II. Mais laissant de côté les théorèmes classiques, nous étudions le cas où les points limites d'une caractéristique contiennent en même temps des points réguliers, des points singuliers, et des points de la frontière du domaine de définition des équations.

En terminant cette introduction, l'auteur se fait un honneur d'exprimer ses remercîments les plus vifs à MM. Chazy, Denjoy et Kunugi, pour l'intérêt qu'ils lui ont témoigné et pour les conseils qu'ils lui ont donnés au cours de la préparation de ce Mémoire.

CHAPITRE I.

Théorèmes fondamentaux.

I. — Hypothèses, existence et unicité des solutions.

1. Dans ce Mémoire, nous envisageons toujours les équations différentielles

$$(1)\qquad \frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_m)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \ldots, x_m)} = \ldots = \frac{dx_m}{X_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)}$$

dans un domaine borné A *de l'espace* R_m *à m dimensions*, dont les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_m$ d'un point sont réelles. Nous supposons toujours que *les m fonctions* $X_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *dans les équations* (1) *sont continues partout dans le domaine* A, *ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre par rapport aux variables* $x_1, x_1, \ldots, x_m$.

Nous conviendrons de désigner le point $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ par P et le vecteur $\overrightarrow{(x_1, x_2, \ldots, x_m)}$ par $\vec{P}$, ce qui nous fait écrire les équations (1) sous la forme

$$(2)\qquad \frac{dx_1}{X_1(P)} = \frac{dx_2}{X_2(P)} = \ldots = \frac{dx_m}{X_m(P)} = dt = -\,ds,$$

introduisant deux paramètres réels t et s, dont le premier est habituellement appelé le temps, ou bien, sous la forme

$$(3)\qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i(P) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

et

$$(3\,bis)\qquad \frac{dx_i}{ds} = -\,X_i(P) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

Remarquons que, par hypothèse, les deuxièmes membres des équations (3) et (3 *bis*) sont des fonctions des variables dépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_m$, mais *elles ne contiennent pas les variables indépendantes t ou s*. On dit quelquefois que les équations (3) définissent un mouvement dans le domaine A.

Pour éviter de répéter l'exposition des notations, nous fixons une fois pour toutes quelques correspondances entre les deux sortes de notations qui représenteront un point :

1° le point P est le point de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_m$;
2° le point P_i est le point $(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_m^i)$;
3° le point Q est le point $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$;
4° le point Q_i est le point $(y_1^i, y_2^i, \ldots, y_m^i)$; etc.

Dans la suite, quand on considère un point, par exemple Q_0, on doit savoir que ses coordonnées sont y_i^0 $(i = 1, 2, \ldots, m)$, même si nous ne précisons pas cette notation y_i^0, et inversement.

De plus pour simplifier l'exposition, nous définissons la distance de deux points quelconques P et Q comme suit :

$$\text{dist}\,(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|.$$

Suivant cette définition, le δ-voisinage d'un point P signifie l'ensemble des points Q tels que l'on ait

$$\text{dist}\,(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i| < \delta.$$

Cette distance diffère de la distance euclidienne, mais elle donne, bien entendu, la topologie équivalente à celle de l'espace euclidien.

2. Nous désignons par S l'ensemble des points P du domaine A qui satisfont à la fois aux équations

$$\mathrm{X}_1(\mathrm{P}) = 0, \ \mathrm{X}_2(\mathrm{P}) = 0, \quad \ldots; \quad \mathrm{X}_m(\mathrm{P}) = 0;$$

nous traduisons ce fait par la formule

$$\mathrm{S} = [\mathrm{P} : \mathrm{X}_1(\mathrm{P}) = 0, \mathrm{X}_2(\mathrm{P}) = 0, \ldots, \mathrm{X}_m(\mathrm{P}) = 0, \ \mathrm{P} \in \mathrm{A}].$$

On appelle un point P de l'ensemble S point singulier des équations.

Soit R le complément de l'ensemble S par rapport au domaine A ; nous appelons un point de l'ensemble R point régulier des équations ; par définition, si P est un point régulier, $\mathrm{P} \in \mathrm{R}$, il y a au moins un X_i qui ne s'annule pas au point P. Nous remarquons d'ailleurs que *l'ensemble* R *est ouvert dans* A *ainsi que dans* R_m, mais que l'ensemble S n'est pas toujours fermé dans R_m, bien qu'il le soit toujours dans le domaine A, puisque A est ouvert ; cependant *la réunion de*

l'ensemble S *et de la frontière* Ȧ *du domaine* A *est fermée dans* R_m *et en conséquence compacte, puisque, par l'hypothèse, le domaine* A *est borné.*

3. Si m fonctions $x_1(t)$, $x_2(t), \ldots,$ $x_m(t)$ définies dans l'intervalle $-\alpha < t < \beta$, α, β étant deux nombres quelconques positifs ou infinis, satisfont aux équations (3), c'est-à-dire, si l'on a

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = X_i(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

pour toute valeur de t de l'intervalle $-\alpha < t < \beta$ et que l'on a $x_i(0) = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, on dit que le système des m fonctions $x_1(t)$, $x_2(t), \ldots, x_m(t)$ est une solution des équations (3) définie dans l'intervalle $-\alpha < t < \beta$, passant par le point P à l'époque $t = 0$. Nous désignons cette solution par $P(t)$ pour $-\alpha < t < \beta$. Dans ce cas il est aisé de voir que $P(-s)$ est une solution des équations (3 *bis*) définie dans l'intervalle $-\beta < s < \alpha$, passant par le même point P à l'époque $s = 0$, et réciproquement.

A cause de cette relation entre les équations (3) et (3 *bis*), si un théorème sur une propriété concernant $t > 0$ des solutions des équations (3) est établi, le même théorème subsiste pour la même propriété concernant $s < 0$ des solutions des équations (3 *bis*). Donc, si une hypothèse sur $t > 0$ des équations (3) entraîne une conclusion sur $t > 0$ (ou sur $t < 0$) des solutions des équations (3), sous la même hypothèse sur $t < 0$ des équations (3), la même conclusion sur $t < 0$ (ou $t > 0$ respectivement) subsiste automatiquement. Profitant de ce caractère, même si des théorèmes ou des définitions s'appliquent aux deux sens de t, nous ne les démontrons et quelquefois ne les énonçons que pour le sens positif.

On désigne par $P(t_1)$ le point de la solution $P(t)$ correspondant à l'époque $t = t_1$, si t_1 est contenu dans l'intervalle de définition de $P(t)$.

4. Soit P_0 un point quelconque du domaine A ; pour un nombre positif assez petit ρ, l'ensemble fermé

$$\overline{U} = [Q : |y_i - x_i^0| \leq \rho, \; i = 1, 2, \ldots, m]$$

est contenu dans A.

Les fonctions X_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ étant continues dans A et ne contenant pas la variable indépendante t, il existe, d'après le théorème de Cauchy, une solution $P_0(t)$ passant par le point P_0 à l'époque $t = 0$, définie et contenue dans l'ensemble $\overline{U}$, pour les valeurs de l'intervalle $-\frac{\rho}{mM} \leq t \leq \frac{\rho}{mM}$, *a fortiori* pour celles de l'intervalle $-\alpha < t < \beta$, où α et β sont égaux à $\frac{\rho}{mM} > 0$ et où M est une constante telle que l'on ait

$$|X_i(P)| \leq M \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

dans l'ensemble $\overline{U}$. Il est clair que le nombre M existe, puisque les fonctions X_i sont continues dans $\overline{U}$, et que l'ensemble $\overline{U}$ est compact.

D'autre part, utilisant la continuité des dérivées partielles $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$ $(i, j = 1, \ldots, m)$, on démontre à l'aide du théorème de Lipschitz, que la solution $P_0(t)$ passant par le point P_0 à l'époque $t = 0$ est unique, c'est-à-dire que, si l'on désigne par $P_0(t)$ et $P_1(t)$ deux solutions arbitraires des équations (3) passant par le point P_0 à l'époque $t = 0$, la première étant définie pour $-\alpha_0 < t < \beta_0$, la seconde pour $-\alpha_0' < t < \beta_0'$, on a identiquement

$$P_0(t) = P_1(t)$$

pour toutes les valeurs de t entre $-$ minimum (α_0, α_0') et minimum (β_0, β_0').

5. Soient P_0 un point quelconque du domaine A et U et V deux voisinages du point P_0, tels que la fermeture $\overline{U}$ de U soit contenue dans V et la fermeture $\overline{V}$ de V dans A :

$$\overline{U} \subset V, \qquad \overline{V} \subset A;$$

je dis qu'alors *il existe un nombre positif* ε *indépendant des points* P *de la fermeture* $\overline{U}$, *tel que, pour tout point* P *de la fermeture* $\overline{U}$, *la solution* $P(t)$ *soit définie et contenue dans* V *pour* $|t| < \varepsilon$.

En effet, soit ρ une valeur positive inférieure à la distance de l'ensemble fermé $\overline{U}$ et de la frontière $\dot{V}$ de l'ensemble V :

$$\rho < \operatorname{dist}(\overline{U}, \dot{V}).$$

Cette valeur ρ existe, car $\operatorname{dist}(\overline{U}, \dot{V})$ est positif, $\overline{U}$ étant contenu dans V. Désignons par $\bar{I}\left(P, \frac{\rho}{m}\right)$ l'intervalle fermé :

$$\bar{I}\left(P, \frac{\rho}{m}\right) = [Q : |x_i - x_i| \leq \frac{m}{\rho}, \ i = 1, 2, \ldots, m],$$

de sorte que, si l'on désigne par Q un point quelconque de l'intervalle $\bar{I}\left(P, \frac{\rho}{m}\right)$, on a

$$\operatorname{dist}(P, Q) = \sum_{i=1}^{m} |x_i - x_i| \leq \frac{\rho}{m} m = \rho;$$

si l'on a $P \in U$, l'intervalle $\bar{I}\left(P, \frac{m}{\rho}\right)$ est contenu dans V. Or, il existe un nombre positif M, tel que l'on ait

$$|X_i(Q)| \leq M$$

pour tout point Q de l'ensemble $\overline{V}$ et pour tout indice $i = 1, 2, \ldots, m$; donc,

d'après le théorème de Cauchy, si l'on désigne par P un point arbitraire de $\overline{\Gamma}$, la solution $P(t)$ est définie et contenue dans $I\left(P, \frac{\rho}{m}\right)$ et *a fortiori* dans V pour $|t| < \varepsilon$, ε désignant le nombre positif $\frac{\rho}{mM}$.

Soit B un sous-ensemble du domaine A ; supposons que, pour tout point P de l'ensemble B, la solution $P(t)$ soit définie pour $-a < t < b$, a et b étant deux nombres positifs ou infinis indépendants du point P, et que t_1 soit une valeur quelconque comprise entre $-a$ et b ; nous désignons par $B(t_1)$ l'ensemble de toutes les positions à l'époque $t = t_1$ des points qui appartiennent à B à l'époque $t = 0$, et qui se meuvent selon les équations (3).

6. Supposons que la solution $P(t)$ soit définie $-\alpha < t < \beta$, et désignons par P_1 le point $P(t_1)$, t_1 étant une valeur quelconque de t entre $-\alpha$ et β. Comme les fonctions $X_i(P)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ ne contiennent pas la variable indépendante t, nous avons identiquement

$$P(t_1 + t) \equiv P_1(t),$$

pour toutes les valeurs de t entre-minimum $(\alpha + t_1, \alpha_1)$ et minimum $(\beta - t_1, \beta_1)$, où $P_1(t)$ désigne la solution définie pour $-\alpha_1 < t < \beta_1$, passant par le point P_1 à l'époque $t = 0$.

Quand on a

$$\beta - t_1 < \beta_1,$$

$P(t)$ peut être une solution pour $-\alpha < t < \beta_1 + t_1$, si l'on définit $P(t)$ par l'équation

$$P(t) = P_1(t - t_1) \qquad \text{pour} \quad \beta \leq t < \beta_1 + t_1 ;$$

on dit que la solution $P(t)$ pour $-\alpha < t < \beta$ est prolongée pour $\beta \leq t < \beta_1 + t_1$, ou pour $-\alpha < t < \beta_1 + t_1$.

De la même manière on peut prolonger la solution $P(t)$ pour $-\alpha_1 + t_1 < t \leq -\alpha$, si l'on a

$$-\alpha_1 + t_1 < -\alpha.$$

7. On sait que, si P est un point singulier, $P(t) \equiv P$, pour $-\infty < t < \infty$, est l'unique solution qui passe par le point P à l'époque $t = 0$, et que, si P est un point régulier et si la solution $P(t)$ est définie dans l'intervalle $-\alpha < t < \beta$, α, β étant deux nombres positifs ou infinis, $P(t)$ se place toujours dans l'ensemble R pour $-\alpha < t < \beta$.

Nous appelons régulière une solution qui passe par un point régulier à l'époque $t = 0$ et singulière une solution constante du point singulier. Ce que nous venons de voir montre que tout point d'une solution régulière est régulier, et que tout point d'une solution singulière est singulier.

II. — Continuité.

8. Soit $P(t)$ une solution des équations (3) définie pour $-\alpha < t < \beta$, α, β étant deux nombres positifs ou infinis, et soit t_1 une valeur comprise $-\alpha$ et β. Il est aisé de voir que l'on a

$$\lim_{t \to t_1} P(t) = P(t_1),$$

puisque la solution $P(t)$ est continue.

Soit P un point singulier et soit $P(t)$ la solution définie pour $-\alpha < t < \beta$. Même si α ou β est fini, comme nous l'avons vu, la solution $P(t)$ est prolongeable pour $-\infty < t < \infty$, et l'on a

$$P(t) \equiv P \qquad \text{pour} \quad -\infty < t < \infty,$$

et

$$\lim_{t \to \pm \infty} P(t) = P.$$

9. Soit P un point régulier. Supposons qu'une des extrémités, par exemple β, de l'intervalle de définition de la solution $-\alpha < t < \beta$, soit finie et qu'il existe une suite $\{t_n\}$ de valeurs de t, telle que l'on ait

$$-\alpha < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots \to \beta \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to \infty} P(t_n) Q \in A;$$

je dis qu'il existe $\lim_{t \to \beta - 0} P(t)$, de sorte que l'on a

$$\lim_{t \to \beta - 0} P(t) = Q \in A.$$

En effet, soit U un voisinage assez petit du point Q, dont la fermeture $\overline{U}$ est contenue dans A. D'après le n° 5, il existe un nombre positif ε tel que, pour tout point $P \in U$, $P(t)$ soit définie pour $|t| < \varepsilon$, puisque, si l'on désigne par V un voisinage convenable du point Q, on peut avoir $U \subset \overline{V}$, $V \subset A$. Or, par hypothèse, nous avons

$$-\alpha < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots \to \beta \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to \infty} P(t_n) = Q,$$

donc il existe un nombre entier positif n_1, tel que l'on ait

$$P(t_{n_1}) \in U, \qquad \text{et} \qquad 0 < \beta - t_{n_1} < \varepsilon.$$

Désignons par P_{n_1} le point $P(t_{n_1})$; les deux dernières relations montrent que la solution $P_{n_1}(t)$ est définie pour $|t| < \varepsilon$, et qu'en conséquence $P_{n_1}(t - t_{n_1})$ est défini pour $t_{n_1} - \varepsilon < t < t_{n_1} + \varepsilon$, *a fortiori* pour $\beta \leqq t < t_{n_1} + \varepsilon$. Comme nous avons $-\alpha < \beta < t_{n_1} + \varepsilon$, $\lim_{t \to \beta - 0} P(t) = \lim_{t \to \beta} P(t)$ existe et coïncide avec le point $Q \in A$.

D'après ce que nous venons de voir, pour qu'une solution $P(t)$ définie pour

$-\alpha < t < \beta$ ne soit pas prolongeable au delà de la valeur β de t, β étant finie, il faut que, pour toutes les suites $\{t_n\}$ telles que l'on ait $-\alpha < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots \to \beta$, et telles qu'il existe $\lim_{n\to\infty} P(t_n)$, ce point limite appartienne à la frontière Ȧ du domaine A.

On peut démontrer de même le théorème concernant l'autre extrémité $-\alpha$.

10. Profitant de cette propriété des solutions, nous conviendrons désormais de supposer que, si nous disons qu'une solution $P(t)$ est définie pour $-\alpha < t < \beta$, la solution $P(t)$ n'est pas prolongeable ni pour $t \geq \beta$, ni pour $t \leq -\alpha$, et nous fixons les notations de manière que, s'il s'agit des points P, P_j, P′, Q, etc. du domaine A, les solutions $P(t)$, $P_j(t)$, $P'(t)$, $Q(t)$, etc. soient définies respectivement pour $-\alpha < t < \beta$, $-\alpha_j < t < \beta_j$, $-\alpha' < t < \beta'$, $-a < t < b$, etc., et que les solutions ne soient plus prolongeables en dehors de ces intervalles, même si nous ne faisons aucune remarque sur les notations α, β, a, b, etc.

Ainsi, par exemple, quand on considère un point Q_0 du domaine A, on doit savoir que la solution $Q_0(t)$ est définie pour $-a_0 < t < b_0$, et ou bien que b_0 est infini, ou bien que, b_0 étant fini, $\lim_{n\to\infty} Q_0(t_n)$ est un point de la frontière Ȧ du domaine A, si la suite $\{Q_0(t_n)\}$ converge pour $n \to \infty$ et si l'on a

$$-a_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots < b_0.$$

Tout ce qui précède au sujet de b_0 est évidemment applicable à l'autre extrémité $-a_0$.

11. Théorème. — *Soient* P *un point du domaine* A *et* t_0 *une valeur quelconque fixe de* t *dans l'intervalle* $-\alpha < t < \beta$ *de définition de la solution* $P(t)$, *et posons*

$$P_0 = P(t_0).$$

Si l'on désigne par U_1 *un voisinage de l'arc fermé* $\overset{\frown}{P, P_0}$ *représenté par la solution* $P(t)$ *avec les valeurs de* t *comprises entre zéro et* t_0 (*deux extrémités incluses*), *et par* U_2 *un voisinage du point* P_0, *il existe un voisinage du point* P, *soit* V, *telle que* $V(t)$ *soit défini et contenu dans* U_1 *pour les valeurs de* t *entre zéro et* t_0 (*deux extrémités incluses*), *et qu'en particulier pour* $t = t_0$, $V(t_0)$ *soit contenu dans* U_2.

En effet, supposons que t_0 soit positif. Désignons par W un voisinage de l'arc fermé $\overset{\frown}{P, P_0}$ assez petit pour que sa fermeture $\overline{W}$ soit contenue dans l'intersection des deux ensembles ouverts U_1 et A : $\overline{W} \subset U_1 \cap A$, et par U_{ε_1} le ε_1-voisinage du point P_0, où ε_1 est un nombre positif assez petit pour que U_{ε_1} soit contenu dans U_2 : $U_{\varepsilon_1} \subset U_2$.

Posons

$$d = \operatorname{dist}\left(\overset{\frown}{P, P_0}, \dot{W}\right) \quad \text{et} \quad \varepsilon = \text{minimum}\,(d, \varepsilon_1).$$

Soit V_δ le δ-voisinage du point P, δ étant un nombre positif inférieur à εe^{-mNt_0}, où N

désigne une borne supérieure de $\left|\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right| (i, j = 1, 2, \ldots, m)$ dans l'ensemble fermé $\overline{W}$, qui est contenu dans A et qui est, en conséquence, borné.

Si l'on désigne par Q un point quelconque du voisinage V_δ, de sorte que l'on ait $\operatorname{dist}(P, Q) < \delta$, on a

$$\frac{dy_i}{dt} - \frac{dx_i}{dt} = X_i(Q(t)) - X_i(P(t)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

pour $0 \leq t <$ minimum (b, β), où b est l'extrémité supérieure de l'intervalle de définition de la solution $Q(t)$.

Si le segment $\overline{Q(t), P(t)}$ est contenu dans A, nous avons

$$X_i(Q(t)) - X_i(P(t)) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial X_i(\Xi_i(t))}{\partial x_j} (y_j(t) - X_j(t)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

où

$$\overrightarrow{\Xi_i(t)} = \overrightarrow{P(t)} + \theta_i \left(\overrightarrow{Q(t)} - \overrightarrow{P(t)}\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

chaque θ_i étant un certain nombre positif inférieur à 1.

Comme, par hypothèse, l'arc fermé $\overset{\frown}{P, P_0}$ est contenu dans W et que l'on a $\overline{W} \subset A$ et $\operatorname{dist}\left(\overset{\frown}{P, P_0}, \dot{W}\right) = d$, le segment $\overline{Q(t), P(t)}$ est contenu dans W, *a fortiori* dans A, pour les valeurs de t telles que l'on ait

$$\operatorname{dist}(Q(t), P(t)) < d.$$

Or, $\operatorname{dist}(Q, P)$ est inférieure à $\delta < d$, et $\operatorname{dist}(Q(t), P(t))$ est continue par rapport à la variable t pour $0 \leq t <$ minimum(b, β); donc ou bien il existe un nombre c inférieur à minimum (b, β) tel que l'on ait

$$\operatorname{dist}(Q(t), P(t)) < d \qquad \text{pour} \quad 0 \leq t < c,$$

et

$$\operatorname{dist}(Q(c), P(c)) = d,$$

ou bien on a

$$\operatorname{dist}(Q(t), P(t)) < d$$

pour toute valeur de t positive et inférieure à minimum(b, β).

En conséquence, ou bien pour $0 \leq t \leq c$ ou bien pour $0 \leq t <$ minimum (b, β) on a

$$\frac{dy_i(dt)}{dt} - \frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial X_i(\Xi_i(t))}{\partial x_j} (y_j(t) - x_j(t)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Or, si $Q(t)$ satisfait à l'inégalité

$$\operatorname{dist}(Q(t), P(t)) \leq d,$$

on a $Q(t) \in \overline{W}$, puisque, par définition, on a $\operatorname{dist}(\widehat{P, P_0}, \dot{W}) = d$; donc le segment $\overline{Q(t), P(t)}$ appartient à $\overline{W}$, et en particulier, on a

$$\Xi_i(t) \in \overline{W} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

de sorte que l'on a

$$\left| \frac{\partial X_i(\Xi_i(t))}{\partial x_j} \right| \leq N \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m);$$

en conséquence cette inégalité subsiste ou bien pour $0 \leq t \leq c$, ou bien pour $0 \leq t < \text{minimum}(b, \beta)$, et nous avons

$$\left| \frac{dy_i(t)}{dt} - \frac{dx_i(t)}{dt} \right| \leq \sum_{j=1}^{m} N \, |y_j(t) - x_j(t)| \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

En faisant la somme de 1 à m de l'indice i, nous avons

$$\sum_{i=1}^{m} \left| \frac{dy_i(t)}{dt} - \frac{dx_i(t)}{dt} \right| \leq mN \sum_{i=1}^{m} |y_j(t) - x_j(t)|,$$

d'où

$$\left| \frac{d}{dt} \operatorname{dist}(Q(t), P(t)) \right| \leq mN \operatorname{dist}(Q(t), P(t)).$$

En faisant l'intégrale de zéro à t, nous avons finalement

$$\operatorname{dist}(Q(t), P(t)) \leq \operatorname{dist}(Q, P) \, e^{mNt}$$

ou pour $0 \leq t \leq c$, ou pour $0 \leq t < \text{minimum}(b, \beta)$.

Je dis qu'il n'existe pas de valeur $c < \text{minimum}(b, \beta)$. En effet, si elle existait, nous aurions

$$d = \operatorname{dist}(Q(c), P(c)) \leq \operatorname{dist}(Q, P) \, e^{mNc} < \delta \, e^{mNc} < d \, e^{-mNt} \, e^{mNc} < d \, e^{mN(c - t_0)},$$

d'où une inégalité qui ne pourrait pas être vérifiée, puisque nous avons par hypothèse $c < t_0$.

En conséquence, nous avons

$$\operatorname{dist}(Q(t), P(t)) \leq \operatorname{dist}(Q, P) \, e^{mNt} \qquad \text{pour} \quad 0 \leq t < \text{minimum}(b, \beta).$$

Je dis maintenant que nous avons $b > t_0$. En effet, dans le cas contraire, nous aurions pour t positif et inférieur à b,

$$\operatorname{dist}(Q(t), P(t)) < d,$$

d'où

$$Q(t) \in W \subset A \qquad \text{pour} \quad 0 \leq t < b.$$

Or, par hypothèse, la fermeture $\overline{W}$ est contenue dans A, donc $\lim Q(t)$ existe et elle est contenue dans A : ceci est en contradiction avec la définion du nombre b.

En conséquence nous avons

$$b > t_0.$$

Cette dernière inégalité montre que le critérium

$$\operatorname{dist}(Q(t), P(t)) \leqq \operatorname{dist}(Q, P)\, e^{mNt} < \delta\, e^{mNt} < d\, e^{mN(t-t_0)} \quad \text{et} \quad < \varepsilon_1 e^{mN(t-t_0)}$$

est valable pour toute valeur de t, $0 \leqq t \leqq t_0$, ce qui montre que l'on a

$$Q(t) \in W \subset U_1 \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq t \leqq t_0,$$

et en particulier

$$Q(t_0) \in U_{\varepsilon_1} \subset U_2.$$

Or, Q est un point arbitraire du voisinage $V_\delta = V$, donc nous avons

$$V(t) \subset U_1 \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq t \leqq t_0;$$

et

$$V(t_0) \subset U_2.$$

De la même manière on démontre le théorème dans le cas où l'on a $t < 0$, et le théorème est trivial dans le cas où l'on a $t_0 = 0$.

12. Ce dernier théorème montre que, *si une suite de points* $\{P_n\}$ *converge vers un point* P *du domaine* A *et si la solution* $P(t)$ *est définie à la valeur* t_0, *les solutions* $P_n(t)$ *sont définies à la valeur* t_0 *pour* n *assez grand et la suite* $\{P_n(t_0)\}$ *converge vers le point* $P(t_0)$ *pour* $n \to \infty$.

Je dis en outre que, *si une suite* $\{t_n\}$ *des valeurs de* t *converge vers* t_0 *pour* $n \to \infty$, *les points* $P_n(t_n)$ *sont définis pour* n *assez grand et convergent vers* $P(t_0)$ *pour* $n \to \infty$.

En effet, soit U un voisinage quelconque du point $P(t_0)$. Désignons par V et V_1 deux voisinages du point $P(t_0)$ tels qu'on ait $U \cap A \supset \overline{V}_1$, $V_1 \supset \overline{V}$. D'après le théorème précédent, pour n assez grand, les points $P_n(t_0)$ sont définis et appartiennent au voisinage V; or, d'après le n° 5, les relations $A \supset \overline{V}_1$ et $V_1 \supset \overline{V}$ entraînent l'existence d'un nombre positif ε, tel que $V(t)$ soit défini et contenu dans V_1 pour $|t| < \varepsilon$. D'autre part la convergence de la suite $\{t_n\}$ vers t_0 montre que l'on a $|t_n - t_0| < \varepsilon$ pour n assez grand, donc nous avons $P_n(t_n) \in V_1 \subset U$ pour n assez grand, ce qui achève la démonstration.

Remarquons que la réciproque de ce que nous venons de démontrer n'est pas toujours vraie.

III. — Solutions périodiques et caractéristiques.

13. Soit P un point du domaine A; supposons qu'il existe deux nombres t_1 et t_2 tels que l'on ait

$$P(t_1) = P(t_2), \qquad -\alpha < t_1 < t_2 < \beta.$$

On sait qu'alors la solution $P(t)$ est définie pour $-\infty < t < \infty$ et que l'on a

$$P(t) = P(t + l(t_2 - t_1)) \qquad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \qquad \text{pour} \quad -\infty < t < \infty.$$

Comme conséquence directe de cette propriété, on voit que, pour qu'il existe une paire de valeurs $(t_1, t_2)(-\alpha < t_1 < t_2 < \beta)$ telle que l'on ait $P(t_1) = P(t_2)$, P étant un point du domaine A, il faut et il suffit qu'il existe une valeur positive τ satisfaisant à $P(o) = P(\tau)$.

Cette valeur τ s'appelle *période* de la solution $P(t)$, et l'on peut facilement démontrer que, quand τ_1, τ_2 sont deux périodes, $k_1\tau_1 + k_2\tau_2$ est une période, k_1, k_2 étant deux nombres entiers quelconques, si $k_1\tau_1 + k_2\tau_2$ est positif, c'est-à-dire qu'*une combinaison linéaire de deux périodes avec coefficients entiers est aussi une période, pourvu qu'elle soit positive*.

Soit $P(t)$ une *solution singulière*; on a

$$P(t) \equiv P$$

pour toute valeur de t, $-\infty < t < \infty$. Donc, toute valeur positive de t est période de la solution singulière.

14. Supposons qu'une *solution régulière* $P(t)$ admette des périodes et désignons par $\{\tau\}$ l'ensemble de ses périodes. On sait que l'ensemble $\{\tau\}$ a un minimum T positif et que, si l'on désigne par τ une période arbitraire, il existe un nombre entier positif n tel que l'on ait

$$\tau = nT.$$

Nous appelons ce minimum T de l'ensemble $\{\tau\}$ *période fondamentale* de la solution $P(t)$. Nous disons qu'une solution $P(t)$ est *périodique*, si sa période fondamentale est différente de zéro. D'après cette définition, les solutions singulières ne sont pas périodiques, bien qu'elles admettent comme période toute valeur positive de t; et les solutions régulières admettant des périodes sont toujours périodiques; autrement dit, pour qu'une solution $P(t)$ admettant des périodes soit périodique, il faut et il suffit que le point P soit régulier.

15. Si P désigne un point régulier, d'après les numéros précédents, ou bien $P(t)$ est périodique, étant définie pour $-\infty < t < \infty$, ou bien il n'existe pas de paire (t_1, t_2) telle que l'on ait

$$P(t_1) = P(t_2), \qquad t_1 \neq t_2.$$

Considérons le premier cas de l'alternative et désignons par T la période fondamentale; $P(t)$ définit une courbe de Jordan fermée pour $o \leq t < T$, ou pour tout intervalle de la forme $t_0 \leq t < t_0 + T$, car il n'existe plus de paire (t_1, t_2), telle que l'on ait $P(t_1) = P(t_2)$ et $t_0 \leq t_1 < t_2 < t_0 + T$. Nous appelons cette courbe de Jordan fermée caractéristique (totale).

Envisageons maintenant le second cas de l'alternative; comme la correspondance entre les points de la solution $P(t)$ et les valeurs de l'intervalle $-\alpha < t < \beta$ est biunivoque, la solution $P(t)$ pour $\gamma \leq t \leq \delta$ définit une courbe de Jordan non fermée, γ, δ étant deux nombres quelconques positifs ou négatifs, $\gamma < \delta$,

compris entre $-\alpha$ et β. Nous appellons, toutefois, caractéristique (totale) la courbe définie par la solution $P(t)$ pour $-\alpha < t < \beta$, suivant la terminologie de Poincaré.

Dans les Chapitres suivants, nous traitons surtout de la courbe $P(t)$ correspondant aux valeurs de t comprises entre 0 et β (0 inclus, β exclus), et appelons cette courbe demi-caractéristique positive partant du point P, et nous la désignons par $P(t)$. Si l'on considère la courbe correspondant aux valeurs de t de l'intervalle $-\alpha < t \leq 0$, elle est appelée demi-caractéristique négative et représentée par $P(s)$. Dans ce cas, nous désignons la caractéristique totale par $P(t) \cup P(s)$.

On remarque que, si $P(t)$ est une solution périodique, la demi-caractéristique positive $P(t)$, la demi-caractéristique négative $P(s)$ et la caractéristique totale $P(t) \cup P(s)$ représentent la même courbe fermée.

IV. — Surfaces sans contact.

16. Soient P_0 un point du domaine A et U un voisinage du point P_0, tel que l'on ait $U \subset A$. *Soit* $f(P)$ *une fonction définie et continue dans le voisinage* U; *nous supposons d'ailleurs que ses dérivées partielles du premier ordre par rapport aux coordonnées* x_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *du point* P *sont continues dans* U.

Nous disons que la surface $f(P) = 0$ *est une surface sans contact au point* P_0 *définie dans le voisinage* U *du point* P_0, *si la fonction* $f(P)$ *satisfait aux conditions suivantes :*

$$1^\circ \quad f(P_0) = 0; \qquad 2^\circ \quad \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_i} X_i(P_0) > 0.$$

Comme conséquence directe de la deuxième condition, pour que la surface $f(P) = 0$ soit sans contact au point P_0, il faut qu'il existe au moins une dérivée partielle $\frac{\partial f(P)}{\partial x_j}$ de la fonction $f(P)$ et une fonction $X_j(P)$ du même indice j qui ne s'annulent pas au point P_0. En conséquence, si P_0 est un point singulier, il n'existe pas de surface sans contact au point P_0. Inversement, si P_0 est un point régulier, il y a une fonction X_k qui ne s'annule pas au point P_0. Désignons par $\vec{\Xi}$ le vecteur non zéro $\overrightarrow{[X_1(P_0), X_2(P_0), \ldots, X_m(P_0)]}$ et posons

$$f(P) = (\vec{P} - \vec{P}_0)\,\vec{\Xi},$$

le deuxième membre étant le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{P} - \vec{P}_0$ et $\vec{\Xi}$. Il est clair que $f(P) = 0$ est une surface sans contact au point P_0, définie dans l'espace R_m tout entier.

Si une fonction $g(P)$ satisfait à toutes les conditions excepté 2° pour que $g(P)=0$ soit une surface sans contact au point P_0 définie dans U, et si l'on a

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g(P_0)}{\partial x_i} X_i(P_0) < 0,$$

la surface $g(P)=0$ est considérée comme surface sans contact, puisque alors on a

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial (-g(P_0))}{\partial x_i} X_i(P_0) > 0,$$

et que $g(P)=0$ et $-g(P)=0$ représentent la même surface. Mais pour simplifier l'exposition, nous conviendrons d'apprendre que, si $f(P)=0$ est une surface sans contact au point P_0, $f(P)$ satisfait à la condition 2°.

17. *Si $f(P)$ est une fonction continue, ayant ses dérivées partielles du premier ordre continues dans un domaine $B \subset A$, et si elle satisfait aux conditions suivantes :*

1° *il existe des points* P *dans* B, *tels que l'on ait* $f(P)=0$,

2° *on a pour tous les points* P *du domaine* B,

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(P)}{\partial x_i} X_i(P) > 0,$$

nous disons que la surface $f(P)=0$ est une surface sans contact dans le domaine B.

On voit qu'une surface $f(P)=0$ sans contact dans un domaine B est une surface sans contact en tous ses points appartenant à B, et le même raisonnement qu'au numéro précédent démontre que le domaine B ne contient pas de points singuliers.

Si une fonction $g(P)$ remplit dans un domaine $B \subset A$ la condition

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g(P)}{\partial x_i} X_i(P) < 0$$

à la place de la condition 2° et si elle satisfait à toutes les autres conditions pour que $g(P)=0$ soit une surface sans contact dans B, on montre, de la même manière qu'au numéro précédent, que $g(P)=0$ est considérée comme surface sans contact dans B. Mais, comme au numéro précédent, nous ne disons pas que $g(P)=0$ soit une surface sans contact à P_0.

18. Soit $f(P)=0$ une surface sans contact au point P_0 définie dans un voisinage U du point P_0 ; je dis qu'il existe un voisinage du point P, soit V, tel que la surface $f(P)=0$ soit une surface sans contact dans V, n'y ayant qu'une branche.

En effet, par définition on a

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_i} X_i(P_0) > 0$$

et $\frac{\partial f(P)}{\partial x_i}$ et $X_i(P)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ sont continues dans U, ce qui entraîne qu'il existe un voisinage U_1 du point P_0, tel que l'on ait

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(P)}{\partial x_i} X_i(P) > 0$$

pour tout point P de U_1. D'ailleurs au point P_0, on a $f(P_0) = 0$. Donc $f(P) = 0$ est une surface sans contact dans U_1.

En outre, l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_i} X_i(P_0) > 0$$

entraîne qu'il existe une dérivée $\frac{\partial f(P_0)}{\partial x_k} \neq 0$, soit > 0. A cause de la continuité de $\frac{\partial f(P)}{\partial x_k}$ dans U_1, cette dérivée partielle est positive dans un assez petit voisinage du point P_0, soit U_2. Donc dans U_2, $f(P) = 0$ est soluble par rapport à la variable x_k, c'est-à-dire que la surface $f(P) = 0$ n'a qu'une branche dans U_2.

Par conséquent, si l'on désigne par V un voisinage quelconque du point P_0 contenu dans l'intersection des deux voisinages U_1 et U_2, $V \subset U_1 \cap U_2$, $f(P) = 0$ est une surface sans contact dans V, n'y ayant qu'une branche.

Donc, *si l'on considère la topologie ordinaire de la surface* $f(P) = 0$ *dans* V, *cette topologie est équivalente à la topologie de la surface* $f(P) = 0$ *dans* V *induite par la topologie de l'espace* R_m. D'ailleurs, *s'il s'agit d'une surface sans contact* $f(P) = 0$ *dans un domaine* B, *cette équivalence subsiste dans* B, *puisqu'elle subsiste dans un voisinage assez petit de chaque point de la surface* $f(P) = 0$ *dans* B.

Remarquons que, si l'on a $m = 2$, une surface se réduit à une courbe, et que la surface sans contact dans un assez petit domaine représente un arc connexe de cette courbe, ou encore une courbe de Jordan, si l'on y ajoute les deux points d'extrémité.

19. Revenons au cas où m est arbitraire. Soit $f(P) = 0$ une surface sans contact dans un sous-domaine B du domaine A et soit $P(t)$ une solution contenue dans B pour $t < \varepsilon$, ε étant un nombre positif; il est clair par définition que l'on a

$$\frac{df(P(t))}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(P)}{\partial x_i} X_i(P(t)) > 0 \qquad \text{pour} \quad t < \varepsilon.$$

Je dis qu'il n'existe au plus qu'une valeur de t telle que l'on ait

$$f(P(t)) = 0 \qquad \text{et} \qquad |t| < \varepsilon.$$

En effet, s'il existait deux valeurs distinctes t_1, t_2 de t qui satisfassent à ces deux conditions, d'après le théorème de la moyenne, on aurait une autre valeur de t entre t_1 et t_2, soit t_3, telle que l'on ait

$$f(P(t_1)) - f(P(t_2)) = \frac{df(P(t_3))}{dt}(t_1 - t_2),$$

dont le premier membre est zéro, puisque ses deux termes sont zéro. Or t_3 se place entre t_1 et t_2, donc on a $|t_3| < \varepsilon$, ce qui montre que $P(t_3)$ appartient au domaine B, donc

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(P)}{\partial x_i} X_i(P(t_3)) = \frac{df(P(t_3))}{dt} = 0$$

est en contradiction avec l'hypothèse que $f(P) = 0$ est une surface sans contact dans B.

Soit t_0 l'unique valeur de t, telle que l'on ait

$$f(P(t_0)) = 0 \qquad \text{et} \qquad |t_0| < \varepsilon;$$

à cause de la continuité de la fonction $f(P(t))$, cette fonction $f(P(t))$ doit être positive pour $t_0 < t < \varepsilon$, et négative pour $-\varepsilon < t < t_0$, puisque sa dérivée

$$\frac{df(P(t))}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(P)}{\partial x_i} X_i(P(t))$$

est positive pour $-\varepsilon < t < \varepsilon$, pour lequel $P(t)$ se trouve dans B.

20. Théorème. — *Si* $f(P) = 0$ *est une surface sans contact au point* P_0 *définie dans un voisinage* U *du point* P_0, *pour tout point* Q *d'un voisinage assez petit* U_1 *du point* P_0, *il existe une et une seule valeur de* t, *telle que l'on ait*

$$f(Q(t)) = 0 \qquad \text{et} \qquad |t| < \varepsilon,$$

ε *étant un nombre positif inférieur à un certain nombre positif et indépendant du point* Q.

En effet, supposons que U soit assez petit pour que l'on ait $\overline{U} \subset A$ et pour que $f(P) = 0$ soit une surface sans contact dans U. Si V est un voisinage du point P_0, tel que l'on ait $\overline{V} \subset U$, il existe, d'après le n° 5, un nombre positif ε_1 indépendant du choix du point P, tel que, pour tout point $P \in \overline{V}$, la solution $P(t)$ soit définie pour $|t| < \varepsilon_1$ et que l'on ait $P(t) \in U$ pour les mêmes valeurs de t.

Par conséquent, pour tout point $P \in \overline{V}$, il n'existe au plus qu'une valeur de t qui satisfasse aux conditions

$$f(P(t)) = 0 \qquad \text{et} \qquad |t| < \varepsilon_1.$$

Posons

$$V_\varepsilon = |Q(t) : f(Q) = 0,\ Q \in V,\ |t| < \varepsilon|,$$

désignant par ε un nombre positif quelconque inférieur à ε_1; je dis que cet ensemble V_ε est ouvert, de sorte que, si l'on désigne par U_1 un voisinage du point P_0 contenu dans V_ε, le voisinage U satisfait à toutes les conditions du théorème.

En effet, soit Q un point quelconque de l'ensemble V_ε; il existe un point Q_0 et une valeur t_0 de t, tels que l'on ait

$$Q_0 \in V, \qquad f(Q_0) = 0, \qquad Q = Q_0(t_0) \qquad \text{ou} \qquad Q(-t_0) = Q_0 \qquad \text{et} \qquad |t_0| < \varepsilon.$$

Soit $U(Q_0)$ un voisinage assez petit du point Q_0, dont la fermeture $\overline{U(Q_0)}$ est contenue dans V; il existe un nombre positf δ tel que, pour tout point P du voisinage $U(Q_0)$, la solution $P(t)$ soit contenue dans le voisinage V pour $-\delta < t < \delta$, et que l'on ait $-\varepsilon < -t_0 \pm \delta < \varepsilon$. Ces deux dernières inégalités sont vérifiées, puisque l'on a $-\varepsilon < -t_0 < \varepsilon$.

Désignons par δ_1 un nombre positif quelconque fixe inférieur à δ, tel que les deux points $Q' = Q_0(\delta_1)$ et $Q'' = Q_0(-\delta_1)$ appartiennent au voisinage $U(Q_0)$. D'après le n° 19, on a $f(Q') > 0$ et $f(Q'') < 0$, puisque δ_1 est positif.

Par conséquent il existe deux voisinages $U(Q')$ et $U(Q'')$ respectivement du point Q' et du point Q'', tels que l'on ait

$$f(P) > 0 \qquad \text{pour} \qquad P \in U(Q') \qquad \text{et} \qquad f(P) < 0 \qquad \text{pour} \qquad P \in U(Q''),$$

et que l'on ait $U(Q') \cup U(Q'') \subset U(Q_0)$. Or, à cause de la continuité, si l'on désigne par $U(Q)$ un voisinage assez petit du point Q, on a

$$U(Q)(-t_0 + \delta_1) \subset U(Q') \qquad \text{et} \qquad U(Q)(-t_0 - \delta_1) \subset U(Q'').$$

Je dis que le voisinage $U(Q)$ est contenu dans V_ε : $U(Q) \subset V_\varepsilon$. En effe, soit P un point quelconque du voisinage $U(Q)$; en raison des relations précédentes, on a

$$f(P(-t_0 + \delta_1)) > 0 \qquad \text{et} \qquad f(P(-t_0 - \delta_1)) < 0,$$

donc pour une valeur t_1 de t comprise entre $-t_0 - \delta_1$ et $-t_0 + \delta_1$, on a

$$f(P_1) = f(P(t_1)) = 0$$

et

$$(-t_0 + \delta_1) - \delta < t_1 < -t_0 + \delta \qquad \text{ou} \qquad -t_0 - \delta_1 < t_1 < (-t_0 - \delta_1) + \delta,$$

où P_1 désigne le point $P(t_1)$.

Or, les relations

$$U(Q_0)(t)\subset V \quad \text{pour} \quad |t|<\delta \quad \text{et} \quad U(Q_0)\supset U(Q')\cup U(Q'')$$

entraînent

$$P_1=P(t_1)\in V,$$

puisque l'on a

$$P(-t_0+\delta_1)\in U(Q') \quad \text{et} \quad P(-t_0-\delta_1)\in U(Q'').$$

Donc le point $P=P_1(-t_1)$ appartient à l'ensemble V_ε, car on a $-\varepsilon<-t_1<\varepsilon$.

Or, P est un point arbitraire du voisinage U(Q), donc on a $U(Q)\subset V_\varepsilon$; d'autre part Q est un point arbitraire de l'ensemble V_ε, donc V_ε est ouvert.

C. Q. F. D.

21. Soit P un point régulier quelconque et soit $P_1=P(t_1)$ un point de la caractéristique totale $P(t)\cup P(s)$; désignons par Π et Π_1 deux surfaces sans contact respectivement aux points P et P_1. Considérons la topologie de la surface Π ou Π_1 induite par la topologie de l'espace entier R_m et désignons par V_1 un voisinage du point P_1 sur la surface Π_1; je dis qu'il existe un voisinage du point P sur la surface Π, soit V, tel que toutes les caractéristiques passant par un des points du voisinage V à l'époque $t=0$, passent par un des points du voisinage V_1 une et une seule fois entre $t_1-\varepsilon$ et $t_1+\varepsilon$, ε étant un nombre positif inférieur à un certain nombre positif fixe.

En effet, d'après la définition de la topologie induite, le voisinage V_1 du point P_1 sur la surface Π_1 est représenté par l'intersection de Π_1 et d'un certain voisinage V' du point P_1 dans l'espace R_m; soit U_1 un voisinage de P_1 dans R_m et ε un nombre positif, tels que, pour tout point $Q\in U_1\subset V'$, $Q(t)$ soit definie pour $|t|<\varepsilon$, et que $Q(t)$ passe par un point de la surface Π dans V' une et une seule fois entre $-\varepsilon$ et ε.

D'après le n° 11, il existe un voisinage U du point P (dans l'espace R_m), tel que l'on ait $U(t_1)\subset U_1$; posons

$$V=U\cap\Pi,$$

de sorte que V est un voisinage du point P sur la surface Π. On voit que V est le voisinage qu'on recherche.

22. Soient $f(P)=0$ une surface sans contact du point P_0 et $\{Q_n\}$ une suite de points qui converge vers P_0 pour $n\to\infty$; je dis qu'il existe une suite $\{\tau_n\}$ de valeurs de t, telle que l'on ait, pour n assez grand,

$$|\tau_n|<\varepsilon \quad \text{et} \quad f(Q_n(\tau_n))=0,$$

ε étant un nombre positif donné, et que la suite $\{Q_n(\tau_n)\}$ de points converge vers P_0 pour $n\to\infty$.

En effet, soient U et V deux voisinages assez petits du point P_0, $U\supset\overline{V}$, pour

que $f(P)=0$ soit une surface sans contact dans U et que, pour tout point $Q \in V$, $Q(t)$ passe par un point de la surface $f(P)=0$ dans U une et une seule fois entre $-\delta$ et δ, δ étant un nombre positif assez petit et inférieur à ε. Comme, par hypothèse, $\{Q_n\}$ converge vers P_0 pour $n \to \infty$, on a $Q_n \in V$ pour n assez grand; donc, pour n assez grand, $Q_n(t)$ passe par un point, soit $Q_n(\tau_n)$, de la surface $f(P)=0$ dans U, $|\tau_n|$ étant inferieur à $\delta < \varepsilon$. Comme U peut être aussi petit que l'on veut, et que la topologie ordinaire et la topologie induite par celle de l'espace R_m de la surface $f(P)=0$ sont équivalentes, la démonstration est achevée.

CHAPITRE II.

Points limites et régions invariantes.

I. — Points limites.

23. Définition. — *Soit* P *un point du domaine* A; *nous appelons un point* Q *point limite au sens positif de la solution* $P(t)$, *s'il existe une suite* $\{t_n\}$ *de valeurs de* t, *telle que l'on ait*

$$\lim_{n\to\infty} P(t_n)=Q \qquad \text{et} \qquad 0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots \to \beta,$$

où β *désigne, comme d'habitude, l'extrémité supérieure de l'intervalle de définition de la solution* $P(t)$, *de sorte que* β *est positif ou infini.*

Nous désignons par $L^+(P)$ *l'ensemble des points limites au sens positif de la solution* $P(t)$. *On définit de même les points limites au sens négatif de la solution* $P(t)$, *dont l'ensemble est désigné par* $L^-(P)$. *Posons*

$$L(P)=L^+(P)\cup L^-(P).$$

On démontre que, P *désignant un point du domaine* A, $L^+(P)$, $L^-(P)$ *et a fortiori* $L(P)$ *sont non vides et* que *l'on a*

$$L^+(P), \quad L^-(P) \quad \text{et} \quad L(P)\subset \overline{A},$$

$\overline{A}$ *étant la fermeture du domaine* A.

24. Théorème. — *Si* P *est un point du domaine* A, *les ensembles* $L^+(P)$ *et* $L^-(P)$ *sont :* 1° *fermés et* 2° *connexes.*

1° En effet, soient Q un point quelconque de la fermeture $\overline{L^+(P)}$ et $\{U_k(Q)\}$ une suite de voisinages du point Q qui converge vers le point Q pour $k \to \infty$ et soit, en outre, $\{\tau_n\}$ une suite de valeurs de t, telle que l'on ait

$$0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n < \ldots \to \beta.$$

Je dis que l'on peut extraire une suite de valeurs de t, soit $\{t_k\}$, vérifiant les relations

$$P(t_k)\in U_k(Q) \qquad \text{et} \qquad 0\leq t_{k-1}<t_k, \qquad \tau_k<t \qquad (k=1, 2, \ldots),$$

de sorte que l'on a

$$\lim_{k\to\infty} P(t_k)=Q \qquad \text{et} \qquad 0\leq t_1<t_2<\ldots<t_n<\ldots\to\beta;$$

relations qui ne sont autres que les conditions pour que le point Q appartienne à $L^+(P)$.

En effet, posons

$$t_0=0.$$

Supposons que t_k soit déjà déterminé de manière que l'on ait

$$P(t_k)\in U_k(Q) \qquad \text{et} \qquad t_{k-1}<t_k, \qquad \tau_k<t_k.$$

Comme Q est un point de la fermeture $\overline{L^+(P)}$ de l'ensemble $L^+(P)$, il existe un point de l'ensemble $L^+(P)$, soit Q_{k+1}, appartenant à $U_{k+1}(Q)$, et par conséquent, si l'on désigne par $U(Q_{k+1})$ un voisinage assez petit du point Q_{k+1}, on a

$$U(Q_{k+1})\subset U_{k+1}(Q).$$

La relation $Q_{k+1}\in L^+(P)$ montre que, pour une certaine suite $\{t'_n\}$ de valeurs de t, on a

$$\lim_{n\to\infty} P(t'_n)=Q \qquad \text{et} \qquad 0\leq t'_1<t'_2<\ldots<t'_n<\ldots\to\beta,$$

d'où

$$P(t'_n)\in U(Q_{k+1})\subset U_{k+1}(Q) \qquad \text{et} \qquad t_k<t'_n, \qquad \tau_{k+1}<t'_n$$

pour n assez grand.

Fixons un nombre n_1 qui satisfasse à ces conditions et posons

$$t'_{n_1}=t_{k+1}.$$

Nous avons ainsi une suite $\{t_k\}$ de valeurs de t, telle que l'on ait

$$P(t_k)\in U_k(Q) \qquad \text{et} \qquad 0\leq t_{k-1}<t_k, \qquad \tau_k<t_k \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

Comme Q est un point arbitraire de la fermeture $\overline{L^+(P)}$, nous avons

$$\overline{L^+(P)}\subset L^+(P),$$

c'est-à-dire que l'ensemble $L^+(P)$ est fermé.

2° Si l'ensemble $L^+(P)$ n'était pas connexe, $L^+(P)$ serait décomposé en deux ensembles non vides et disjoints L_1 et L_2 :

$$L^+P)=L_1\cup L_2, \qquad L_i\neq 0 \qquad (i=1, 2), \qquad L_1\cap L_2=\emptyset,$$

puisque $L^+(P)$ est fermé d'après ce que nous venons de démontrer.

$L^+(P)$ étant contenu dans l'ensemble borné $\overline{A}$, $L^+(P)$ est compact, donc L_1 et L_2 sont également compacts tous les deux. En conséquence il existe deux voisinages $U(L_1)$ et $U(L_2)$ respectivement de L_1 et de L_2, dont les fermetures $\overline{U(L_1)}$ et $\overline{U(L_2)}$ sont disjointes : $\overline{U(L_1)} \cap \overline{U(L_2)} = \emptyset$. Soient $Q_1 \in L_1$; $Q_2 \in L_2$; d'après la définition de l'ensemble $L^+(P)$, il existe deux suites $\{t_n\}$ et $\{t'_n\}$ de valeurs de t, telles que l'on ait

$$P(t_n) \to Q_1, \qquad P(t'_n) \to Q_2, \qquad \text{pour} \quad n \to \infty,$$

et

$$0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots \to \beta, \qquad 0 \leq t'_1 < t'_2 < \ldots < t'_n < \ldots \to \beta.$$

Soient t_k un élément de la suite $\{t_n\}$ satisfaisant à la relation $P(t_k) \in U(L_1)$, et $t'_{k'}$ un élément de la suite $\{t'_n\}$ supérieur à t_k, tel que l'on ait $P(t'_{k'}) \in U(L_2)$; cet élément $t'_{k'}$ existe toujours, puisque l'on a

$$0 \leq t'_1 < t'_2 < \ldots < t'_n < \ldots \to \beta \qquad \text{et} \qquad 0 \leq t_k < \beta \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

et que l'on a

$$P(t'_n) \to Q_2 \in U(L_2) \qquad \text{pour } n \to \infty.$$

A cause de la continuité de la solution $P(t)$ pour $0 \leq t < \beta$, *a fortiori* pour $t_k < t < t'_{k'}$ et de la relation $\overline{U(L_1)} \cap \overline{U(L_2)} = \emptyset$, nous avons

$$P(\tau_k) \notin \overline{U(L_1)} \cup \overline{U(L_2)}$$

pour une certaine valeur τ_k de t entre t_k et $t'_{k'}$.

Or, nous avons $P(t_k) \in U(L_1)$ pour k assez grand, donc nous obtenons ainsi une suite $\{\tau_k\}$ de valeurs de t qui remplissent les conditions

$$P(\tau_k) \notin \overline{U(L_1)} \cup \overline{U(L_2)} \qquad \text{et} \qquad t_k < \tau_k < t'_{k'}$$

pour k assez grand. Étant contenu dans le domaine borné A, l'ensemble $\{P(\tau_k)\}$ a des points limites, lesquels n'appartiennent ni à $U(L_1)$ ni à $U(L_2)$, d'après ce que nous venons de montrer. Nous désignons un de ces points limites de l'ensemble $\{P(\tau_k)\}$ par Q. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que la suite $\{P(\tau_k)\}$ converge vers le point Q pour $k \to \infty$. Or, $t_k < \tau_k$ et $t_k \to \beta$ entraînent

$$0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_k < \ldots \to \beta,$$

donc Q est un point de l'ensemble $L^+(P)$ qui n'appartient ni à $U(L_1)$ ni à $U(L_2)$ ni *a fortiori* à L_1 ou à L_2, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $L^+(P) = L_1 \cup L_2$. Par conséquent $L^+(P)$ est connexe.

On remarque que $L(P)$ n'est pas toujours connexe, tandis qu'il est toujours fermé.

25. Théorème. — *Soit* P *un point du domaine* A; *la fermeture* $\overline{P(t)}$ *de la demi-*

caractéristique positive $P(t)$ *coïncide avec la réunion de l'ensemble* $L^+(P)$ *et de la demi-caractéristique positive* $P(t)$:

$$\overline{P(t)} = L^+(P) \cup P(t).$$

En effet, il est clair que l'on a $\overline{P(t)} \supset L^+(P) \cup P(t)$. Il suffit donc de démontrer que l'on a $\overline{P(t)} \subset L^+(P) \cup P(t)$.

Soit Q un point quelconque de la fermeture $\overline{P(t)}$, de sorte qu'il existe une suite $\{P(t_n)\}$ de points, les t_n étant non négatifs, qui converge vers Q pour $n \to \infty$. Désignons $\overline{\lim}_{n+\infty} t_n$ par t_0, de sorte que l'on a $0 \leq t_0 \leq \beta$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que l'on a

$$\lim_{n \to \infty} t_n = t_0.$$

Si t_0 est inférieur à β, où β désigne, suivant la règle d'emploi de notations du n° 10, l'extrémité supérieure de l'intervalle de définition de la solution $P(t)$, on a, d'après le n° 8, $Q = P(t_0)$. Donc Q appartient à la demi-caractéristique positive $P(t)$, *a fortiori* à la réunion $L^+(P) \cup P(t)$.

Supposons maintenant que l'on ait $t_0 = \beta$; on peut extraire une suite partielle $\{t_{n'}\}$ de la suite $\{t_n\}$, telle que l'on ait

$$0 \leq t_{1'} < t_{2'} < \ldots < t_{n'} < \ldots \to \beta,$$

ce qui montre que Q appartient à $L^+(P)$, puisque la suite $\{P(t_n)\}$ et en conséquence sa suite partielle $\{P(t_{n'})\}$ convergent vers Q pour $n \to \infty$ et pour $n' \to \infty$.

Par conséquent nous avons

$$\overline{P(t)} \subset L^+(P) \cup P(t),$$

ce qui achève la démonstration.

D'après un théorème de la théorie des ensembles, $\overline{P(t)}$ est connexe, puisque la demi-caractéristique $P(t)$ est évidemment connexe. Nous désignons par $K^+(P)$ cet ensemble $\overline{P(t)}$ fermé et connexe, et de la même manière nous posons

$$K^-(P) = \overline{P(s)}, \qquad K(P) = K^+(P) \cup K^-(P) = \overline{P(t)} \cup \overline{P(s)},$$

de sorte que $K(P)$ est la fermeture de la caractéristique totale $P(t) \cup P(s)$, puisque l'on a

$$\overline{P(t) \cup P(s)} = \overline{P(t)} \cup \overline{P(s)},$$

d'après un théorème fondamental de la théorie des ensembles.

26. Remarquons que le résultat du n° 9 avec la convention du n° 10 est exprimé par les notations de ce chapitre comme suit :

Si β *est fini*, $L^+(P)$ *est contenu dans la frontière* $\dot{A}$ *du domaine* A :

$$L^+(P) \subset \dot{A}.$$

Ou encore, on peut l'énoncer comme suit :

Si l'ensemble $L^+(P)\cap A$ *n'est pas vide, la solution* $P(t)$ *est définie pour toute valeur positive de* t.

27. Théorème. — *Soit* P *un point du domaine* A; *si l'on désigne par* Q *un point quelconque de l'intersection de l'ensemble* $L^+(P)$ *et du domaine* A, $Q\in L^+(P)\cap A$, *nous avons*

$$K(Q)\subset L^+(P).$$

En effet, soit t_0 une valeur quelconque comprise entre $-a$ et b, $-a$ et b étant les deux extrémités de l'intervalle de définition de la solution $Q(t)$; désignons par $U(Q_0)$ un voisinage du point $Q_0=Q(t_0)$. D'après le n° 11, si l'on désigne par $U(Q)$ un voisinage assez petit du point Q, nous avons

$$U(Q)(t_0)\subset U(Q_0).$$

Or, $L^+(P)\cap A\ni Q$ signifie que l'ensemble $L^+(P)\cap A$ n'est pas vide. En conséquence, d'après la remarque du numéro précédent, la solution $P(t)$ est définie pour toute valeur positive de t. Donc il existe une suite $\{t_n\}$ de valeurs de t, telle que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} P(t_n)=Q \qquad \text{et} \qquad 0\leq t_1<t_2<\ldots<t_n<\ldots\to\infty,$$

puisque, par hypothèse, Q appartient à $L^+(P)$; donc, pour n assez grand, on a

$$P(t_n)\in U(Q),$$

d'où

$$P(t_n+t_0)\in U(Q)(t_0)\subset U(Q_0)$$

et

$$0\leq t_n+t_0<t_{n+1}+t_0<\ldots<t_{n+m}+t_0<\ldots\to\infty.$$

Par conséquent la suite $\{P(t_n+t_0)\}$ converge vers le point $Q_0=Q(t_0)$ pour $n\to\infty$ et ce point $Q(t_0)$ appartient à l'ensemble $L^+(P)$. Or, par hypothèse, t_0 est une valeur arbitraire positive ou négative entre $-a$ et b, donc nous avons

$$Q(t)\cup Q(s)\subset L^+(P);$$

d'ailleurs, d'après le n° 24, $L^+(P)$ est fermé, donc nous avons

$$K(Q)=\overline{P(t)\cup P(s)}\subset L^+(P).$$

On remarque surtout que, même s'il s'agit de l'ensemble des points limites au sens *positif* $L^+(P)$ de la solution $P(t)$, l'ensemble $L^+(P)$ contient la demi-caractéristique *négative* $Q(s)$ et aussi l'ensemble des points limites au sens *négatif* $L^-(Q)$ de la solution $Q(t)$.

28. Comme nous l'avons vu au n° 24, si l'on désigne par P un point du domaine A, l'ensemble fermé non vide $L^+(P)$ est connexe, ce qui entraîne, d'après un théorème de la théorie des ensembles, ou bien que $L^+(P)$ se réduit à un point, ou bien que $L^+(P)$ est un ensemble qui a la puissance du continu.

Considérons le cas où $L^+(P)$ se réduit à un point Q, de sorte que l'on a

$$\lim_{t=\beta} P(t) = Q.$$

Supposons d'abord que β soit fini. D'après le n° 26, $L^+(P) = Q$ est un point de la frontière Ȧ.

Supposons maintenant que β soit infini. Le point Q est ou bien un point de la frontière Ȧ, ou bien un point du domaine A. Si Q est un point du domaine A, la solution $Q(t)$ est définie pour un certain intervalle de t contenant zéro. Or, d'après le numéro précédent, on a

$$Q(t) \cup Q(s) \subset L^+(P) = Q,$$

donc l'ensemble $Q(t) \cup Q(s)$ se réduit au point Q, c'est-à-dire que, pour toute valeur positive ou négative de t dans l'intervalle de définition, on a identiquement

$$Q(t) \equiv Q,$$

donc le point Q est un point singulier.

Ainsi nous avons les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME. — *Si la solution* $P(t)$ *est définie pour toute valeur de t, et si* $\lim_{t=\infty} P(t)$ *existe, ce point limite est ou bien un point de la frontière* Ȧ *du domaine* A, *ou bien un point singulier.*

THÉORÈME. — *Pour que l'on ait*

$$L^+(P) = P,$$

P *étant un point du domaine* A, *il faut et il suffit que le point* P *soit singulier.*

Ajoutons quelques remarques pour la démonstration de ce dernier théorème. La suffisance de cette dernière condition est claire d'après le n° 8. Si β était fini, on aurait $L^+(P) = P \in \dot{A}$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse; en conséquence β est infini, ce qui montre, avec ce que nous venons de voir, que la condition est nécessaire.

29. Nous envisageons encore le cas où, β étant infini, l'ensemble $L^+(P)$ se réduit à un point Q, et supposons que Q soit *un point de la frontière* Ȧ. Désignons par ε et τ deux nombres positifs donnés, et posons

$$\delta = \varepsilon\tau.$$

La convergence $\lim_{t\to\infty} P(t) = Q$ montre que l'on a

$$|x_i(t_1) - x_i(t_2)| < \delta \qquad \text{pour} \quad t_1, t_2 > T \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

où T désigne un nombre positif assez grand; en particulier on a

$$|x_i(t+\tau) - x_i(t)| < \delta \qquad \text{pour} \quad t > T \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Divisant les deux membres de ces inégalités par le nombre positif τ, nous avons

$$\left|\frac{x_i(t+\tau) - x_i(t)}{\tau}\right| < \frac{\delta}{\tau} = \varepsilon \qquad \text{pour} \quad t > T \qquad (i = 1, 2, \ldots, m.$$

Or, d'après le théorème de la moyenne, nous avons

$$\frac{x_i(t+\tau) - x_i(t)}{\tau} = \frac{dx_i(t_i')}{dt} = X_i(P(t_i')) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

t_i' $(i = 1, 2, \ldots, m)$ étant m certaines valeurs de t entre t et $t+\delta$. Par conséquent, nous avons

$$|X_i(P(t_i'))| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Ainsi nous avons le

THÉORÈME. — *Soient ε et τ deux nombres positifs quelconques; si la solution $P(t)$ est définie pour toute valeur positive de t et que $P(t)$ converge vers un point de la frontière $\dot{A}$ du domaine A pour $t \to \infty$, il existe une valeur T de t, telle que, pour m certaines valeurs t_i' $(i = 1, 2, \ldots, m)$ de tout intervalle de la forme $(t, t+\tau)$ où t est supérieur à T, on ait*

$$|X_i(P(t_i'))| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

II. — Ensembles $L^+(P)$ contenus dans le domaine A.

30. Dans ce paragraphe nous supposons toujours que l'ensemble $L^+(P)$ est contenu dans le domaine A, de sorte que la solution $P(t)$ est définie pour toute valeur positive de t.

Nous énonçons ici un théorème que l'on démontre facilement à l'aide des théorèmes fondamentaux de la théorie des ensembles.

THÉORÈME. — *Soit P un point du domaine A; pour que l'ensemble $L^+(P)$ soit contenu dans le domaine A, il faut et il suffit qu'il existe un sous-domaine B du domaine A, tel que l'on ait*

$$P(t) \subset B$$

pour toute valeur positive de t, et

$$B \subset A.$$

31. Soit Q un point quelconque de l'ensemble $L^+(P)$; d'après l'hypothèse du numéro précédent, Q appartient au domaine A, donc la solution $Q(t)$ est définie pour $-a < t < b$, a, b étant deux nombres positifs ou infinis. D'après le n° 27, on a

$$L^+(Q) \cup L^-(Q) \subset L^+(P);$$

l'hypothèse $L^+(P) \subset A$ entraîne en outre

$$L^+(Q) \subset A \qquad \text{et} \qquad L^-(Q) \subset A.$$

Par conséquent, d'après le n° 26, a et b sont infinis.

Donc nous avons le

THÉORÈME. — *Soit l'ensemble* $L^+(P)$ *contenu dans le domaine* A, P *étant un point du domaine* A; *si l'on désigne par* Q *un point quelconque de l'ensemble* $L^+(P)$, *la solution* $Q(t)$ *est définie pour toute valeur positive ainsi que négative de t, et l'on a*

$$K(Q) \subset L^+(P).$$

Comme conséquence directe de ce théorème, on a le

THÉORÈME. — *Supposons que, outre les mêmes hypothèses sur* $L^+(P)$ *qu'au théorème précédent, l'ensemble* $L^+(P)$ *et la caractéristique totale* $P(t) \cup P(s)$ *ne soient pas disjoints; on a alors*

$$K(P) = L^+(P).$$

Le théorème est facile à démontrer, mais on remarque que l'on a

$$L^-(P) \subset L^+(P).$$

32. Soit $P(t)$ une solution périodique de période fondamentale T; d'après le n° 15, la demi caractéristique positive $P(t)$ est une courbe fermée représentée par $P(t)$ pour les valeurs de t de l'intervalle $0 \leq t < T$, et elle est également fermée en tant qu'ensemble dans l'espace R_m.

Posons

$$t_n = nT \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

de sorte que l'on a $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots \to \infty$. D'après la définition de la période, on a $P(t_n) = P$, d'où $\lim_{n \to \infty} P(t_n) = P$, ce qui montre que P appartient à l'ensemble $L^+(P)$.

Donc, d'après le numéro précédent, nous avons

$$L^+(P) = P(t) \cup P(s) = K(P)$$

et

$$K(P) = \overline{P(t)} \cup \overline{P(s)} = P(t) \cup P(s) = P(t) = P(s) = L^+(P) = L^-(P).$$

33. Réciproquement, supposons que l'on ait

$$L^+(P) = P(t),$$

P étant un point régulier; je dis que la solution $P(t)$ est périodique.

En effet, supposons que $P(t)$ ne soit pas périodique. Soient $f(Q) = 0$ une surface sans contact au point P et U un voisinage du point P assez petit pour que $f(Q) = 0$ soit une surface sans contact dans U. Désignons par V un autre voisinage du point P dont la fermeture $\overline{V}$ est contenue dans U, de sorte que $\overline{V}(t)$ est défini et contenu dans U pour $|t| < \varepsilon$, ε désignant un nombre positif assez petit.

Soit Π la partie de la surface $f(Q) = 0$ contenue dans V, de sorte que la fermeture $\overline{\Pi}$ de Π est contenue dans la fermeture $\overline{V}$ de V. Posons

$$M_1 = \Pi \cap P(t) \quad \text{et} \quad M = \Pi \cap P(t);$$

on voit que l'ensemble M_1 est fermé, puisque la demi-caractéristique positive $P(t)$ est fermée, étant égale à l'ensemble fermé $L^+(P)$ par hypothèse, et en conséquence l'on a

$$M_1 \supset \overline{M},$$

ce qui montre que tout point Q de l'ensemble $\overline{M} - M$, s'il existe, appartient à $\overline{V} \subset U$ ainsi qu'à la demi-caractéristique positive $P(t)$ et satisfait à l'équation $f(Q) = 0$.

Je dis que l'ensemble $\overline{M}$ est dense en lui-même, c'est-à-dire que, si l'on désigne par Q_0 un point quelconque de l'ensemble $\overline{M}$, il existe une suite de points de $\overline{M}$ qui converge vers Q_0 dont tous les éléments diffèrent du point Q_0.

En effet, supposons d'abord que Q_0 soit un point de l'ensemble M, de sorte que Q_0 satisfait à l'équation $f(Q) = 0$ et que Q_0 appartient à V ainsi qu'à la demi-caracteristique positive $P(t)$, qui coïncide avec l'ensemble $L^+(P)$ par hypothèse. La relation $U \supset V \ni Q_0$ montre que la surface $f(Q) = 0$ est une surface sans contact au point Q_0, et la relation $L^+(P) = P(t) \ni Q$ montre qu'il existe une suite $\{t_n\}$, $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots \to \infty$, telle que l'on ait

$$\lim_{n \to \infty} P(t_n) = Q_0;$$

donc, d'après le n° 22, il existe une suite $\{\tau_n\}$ de valeurs de t, telle que les points $P(\tau_n)$ satisfassent à l'équation $f(Q) = 0$, et appartiennent à V pour n assez grand, de sorte que les points $P(\tau_n)$ appartiennent à l'ensemble M pour n assez grand et que l'on ait $\lim_{n \to \infty} P(\tau_n) = Q_0$. Or, $P(t)$ n'étant pas périodique, tous les points $P(\tau_n)$ diffèrent du point Q_0.

Supposons maintenant que Q_0 soit un point de l'ensemble $\overline{M} - M$, il est clair, d'après la définition de la fermeture, qu'il existe une suite de points de l'ensemble M qui converge vers Q_0.

Donc l'ensemble fermé $\overline{M}$ est dense en lui-même.

Si l'on désigne de nouveau par Q_0 un point quelconque de l'ensemble M, on a $Q_0 = P(\tau(Q_0))$ pour une certaine valeur positive $\tau(Q_0)$ de t, et l'on a $f(P(\tau(Q_0))) = 0$. Puisque Q_0 appartient à V, $Q_0(t)$ ne satisfait à l'équation $f(Q) = 0$ pour aucune valeur de t entre $-\varepsilon$ et ε, excepté zéro, *a fortiori* entre zéro et ε (deux extrémités exclues).

Or, d'après un théorème de la théorie des ensembles, un ensemble fermé dense en lui-même a la puissance du continu. Donc nous obtenons ainsi une correspondance biunivoque entre tout intervalle $[\tau(Q_0), \tau(Q_0)+\varepsilon]$ de longueur ε et un point d'un ensemble ayant la puissance du continu, tandis que tous ces intervalles sont disjoints et que la réunion de tous ces intervalles est contenue dans l'ensemble des nombres réels positifs; ceci est impossible d'après un thèorème de la théorie des ensembles. Donc l'hypothèse faite que $P(t)$ n'est pas périodique est absurde. Par conséquent, pour que l'on ait $L^+(P) = P(t)$, il faut que $P(t)$ soit périodique.

34. Soit P un point quelconque de l'ensemble R; si la demi-caractéristique positive $P(t)$ est fermée en tant qu'ensemble dans l'espace R_m, on a

$$K^+(P) = \overline{P(t)} = P(t) \supset L^+(P),$$

d'où

$$L^+(P) \subset R \qquad \text{et} \qquad P(t) \cap L^+(P) \neq \emptyset,$$

puisque l'ensemble $L^+(P)$ n'est pas vide, d'après le n° 23.

En conséquence nous avons

$$P(t) \subset L^+(P), \qquad \text{d'où} \qquad P(t) = L^+(P).$$

Par conséquent, d'après le numéro précédent, la solution $P(t)$ est périodique.

En combinant les résultats obtenus depuis le n° 32, nous avons le

THÉORÈME. — *Si l'on désigne par* P *un point régulier, les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

1° *la solution* $P(t)$ *est périodique;*

2° *la demi-caractéristique positive* $P(t)$ *coïncide avec* $L^+(P)$;

3° *la demi-caractéristique positive* $P(t)$ *est fermée en tant qu'ensemble dans* R_m.

III. — Régions invariantes.

35. Soit M un sous-ensemble *du domaine* A; nous désignons par $L^+(M)$ la réunion $\bigcup_{P \in M} L^+(P)$ et par $K^+(M)$ la réunion $\bigcup_{P \in M} K^+(P)$.

De la même manière on définit l'ensemble $L^-(M)$ et l'ensemble $K^-(M)$ et l'on pose

$$L(M) = L^+(M) \cup L^-(M) \qquad \text{et} \qquad K(M) = K^+(M) \cup K^-(M).$$

Comme nous avons, pour tout point P du domaine A,

$$L^+(P) \subset \overline{A}, \qquad L^-(P) \subset \overline{A}, \qquad \ldots.$$

nous avons

$$L^+(M) \subset A, \qquad L^-(M) \subset A, \qquad \ldots.$$

Définition. — *Soit* M *un sous-ensemble du domaine* A, *tel que* $M(t)$ *soit défini pour toute valeur de* t, $-\infty < t < \infty$; *nous appelons l'ensemble* M *région invariante, ou simplement invariant, si l'on a*

$$M(t) = M$$

pour toute valeur de t, $-\infty < t < \infty$, *et si l'on a*

$$L(M) \subset M.$$

Nous remarquons que, même si chaque ensemble $L^+(P)$ est fermé, la réunion $L^-(M)$ n'est pas toujours fermée, en accord avec la théorie générale des ensembles.

36. Soit M un sous-ensemble du domaine A; supposons qu'il existe un nombre positif ε, tel que $M(t)$ soit défini et contenu dans M pour $|t| < \varepsilon$; je dis que $M(t)$ est défini pour toute valeur de t, $-\infty < t < \infty$, et que l'on a

$$M(t) = M \qquad \text{pour} \qquad -\infty < t < \infty.$$

En effet, soient t_0 une valeur positive quelconque de t inférieure à ε et P un point quelconque de l'ensemble M. Désignons par P_0 le point $P(t_0)$, de sorte que P_0 appartient à l'ensemble $M(t_0)$.

L'hypothèse $M(t_0) \subset M$ entraîne $P_0 \in M$, de sorte que $P_0(t) = P(t_0 + t)$ est défini et contenu dans M pour $|t| < \varepsilon$; en conséquence, d'après le n° 9, $P(t)$ est défini et contenu dans M pour $-\varepsilon < t < t_0 + \varepsilon$. Or, t_0 peut prendre toute valeur positive inférieure à ε, donc $P(t)$ est défini et contenu dans M pour $-\varepsilon < t < 2\varepsilon$.

Ainsi de suite, on démontre que $P(t)$ est défini et contenu dans M pour $-\varepsilon < t < n\varepsilon$, n étant un nombre entier quelconque; en conséquence $P(t)$ est défini et contenu dans M pour toute valeur positive de t.

De même on démontre que $P(t)$ est défini et contenu dans M pour toute valeur négative de t, et en conséquence pour toute valeur positive ou négative de t.

Supposons que, pour une valeur t_0 de t, $M - M(t_0)$ ne soit pas vide, et désignons par P un point de l'ensemble $M - M(t_0)$; l'hypothèse $P \in M$ entraîne $P_0 = P(-t_0) \in M$, d'où l'on a

$$P_0(t_0) = P \in M(t_0).$$

ce qui est en contradiction avec la conséquence directe $P \notin M(t_0)$ de l'hypothèse $P \in M - M(t_0)$.

Donc nous avons le

LEMME. — *Soit* M *un sous-ensemble du domaine* A ; *si* $M(t)$ *est défini et contenu dans* M *pour* $|t| < \varepsilon$, ε *étant un nombre positif,* $M(t)$ *est défini et coïncide avec l'ensemble* M *pour toute valeur positive ou négative de* t.

37. THÉORÈME. — *Pour qu'un sous-ensemble* M *du domaine* A *soit invariant, il faut et il suffit que, pour tout point* P *de l'ensemble* M, *on ait*

$$K(P) = L(P) \cup P(t) \cup P(s) \subset M.$$

En effet, si M est invariant, pour tout point P de l'ensemble M, $P(t)$ est défini et contenu dans M pour toute valeur positive ou négative de t et en outre nous avons $L(P) \subset M$, donc nous avons

$$K(P) = L(P) \cup P(t) \cup P(s) \subset M.$$

Réciproquement, supposons que, pour tout point P de l'ensemble M, on ait

$$L(P) \cup P(t) \cup P(s) \subset M ;$$

M étant contenu dans A, on a $L(P) \subset A$, donc la solution $P(t)$ est définie pour toute valeur de t. Or, l'hypothèse $P(t) \cup P(s) \subset M$ pour tout point de M entraîne $M(t) \subset M$, pour toute valeur de t ; donc, d'après le lemme précédent, on a

$$M(t) = M$$

pour toute valeur de t.

En outre l'autre hypothèse $L(P) \subset M$ pour tout point P de M entraîne $L(M) \subset M$, ce qui achève la démonstration.

38. Le théorème du numéro précédent montre que la région invariante, à laquelle un point P du domaine A appartient, contient l'ensemble K(P). En conséquence, si K(P) contient un point de la frontière Ȧ du domaine A, soit Q, il n'existe pas de région invariante contenant le point P, puisque $Q(t)$ n'est pas défini.

Supposons que K(P) soit disjoint d'avec la frontière Ȧ du domaine A, c'est-à-dire que K(P) soit contenu dans le domaine A, de sorte que la solution $P(t)$ soit définie pour toute valeur de t, $-\infty < t < \infty$. Si l'on désigne par Q un point quelconque de l'ensemble $L(P) \subset K(P)$, on a

$$K(Q) \subset K(P),$$

$Q(t)$ étant défini pour toute valeur de t, $-\infty < t < \infty$, d'après le n° 31 ; d'autre part, si Q est un point de la caractéristique $P(t) \cup P(s)$, on a $K(Q) = K(P)$, et $Q(t)$ est défini pour toute valeur de t, $-\infty < t < \infty$.

Donc $K(P)$ est une région invariante et d'ailleurs, la plus petite parmi les régions invariantes contenant le point P.

Ainsi nous avons le

THÉORÈME. — *Pour qu'il existe une région invariante contenant un point* P *du domaine* A, *il faut et il suffit que l'ensemble* $K(P)$ *soit contenu dans le domaine* A.

S'il en existe au moins une, $K(P)$ *est la plus petite région invariante contenant le point* P.

39. THÉORÈME. — *Si les ensembles* $M_i (i \in I)$ *sont des régions invariantes*, I *désignant l'ensemble d'indices, la réunion* $\bigcup_{i \in I} M_i$ *et l'intersection* $\bigcap_{i \in I} M_i$ *sont également invariantes.*

Si M_1 *et* M_2 *sont deux régions invariantes*, M_2 *étant contenu dans* M_1, *l'ensemble* $M_1 - M_2$ *est invariant, pourvu que* $M_1 - M_2$ *soit fermé.*

En effet, soit P un point quelconque de la réunion $\bigcup_{i \in I} M_i$: pour un certain indice $k \in I$, on a $P \in M_k$: l'hypothèse que M est invariant entraîne que, $P(t)$ étant défini pour $-\infty < t < \infty$, on a

$$K(P) \cdot L(P) \cup P(t) \cup P(s) \subset M_k,$$

d'où

$$K(P) \subset \bigcup_{i \in I} M_i;$$

or, P est arbitraire, donc $\bigcup_{i \in I} M_i$ est invariant, d'après le n° 37.

Soit P un point quelconque de l'intersection $\bigcap_{i \in I} M_i$, de sorte que le point P appartient à M_k pour tout indice $k \in I$, donc, $P(t)$ étant défini pour $-\infty < t < \infty$, on a, pour tout indice $k \in I$, $K(P) \subset M_k$, d'où

$$K(P) \subset \bigcap_{i \in I} M_i.$$

Comme P est arbitraire $\bigcap_{i \in I} M_i$ est invariant.

Soit P un point quelconque de l'ensemble $M_1 - M_2$, de sorte que l'on a $P \in M_1$, $P \notin M_2$. L'hypothèse que M_1 est invariant entraîne que l'on a $K(P) \subset M_1$ et que $P(t)$ est défini pour $-\infty < t < \infty$.

Je dis que l'on a

$$\{P(t) \cup P(s)\} \cap M_2 = 0,$$

de sorte que l'on a

$$P(t) \cup P(s) \subset M_1 - M_2.$$

En effet, dans le cas contraire, pour une valeur t_0 de t, on aurait $P(t_0) \in M_2$.

Désignons par P_0 le point $P(t_0)$, de sorte que P_0 appartient à M_2. Comme, par hypothèse, M_2 est invariant, nous avons

$$P_0(t) \cup P_0(s) \subset M_2,$$

en particulier,

$$P = P_0(-t_0) \in M_2,$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $P \in M_1 - M_2$. Donc nous avons

$$P(t) \cup P(s) \subset M_1 - M_2$$

pour tout point P de l'ensemble $M_1 - M_2$.

Or, si $M_1 - M_2$ est fermé, nous avons

$$K(P) = \overline{P(t) \cup P(s)} \subset M_1 - M_2$$

pour tout point P de l'ensemble $M_1 - M_2$, donc la démonstration est achevée.

40. Théorème. — *Si* M *est une région invariante dont la fermeture* M *est contenue dans* A, *la fermeture* M *est une région invariante.*

En effet, si P est un point de M, $K(P) \subset M$ est trivial. Donc nous pouvons supposer que P est un point de $\overline{M} - M$; alors il existe une suite $\{P_n\}$ de points de l'ensemble M qui converge vers le point P pour $n \to \infty$. Soit $P(t_0)$ un point quelconque de la caractéristique totale $P(t) \cup P(s)$; d'après le n° 11, on a $\lim_{n \to \infty} P_n(t) = P(t_0)$. Or, les points P_n appartenant à l'ensemble M, on a $P_n(t_0) \in M$, puisque, par hypothèse, M est invariant. Donc nous avons $P(t_0) \in \overline{M}$. Comme t_0 est arbitraire, nous avons

$$P(t) \cup P(s) \subset \overline{M}, \qquad \text{d'où} \qquad K(P) = \overline{P(t) \cup P(s)} \subset \overline{M}.$$

Or, P est un point arbitraire de l'ensemble $\overline{M}$, donc $\overline{M}$ est invariant.

Comme conséquence directe des deux théorèmes précédents, on a le

Corollaire. — *Si* B *est un sous-domaine invariant du domaine* A *dont la fermeture* B *est contenue dans* A, *la fermeture* B *et la frontière* $\dot{B}$ *du domaine* B *sont invariantes.*

CHAPITRE III.

Prolongement.

1. Prolongement indirect.

41. Définition. — *Soit* P *un point de la fermeture* $\overline{A}$ *du domaine* A ; *nous appelons un point* Q *point de prolongement indirect au sens positif du point* P, *s'il existe une suite* $\{P_n\}$ *de points du domaine* A *et une suite* $\{t_n\}$ *de valeurs non*

négatives de t, telles que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} P_n(t_n) = Q.$$

On définit de même les points de prolongement indirect au sens négatif d'un point de la fermeture A.

Nous désignons par $D^+(P)$ *et par* $D^-(P)$ *les ensembles des points de prolongement du point* P *au sens positif et au sens négatif respectivement, et nous posons*

$$D(P) = D^+(P) \cup D^-(P).$$

THÉORÈME. — *Si* P *est un point de la fermeture* A *du domaine* A, *l'ensemble* $D^+(P)$ *contient le point* P *et, de plus, si* P *appartient au domaine* A, *il contient la demi-caractéristique positive* $P(t)$.

En effet, puisque P est un point de la fermeture A du domaine A, il existe une suite $\{P_n\}$ de points du domaine A qui converge vers P pour $n \to \infty$. Posons $t_n = 0$; nous avons $P_n(t_n) = P_n$, d'où $\lim_{n\to\infty} P_n(t_n) = P$; par conséquent P est un point de l'ensemble $D^+(P)$.

Supposons que P soit un point du domaine A, de sorte que la solution $P(t)$ soit définie pour $-\alpha < t < \beta$. Soit t_0 une valeur positive quelconque inférieure à β ; posons

$$P_n = P \qquad \text{et} \qquad t_n = t_0 ;$$

on voit facilement que l'on a

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} P_n(t_n) = P(t_0).$$

Par conséquent $P(t_0)$ appartient à $D^+(P)$. Or, t_0 est une valeur positive quelconque inférieure à β, donc la demi-caractéristique positive $P(t)$ est contenue dans $D^+(P)$.

12. Soit Q un point quelconque de l'ensemble $D^+(P)$, P étant un point de la fermeture $\bar{A}$ du domaine A ; supposons que le point Q appartienne au domaine A, de sorte que la solution $Q(t)$ soit définie pour $-a < t < b$, a, b étant positifs ou infinis. Soit t_0 une valeur quelconque de t comprise entre $-a$ et b, et posons $Q_0 = Q(t_0)$.

Désignons par $U(Q_0)$ un voisinage quelconque du point Q_0 ; d'après le théorème du n° 11, pour un voisinage assez petit $U(Q)$ du point Q, on a

$$U(Q)(t_0) \subset U(Q_0).$$

Or, par hypothèse, Q appartient à $D^+(P)$, donc il existe une suite $\{P_n\}$ de points du domaine A et une suite $\{t_n\}$ de valeurs non négatives de t, telles que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} P_n(t_n) = Q,$$

d'où

$$P_n(t_n) \in U(Q)$$

pour n assez grand.

Par conséquent, on a, pour n assez grand,

$$P_n(t_n + t_0) \in U(Q)(t_0) \subset U(Q_0), \qquad \text{d'où} \qquad \lim_{n \to \infty} P_n(t_n + t_0) = Q_0 = Q(t_0).$$

Donc, si l'on peut extraire une infinité d'éléments non négatifs $t'_n + t_0$ de la suite $\{t_n + t_0\}$, $Q(t_0)$ appartient à l'ensemble $D^+(P)$.

Posons

$$\lim_{n \to \infty} t_n = \bar{t} \geq 0,$$

de sorte que, si l'on désigne par ε un nombre positif quelconque, on a, pour n assez grand,

$$t_n > \bar{t} - \varepsilon, \qquad \text{d'où} \qquad t_n + t_0 > 0,$$

si l'on a $t_0 > -\bar{t}$; en conséquence $Q(t_0)$ appartient à $D^+(P)$.

Supposons d'abord que l'on ait $-a < -\bar{t} \leq 0$, de sorte que $Q(-\bar{t})$ soit défini et appartienne à la demi-caractéristique négative $Q(s)$.

D'après la définition de $\bar{t}$ donnée ci-dessus, on peut extraire une suite partielle $\{t_{n'}\}$ de la suite $\{t_n\}$, telle que l'on ait $\lim_{n' \to \infty} t_{n'} = \bar{t}$, de sorte que l'on ait

$$\lim_{n' \to \infty} (t_{n'} - \bar{t}) = 0.$$

Désignons par $Q_{n'}$ les points $P_{n'}(t_{n'})$, de sorte que l'on a

$$Q_{n'}(-\bar{t}) = P_{n'}(t_{n'} - \bar{t});$$

d'autre part nous avons

$$\lim_{n' \to \infty} Q_{n'} = Q \qquad \text{et} \qquad \lim_{n' \to \infty} Q_{n'}(-\bar{t}) = Q(-\bar{t}).$$

Or, on a, pour n' assez grand,

$$Q_{n'}(-t_{n'}) = P(t_{n'} - t_{n'}) = P, \qquad \text{d'où} \qquad \lim_{n' \to \infty} Q_{n'}(-t_{n'}) = Q(-\bar{t}) = \lim_{n' \to \infty} P_{n'} = P,$$

d'après le n° 12, puisque l'on a $\lim_{n' \to \infty} (-t_{n'}) = -t$, et que la suite $\{P_{n'}\}$ est une suite partielle de la suite $\{P_n\}$, cette dernière étant convergente vers P.

L'égalité $Q(-\bar{t}) = P$ signifie que le point P appartient à la demi-caractéristique négative $Q(s)$, ce qui revient à dire que le point Q appartient à la demi-caractéristique positive $P(t)$, et l'on a $Q = P(\bar{t})$. Donc la condition $-a < -\bar{t} \leq 0$ est équivalente à la condition $0 \leq \bar{t} < \beta$.

Supposons maintenant que l'on ait

$$\lim_{n \to \infty} t_n = \bar{t} = \alpha;$$

pour toute valeur t_0 de t, $-a < t_0 < b$, il existe une infinité d'éléments non négatifs $t_n + t_0$, donc la caractéristique totale $Q(t) \cup Q(s)$ est contenue dans $D^+(P)$.

En conséquence, s'il existe une suite $\{t_n\}$ de valeurs non négatives de t, telle que l'on ait

$$\lim_{n \to \infty} P_n(t) = Q \qquad \text{et} \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}} t_n \geqq a,$$

avec une certaine suite $\{P_n\}$ de points du domaine A qui converge vers le point P pour $n \to \infty$, la caractéristique totale $Q(t) \cup Q(s)$ est contenue dans $D^+(P)$.

Ainsi nous avons démontré le théorème suivant :

Théorème. — *Soit* Q *un point quelconque de l'ensemble* $D^+(P)$, P *étant un point de la fermeture* $\bar{A}$ *du domaine* A ; *si le point* Q *appartient au domaine* A, *ou bien la caractéristique totale* $Q(t) \cup Q(s)$ *est contenue dans* $D^+(P)$, *ou bien il existe une valeur* $-\bar{t}$, $0 \leqq \bar{t} < a$, *telle que* $Q(t)$ *soit contenu dans* $D^+(P)$ *pour* $-\bar{t} \leqq t < b$. *Pour que l'on soit dans le second cas de l'alternative, il faut et il suffit que le point* Q *soit un point* $P(\bar{t})$, $\bar{t} \geqq 0$, *de la demi-caractéristique positive* $P(t)$, P *appartenant au domaine* A *et que l'on ait*

$$0 \leqq \bar{t} = \overline{\lim_{n \to \infty}} t_n < \beta$$

pour toute suite $\{t_n\}$ *telle que l'on ait*

$$\lim_{n \to \infty} P_n(t_n) = Q,$$

avec une certaine suite $\{P_n\}$ *de points du domaine* A *qui converge vers le point* P *pour* $n \to \infty$.

43. Considérons d'un peu plus près le second cas de l'alternative du théorème précédent, et conservons les notations. On peut cependant supposer sans restreindre la généralité que l'on a

$$\lim_{n \to \infty} t_n = \bar{t}.$$

Soit P′ un point quelconque de l'ensemble $D^+(P)$ n'appartenant pas à la demi-caractéristique positive $P(t)$, de sorte qu'il existe une suite $\{t'_n\}$ de valeurs non négatives de t, telle que l'on ait

$$\lim_{n \to \infty} P'_n(t'_n) = P', \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}} t' = t' \geqq \beta,$$

avec une certaine suite $\{P'_n\}$ de points du domaine A qui converge vers le point P pour $n \to \infty$.

Désignons par Q_n les points $P'_n(t_n)$ $(n = 1, 2 \dots)$, de sorte que l'on a, d'après le n° 12,

$$\lim_{n \to \infty} Q_n = \lim_{n \to \infty} P'_n(t_n) = Q = P(\bar{t}),$$

puisque l'on a $\lim_{n \to \infty} P'_n = P$ et $\lim_{n \to \infty} t_n = \bar{t}$, par hypothèse. Or, nous avons

$$\lim_{n \to \infty} Q_n(\tau_n) = \lim_{n \to \infty} P'_n(t_n + \tau_n) = P',$$

où τ_n désignent les différences $t'_n - t_n$, qui sont positives pour n assez grand, puisque, comme on l'a vu, $\lim_{n \to \infty} t'_n$ est au moins égale à β, donc supérieure à $\bar{t}$.

Par conséquent P' appartient à $D^+(Q)$ et d'ailleurs P' n'appartient pas à la demi-caractéristique positive $Q(t)$, puisque cette dernière est contenue dans la demi-caractéristique positive $P(t)$, qui, par hypothèse, ne contient pas le point P'.

Réciproquement, supposons que Q' soit un point de l'ensemble $D^+(P)$ n'appartenant pas à la demi-caractéristique positive $Q(t)$. D'après le théorème précédent, il existe une suite $\{\tau_n\}$ de valeurs non négatives de t, telle que l'on ait

$$\lim_{n \to \infty} Q'_n(\tau_n) = Q', \qquad \lim_{n \to \infty} \tau_n \geqq b,$$

où $\{Q'_n\}$ désigne une certaine suite de points du domaine A qui converge vers Q pour $n \to \infty$.

Comme nous avons $Q = P(\bar{t})$, nous avons $\lim_{n \to \infty} Q'_n(-\bar{t}) = P$; donc, si l'on désigne par P''_n les points $Q'_n(-\bar{t})$, on a

$$\lim_{n \to \infty} P''_n = P \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to \infty} P''_n(\tau_n + \bar{t}) = \lim_{n \to \infty} Q'_n(\tau_n) = Q'.$$

Or, les valeurs t_n sont non négatives et l'on a $\lim_{n \to \infty} t_n \geqq b$, donc on a

$$\lim_{n \to \infty} (\tau_n + \bar{t}) \geqq b + \bar{t}.$$

Puisque, par hypothèse, on a $Q = P(\bar{t})$, on a

$$\beta = b + \bar{t}, \qquad \text{d'où} \qquad \lim_{n \to \infty} (\tau_n + \bar{t}) \geqq \beta,$$

c'est-à-dire que le point Q est un point de l'ensemble $D^+(P)$ n'appartenant pas à la demi-caractéristique positive $P(t)$.

Par conséquent nous avons le

THÉORÈME. — *Soit* Q *un point de la demi-caractéristique positive* $P(t)$, P *étant un point du domaine* A ; *si la demi-caractéristique négative* $Q(s)$ *n'est pas contenue dans l'ensemble* $D^+(P)$, *l'ensemble* $D^+(Q) - Q(t)$ *coïncide avec l'ensemble*

$D^+(P) = P(t)$, *où* $Q(t)$ *et* $P(t)$ *désignent les demi-caractéristiques positives partant des points* Q *et* P *respectivement.*

44. Revenons au premier cas de l'alternative du théorème du n° 42, et supposons que Q soit un point de la demi-caractéristique positive $P(t)$, P étant un point du domaine A, de sorte que l'on ait $P(t_0) = Q$, où t_0 désigne une certaine valeur non négative de t, $0 \leq t_0 < \beta$.

Soit Q′ un point quelconque de la caractéristique positive $P(t)$, de sorte que l'on ait $Q' = P'(t')$, où t' est une certaine valeur non négative de t ; je dis qu'il existe une suite $\{t'_n\}$ de valeurs non négatives de t et une suite $\{P'_n\}$ de points du domaine A qui converge vers le point P pour $n \to \infty$, telles que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} P'_n(t'_n) = Q' \qquad \text{et} \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, t'_n \geq \beta.$$

En effet, d'après le théorème du n° 42, il existe une suite $\{t_n\}$ de valeurs non négatives de t, telle que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} P_n(t_n) = Q \qquad \text{et} \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, t_n = \bar{t} \geq \beta,$$

où $\{P_n\}$ désigne une certaine suite de points du domaine A qui converge vers P pour $n \to \infty$. Posons

$$P_n = P'_n \qquad \text{et} \qquad t'_n = t_n + (t' - t_0),$$

de sorte que l'on a

$$\lim_{n\to\infty} P'_n(t'_n) = \lim_{n\to\infty} P_n(t_n + (t' - t_0)) = Q';$$

donc il ne reste plus à démontrer que la condition

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, t'_n \geq \beta.$$

Si $t' - t_0$ est non négatif, ou si β est infini, la démonstration est déjà achevée. Supposons donc que $t' - t_0$ soit négatif et que β soit fini. Or, les inégalités $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, t_n \geq \beta > t_0$ entraînent

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, t'_n = \bar{t}' \geq \beta + (t' - t_0) > t',$$

donc, si nous avions $\lim_{n\to\infty} t'_n = \bar{t}' < \beta$, nous aurions

$$\lim_{n\to\infty} P'_n(t'_n) = P(\bar{t}') = Q' = P(t'),$$

c'est-à-dire que $P(t)$ serait périodique, de sorte que β serait infini, contrairement à notre hypothèse. Donc on a $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, t' \geq \beta$.

Par conséquent, d'après le théorème du n° 42, la caractéristique totale $Q'(t) \cup Q'(s)$ est également contenue dans l'ensemble $D^+(P)$, pour tout point Q′ de la caractéristique positive $P(t)$. Je dis en outre que $D^+(Q)$ coïncide avec

$D^+(P)$. En effet, soit P' un point quelconque de l'ensemble $D^+(Q)$, de sorte qu'il existe une suite $\{t'_n\}$ de valeurs non négatives de t, telle que l'on ait $\lim_{n\to\infty} Q'_n(t'_n) = P'$, où Q' désigne une certaine suite de points du domaine A qui converge vers le point $Q = P(\bar{t})$ pour $n \to \infty$. A cause de cette dernière convergence, on a $\lim_{n\to\infty} Q'_n(-\bar{t}) = P$. Désignons par P_n les points $Q'_n(-\bar{t})$ $(n = 1, 2, \ldots)$, de sorte que l'on a

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} P_n(t'_n + \bar{t}) = P' ;$$

donc le point P' appartient à $D^+(P)$.

Soit Q' un point quelconque de l'ensemble $D^+(P)$, de sorte qu'il existe une suite $\{t_n\}$ de valeurs non négatives de t, telle que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} Q'_n(t_n) = Q' \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} t_n \geqq \beta,$$

avec une certaine suite $\{Q'_n\}$ de points du domaine A qui converge vers le point P pour $n \to \infty$. Désignons par Q''_n les points $Q'_n(\bar{t})$ $(n = 1, 2, \ldots)$; on a

$$\lim_{n\to\infty} Q''_n(t_n - \bar{t}) = Q' \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} Q''_n = Q,$$

puisque l'on a $Q'_n = Q''_n(-t)$; et les deux inégalités $\lim_{n\to\infty} t_n \geqq \beta$ et $t < \beta$ entraîne $t_n - \bar{t} \geqq 0$ pour n assez grand, ce qui achève la démonstration.

En conséquence nous avons le

THÉORÈME. — *Soit* P *un point du domaine* A ; *si une caractéristique totale passant par un point* Q *de la demi-caractéristique positive* $P(t)$ *est contenue dans l'ensemble* $D^+(P)$, *pour tout point* Q' *de la caractéristique totale* $P(t) \cup P(s)$, *l'ensemble* $D^+(Q')$ *coïncide avec l'ensemble* $D^+(P)$.

En rappelant le second cas de l'alternative du théorème du n° 42, on voit facilement le

THÉORÈME. — *Soit* P *un point du domaine* A ; *supposons qu'il existe une suite* $\{t_n\}$ *de valeurs non négatives de* t, *dont la limite inférieure soit supérieure ou égale à* β *et une suite* $\{P_n\}$ *de points du domaine* A *qui converge vers le point* P *pour* $n \to \infty$, *ces deux limites étant telles que la suite* $\{P_n(t_n)\}$ *converge, pour* $n \to \infty$, *vers un point de la demi-caractéristique positive* $P(t)$. *Alors la caractéristique totale* $P(t) \cup P(s)$ *est contenue dans l'ensemble* $D^+(P)$; *si l'on désigne par* Q *un point quelconque de la caractéristique totale* $P(t) \cup P(s)$, *l'ensemble* $D^+(Q)$ *coïncide avec l'ensemble* $D^+(P)$.

45. THÉORÈME. — *Soit* P *un point de la fermeture* $\bar{A}$ *du domaine* A ; *les ensembles* $D^+(P)$, $D^-(P)$ *et* $D(P)$ *sont* : 1° *fermés et* 2° *connexes.*

En effet, soit Q un point quelconque de la fermeture $\overline{D^+(P)}$, de sorte qu'il existe une suite $\{Q_n\}$ de points de l'ensemble $D^+(P)$ qui converge vers Q pour $n \to \infty$. L'hypothèse $Q_n \in D^+(P)$ entraîne que, pour chaque nombre n, il existe une suite $\{t_{nk}\}$ de valeurs non négatives de t et une suite $\{P_{nk}\}$ de points du domaine A, telles que l'on ait

$$\lim_{k\to\infty} P_{nk}(t_{nk}) = Q_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{k\to\infty} P_{nk} = P \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Soient $\{U_l(P)\}$ et $\{U_l(Q)\}$ deux suites de voisinages de P et Q qui tendent respectivement vers P et Q pour $l \to \infty$; l'hypothèse $\lim_{n\to\infty} Q_n = Q$ montre que l'on a $Q_n \in U_l(Q)$ pour n assez grand. Soit n_l un nombre n qui satisfasse à cette condition ; si l'on désigne par $U(Q_{n_l})$ un voisinage assez petit du point Q_{n_l}, on a $U(Q_{n_l}) \subset U_l(Q)$. Or, les hypothèses $\lim_{k\to\infty} P_{nk} = P$ pour tout nombre n et $\lim_{k\to\infty} P_{nk}(t_{nk}) = Q_n$ entraînent, pour k assez grand,

$$P_{n_l k} \in U_l(P) \qquad \text{et} \qquad P_{n_l k}(t_{n_l k}) \in U(Q_{n_l}) \subset U_l(Q).$$

Soit k_l un nombre k qui satisfasse à cette condition ; posons

$$P_{n_l k_l} = P_l, \qquad t_{n_l k_l} = t_l,$$

de sorte que t_l soit non négatif et que l'on ait

$$P_l \in U_l(P) \qquad \text{et} \qquad P_l(t_l) \in U_l(Q).$$

Comme les deux suites $\{U_l(P)\}$ et $\{U_l(Q)\}$ tendent respectivement vers P et Q pour $l \to \infty$, les suites $\{P_l\}$ et $\{P_l(t_l)\}$ ainsi déterminées convergent respectivement vers P et Q pour $l \to \infty$.

Par conséquent le point Q appartient à l'ensemble $D^+(P)$. Donc nous avons $\overline{D^+(P)} \subset D^+(P)$, ce qui montre que l'ensemble $D^+(P)$ est fermé.

De la même manière on démontre que l'ensemble $D^-(P)$ est fermé ; en conséquence la réunion $D(P)$ des deux ensembles fermés $D^+(P)$ et $D^-(P)$ est fermée.

Étant donné que $D^+(P)$ est fermé, si $D^+(P)$ n'était pas connexe, il existerait deux ensembles fermés non vides et disjoints, soient F_1 et F_2, dont la réunion serait $D^+(P)$:

$$D^+(P) = F_1 \cup F_2, \qquad F_i \neq \emptyset \qquad (i = 1, 2), \qquad F_1 \cap F_2 = \emptyset.$$

Soient $U(F_1)$ et $U(F_2)$ deux voisinages des ensembles fermés F_1 et F_2 respectivement, tels que l'on ait

$$\overline{U(F_1)} \cap \overline{U(F_2)} = \emptyset.$$

Supposons que le point P appartienne à l'ensemble F_1 et désignons par Q un point de l'ensemble F_2. La relation $Q \in D^+(P)$ entraîne qu'il existe une suite $\{t_n\}$

de valeurs non négatives de t et une suite $\{P_n\}$ de points du domaine A, telles que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} P_n(t_n) = Q,$$

de sorte que l'on ait

$$P_n \in U(F_1) \qquad \text{et} \qquad P_n(t_n) \in U(F_2)$$

pour n assez grand.

Or, les solutions $P_n(t)$ sont continues, donc pour chaque valeur assez grande de n, il existe une valeur τ_n de t comprise entre zéro et t_n, telle que l'on ait

$$P_n(\tau_n) \notin \overline{U(F_1)} \cup \overline{U(F_2)}.$$

Soit Q′ un point d'accumulation de l'ensemble $\{P_n(\tau_n)\}$; on voit que l'on a

$$Q' \notin U(F_1) \cup U(F_2),$$

donc, on peut extraire une suite $\{P_{n'}(\tau_{n'})\}$ de l'ensemble $\{P_n(\tau_n)\}$, de manière que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} P_{n'}(\tau_{n'}) = Q'.$$

Or, la suite $\{P_n\}$ converge vers P pour $n \to \infty$, donc sa suite partielle $\{P_{n'}\}$ converge vers P pour $n' \to \infty$, ce qui montre que le point Q′ appartient à $D^+(P)$. Puisque Q′ n'appartient ni à $U(F_1)$, ni à $U(F_2)$, ni *a fortiori* à F_1 ou à F_2, cette conclusion $Q' \in D^+(P)$ conduit à une contradiction avec l'hypothèse

$$D^+(P) = F_1 \cup F_2.$$

Par conséquent $D^+(P)$ est connexe.

On démontre de même que l'ensemble $D^-(P)$ est connexe. Étant donné que les deux ensembles $D^+(P)$ et $D^-(P)$ sont connexes, leur réunion D(P) est connexe, puisque le point P appartient à $D^+(P)$ ainsi qu'à $D^-(P)$.

46. Soit P un point quelconque de la fermeture $\overline{A}$ du domaine A; si Q est un point de l'ensemble $D^+(P)$ appartenant au domaine A qui ne soit pas situé sur la demi-caractéristique positive $P(t)$, on a, d'après le théorème du n° 42,

$$Q(t) \cup Q(s) \subset D^+(P).$$

Or, l'ensemble $D^+(P)$ est fermé, donc nous avons

$$K(Q) = \overline{Q(t)} \cup \overline{Q(s)} \subset D^+(P).$$

Même si Q appartient à la demi-caractéristique positive $P(t)$, on a $Q(t) \subset D^+(P)$, d'où

$$K^+(Q) = \overline{Q(t)} \subset D^+(P).$$

En conséquence nous avons le

THÉORÈME. — *Soit* P *un point de la fermeture* $\bar{A}$ *du domaine* A; *si* Q *est un point de l'ensemble* $D^+(P)$ *appartenant au domaine* A, *nous avons toujours*

$$K^+(Q) \subset D^+(P).$$

En outre si Q *n'appartient pas à la demi-caractéristique positive* $P(t)$, *nous avons*

$$K(Q) = K^+(Q) \cup K^-(Q) \subset D^+(P).$$

47. THÉORÈME. — *Soient* P *et* Q *deux points de la fermeture* $\bar{A}$ *du domaine* A; *pour qu'il existe deux suites* $\{P_n\}$ *et* $\{Q_n\}$ *de points de la fermeture* $\bar{A}$, *telles que l'on ait*

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P, \qquad \lim_{n\to\infty} Q_n = Q \qquad \text{et} \qquad Q_n \in D^+(P_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

il faut et il suffit que Q *appartienne à* $D^+(P)$.

En effet, il est clair que la condition est suffisante, puisque $D^+(P_n)$ contient la demi-caractéristique positive $P_n(t)$ et le point P_n.

Pour démontrer qu'elle est nécessaire, désignons par $\{U_k(Q)\}$ une suite de voisinages du point Q qui tend vers Q pour $k \to \infty$. L'hypothèse $Q_n \in D^+(P_n)$ entraîne qu'il existe, pour chaque nombre n, une suite $\{P_{ln}\}$ de points domaine A et une suite $\{t_{ln}\}$ de valeurs non négatives de t, telles que l'on ait

$$\lim_{l\to\infty} P_{ln} = P_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{l\to\infty} P_n(t_{ln}) = Q_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Soit $\{U_k(P)\}$ une suite de voisinages du point P qui tend vers P pour $k \to \infty$; nous avons, pour n assez grand,

$$P_n \in U_k(P) \qquad \text{et} \qquad Q_n \in U_k(Q).$$

Soit $n(k)$ un nombre n qui satisfasse à ces conditions; si l'on désigne par $U(P_{n(k)})$ et $U(Q_{n(k)})$ deux voisinages assez petits des points $P_{n(k)}$ et $Q_{n(k)}$ respectivement, on a, pour l assez grand,

$$P_{ln(k)} \in U(P_{n(k)}) \subset U_k(P) \qquad \text{et} \qquad Q_{ln,k} \in U(Q_{n,k}) \subset U_k(Q).$$

Désignant par $l(k)$ un nombre l qui satisfait à ces conditions, posons

$$P_{l(k)n(k)} = P'_k, \qquad 0 < t_{l(k)n(k)} = t'_k.$$

Comme la suite $\{U_k(P)\}$ et la suite $\{U_k(Q)\}$ tendent vers P et Q respectivement pour $k \to \infty$, nous avons

$$\lim_{k\to\infty} P'_k = P \qquad \text{et} \qquad \lim_{k\to\infty} P'_k(t'_k) = Q,$$

ce qui montre que le point Q appartient à $D^+(P)$.

48. Théorème. — *Soient* P *et* Q *deux points de la fermeture* $\overline{A}$ *du domaine* A; *pour qu'il existe deux suites* $\{P_n\}$ *et* $\{Q_n\}$ *de points du domaine* A, *telles que l'on ait*

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P, \qquad \lim_{n\to\infty} Q_n = Q \qquad \text{et} \qquad Q_n \in K^+(P_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

il faut et il suffit que Q *appartienne à* $D^+(P)$.

En effet, d'après le théorème précédent, il faut que l'on ait $Q \in D^-(P)$, car l'on a

$$K^+(P_n) \subset D^+(P_n);$$

et, par définition, il suffit que l'on ait $Q \in D^+(P)$, puisque l'on a

$$K^+(P_n) \supset P_n(t).$$

49. Si M est un sous-ensemble *de la fermeture* A du domaine A, nous posons comme toujours

$$D^+(M) = \bigcup_{P\in M} D^+(P), \qquad D^-(M) = \bigcup_{P\in M} D^-(P)$$

et

$$D(M) = D^+(M) \cup D^-(M).$$

Supposons que U soit un sous-ensemble ouvert du domaine A; soit Q un point quelconque de l'ensemble $D^-(U)$, de sorte qu'il existe un point P de l'ensemble ouvert U, tel que l'on ait $Q \in D^-(P)$. D'après le théorème précédent, il existe une suite $\{P_n\}$ de points du domaine A qui converge vers P pour $n \to \infty$, et telle qu'une certaine suite $\{Q_n\}$, chaque Q_n étant extrait de l'ensemble $D^+(P_n)$, converge vers Q pour $n \to \infty$.

En conséquence on a, pour n assez grand,

$$P_n \in U \qquad \text{et} \qquad Q_n \in K^+(P_n) \subset K^+(U),$$

d'où

$$Q \in \overline{K^+(U)};$$

comme Q est un point arbitraire de l'ensemble $D^-(U)$, nous avons le

Théorème. — *Si l'on désigne par* U *un sous-ensemble ouvert du domaine* A, *on a*

$$\overline{K^+(U)} \supset D^-(U).$$

50. Supposons que M soit une région invariante et désignons par P un point de la fermeture $\overline{A}$ n'appartenant pas à la fermeture $\overline{M}$. Supposons que l'intersection de l'ensemble $D^+(P)$ et de l'intérieur $\mathring{M}$ de la région M ne soit pas vide et désignons par Q un point de l'intersection $D^+(P) \cap \mathring{M}$.

L'hypothèse $Q \in \mathring{M}$ entraîne que, pour un assez petit voisinage U(Q) de Q,

on a $U(Q) \subset \mathring{M}$ et l'hypothèse $P \notin M$ montre qu'il existe un voisinage $U(P)$ du point P, tel que l'on ait $U(P) \cap \overline{M} = \emptyset$; en conséquence on a

$$U(P) \cap U(Q) = \emptyset.$$

A cause de l'hypothèse $Q \in D^+(P)$, il existe une suite $\{t_n\}$ de valeurs non négatives de t, telle que l'on ait

$$\lim_{n \to \infty} P_n(t_n) = Q,$$

avec une certaine suite $\{P_n\}$ de points du domaine A qui converge vers P pour $n \to \infty$. Donc, pour n assez grand, on a

$$P_n \in U(P) \qquad \text{et} \qquad Q_n = P_n(t_n) \in U(Q),$$

d'où

$$Q_n \in U(Q) \subset \mathring{M} \subset M \qquad \text{et} \qquad P_n = Q_n(-t_n) \in \overline{M},$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que M est une région invariante.

Donc nous avons le

Théorème. — *Si* M *est une région invariante, pour tout point* P *en dehors de la fermeture* $\overline{M}$ *de la région* M, *l'ensemble* $D^+(P)$ *est disjoint d'avec l'intérieur* $\mathring{M}$ *de* M.

Si M est ouvert, l'intérieur $\mathring{M}$ de M coïncide avec M. En conséquence nous avons le

Corollaire. — *Si* M *est une région invariante ouverte, et si l'on désigne par* P *un point quelconque en dehors de la fermeture* $\overline{M}$ *de* M, *l'ensemble* $D^+(P)$ *est disjoint d'avec l'ensemble* M.

51. Théorème. — *Soit* P *un point du domaine* A; *si* Q *est un point de l'ensemble* $L^+(P)$, *l'ensemble* $D^+(Q)$ *ainsi que l'ensemble* $D^-(Q)$ *contiennent l'ensemble* $L^+(P)$.

En effet, soit Q′ un point quelconque de l'ensemble $L^+(P)$; comme Q appartient également à $L^+(P)$, il existe deux suites $\{t_n\}$ et $\{t'_n\}$ de valeurs de t, telles que l'on ait

$$\lim_{n \to \infty} P(t_n) = Q, \qquad \lim_{n \to \infty} P(t'_n) = Q'$$

et

$$0 \leqq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots \to \beta, \qquad 0 \leqq t'_1 < t'_2 < \ldots < t'_n < \ldots \to \beta;$$

à cause des deux dernières conditions, on peut extraire une suite partielle $\{t'_{k(n)}\}$ de la suite $\{t'_n\}$ et une suite partielle $\{t_{l(n)}\}$ de la suite $\{t_n\}$, telles que l'on ait

$$t_n < t'_{k(n)} \qquad \text{et} \qquad 0 \leqq t'_{k(1)} < t'_{k(2)} < \ldots < t'_{k(n)} < \ldots \to \beta,$$

et

$$t'_n < t_{l(n)} \qquad \text{et} \qquad 0 \leqq t_{l(1)} < t_{l(2)} < \ldots < t_{l(n)} < \ldots \to \beta,$$

pour tout nombre n.

Posons

$$P_n = P(t_n), \qquad \bar{t}_n = t'_{k(n)} - t_n > 0 \qquad \text{et} \qquad \bar{\bar{t}}_n = t'_n - t_{l(n)} < 0;$$

on voit qu'en tant que suite partielle de la suite $\{P(t'_n)\}$, chacune des deux suites $\{P_n(t_n)\}$ et $\{P_{l(n)}(\bar{\bar{t}}_n)\}$ converge vers le point Q′ pour $n \to \infty$, puisque l'on a

$$P_n(\bar{t}_n) = P(t'_n) \qquad \text{et} \qquad P_{l(n)}(\bar{\bar{t}}_n) = P(t'_n).$$

Donc nous avons

$$D^+(Q) \ni Q' \qquad \text{et} \qquad D^-(Q) \ni Q',$$

puisque nous avons

$$P_n = P(t_n) \to Q \qquad \text{pour} \quad n \to \infty.$$

Or, Q est un point arbitraire de l'ensemble $L^+(P)$, donc nous avons

$$D^+(Q) \supset L^+(P) \qquad \text{et} \qquad D^-(Q) \supset L^+(P).$$

On remarque que l'ensemble des points de prolongement indirect au sens *négatif* d'un point limite Q au sens *positif* du point P contient l'ensemble des points limites au sens *positif* du point P.

52. Considérons encore l'ensemble $D^-(P)$, P étant un point de la fermeture $\bar{A}$ du domaine A. Si l'on désigne par Q un point quelconque de l'ensemble $D^+(P)$, il existe une suite $\{P_n\}$ de points du domaine A et une suite $\{t_n\}$ de valeurs non négatives de t, telles que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} P_n(t_n) = Q.$$

Posons

$$Q_n = P_n(t_n) \qquad \text{et} \qquad t'_n = -t_n,$$

de sorte que les valeurs t'_n sont non positives, et que l'on a

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = Q \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} Q_n(t'_n) = P.$$

Par conséquent nous avons le

THÉORÈME. — *Soit* P *un point de la fermeture* A *du domaine* A; *si l'on désigne par* Q *un point quelconque de l'ensemble* $D^+(P)$, *on a*

$$D^-(Q) \ni P.$$

Nous appellerons réversibilité cette propriété du prolongement indirect.

53. Soient P un point de la fermeture $\bar{A}$ du domaine A et Q un point de l'ensemble $D^+(P)$. Le théorème précédent montre que l'on a

$$D^-(Q) \ni P;$$

donc, d'après le théorème du n° 42, si le point Q n'appartient pas à la demi-

caractéristique positive $P(t)$, ou si le point P n'appartient pas à la demi-caractéristique négative $Q(s)$, on a

$$D^-(Q) \supset P(t) \cup P(s)$$

et dans le cas contraire, on a

$$D^-(Q) \supset P(t),$$

d'où

$$D^-(Q) \supset K(P) \quad \text{et} \quad D^-(Q) \supset K^-(P)$$

respectivement.

Donc nous avons le

Théorème. — *Soit* P *un point du domaine* A; *si* Q *désigne un point de l'ensemble* $D^+(P)$, *on a*

$$D^-(Q) \supset K^+(P)$$

si le point Q *appartient à la demi-caractéristique positive* $P(t)$, *et*

$$D^-(Q) \supset K(P)$$

si le point Q *n'appartient pas à la demi-caractéristique positive* $P(t)$.

II. — Prolongement secondaire.

54. Définition. — *Soit* P *un point de la fermeture* $\bar{A}$ *du domaine* A; *on dit qu'un point* Q *est point de prolongement secondaire direct au sens positif du point* P, *s'il existe un nombre fini, soit* $N-1$, *de points* $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{N-1}$, *tels que l'on ait*

$$P_i \in D^+(P_{i-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

P_0, P_N *désignant les points* P *et* Q *respectivement.*

On définit de même les points de prolongement secondaire direct au sens négatif du point P. *Nous désignons par* $E^+(P)$ *et* $E^-(P)$ *les ensembles de points de prolongement secondaire direct du point* P *respectivement au sens positif et au sens négatif. Nous posons comme toujours*

$$E(P) = E^+(P) \cup E^-(P).$$

55. On démontre facilement le théorème suivant :

Théorème. — 1° *Soit* P *un point de la fermeture* $\bar{A}$ *du domaine* A, *on a*

$$E^+(P) \supset D^+(P) \ni P \quad \text{et} \quad E^-(P) \supset D^-(P) \ni P.$$

2° *Soit* Q *un point de l'ensemble* $E^+(P)$, P *étant un point de la fermeture* $\overline{A}$ *du domaine* A, *on a*

$$E^+(P) \supset E^+(Q) \supset D^+(Q) \ni Q \qquad et \qquad E^-(Q) \supset E^-(P) \supset D^-(P) \ni P.$$

Nous appellerons réversibilité cette dernière propriété du prolongement secondaire direct.

3° *Pour tout point* Q *de* $E^+(P)$, *si* P *est un point de la frontière* Ȧ *du domaine* A, *ou pour les points n'appartenant pas à la demi-caractéristique positive* $P(t)$, *quand bien même* P *serait un point du domaine* A, *on a*

$$E^+(P) \supset Q(t) \cup Q(s).$$

On remarque que les ensembles $E^+(P)$, $E^-(P)$ et $E(P)$ ne sont pas toujours fermés, mais on démontre facilement qu'*ils sont connexes.*

Soit M un sous-ensemble *de la fermeture* $\overline{A}$ du domaine A; on pose

$$E^+(M) = \bigcup_{P \in M} E^+(P), \qquad E^-(M) = \bigcup_{P \in M} E^-(P)$$

et

$$E(M) = E^+(M) \cup E^-(M).$$

56. Définition. — *Soit* P *un point de la fermeture* $\overline{A}$ *du domaine* A; *nous appelons un point* Q *de la fermeture* $\overline{A}$ *point de prolongement secondaire indirect au sens positif du point* P, *s'il existe deux suites* $\{P_n\}$ *et* $\{Q_n\}$ *de points de la fermeture* $\overline{A}$, *telles que l'on ait*

$$\lim_{n \to \infty} P_n = P, \qquad \lim_{n \to \infty} Q_n = Q \qquad et \qquad E^+(P_n) \ni Q_n.$$

On définit de même les points de prolongement secondaire indirect au sens négatif du point P.

Nous désignons par $F^+(P)$ *et* $F^-(P)$ *les ensembles de points de prolongement secondaire indirect du point* P *respectivement au sens positif et au sens négatif, et posons*

$$F(P) = F^+(P) \cup F^-(P).$$

Soit Q un point quelconque de l'ensemble $E^+(P)$, P étant un point de la fermeture $\overline{A}$ du domaine A; posons

$$P_n = P \qquad et \qquad Q_n = Q,$$

de sorte que l'on a

$$\lim_{n \to \infty} P_n = P, \qquad \lim_{n \to \infty} Q_n = Q, \qquad E^+(P_n) \ni Q_n,$$

ce qui montre que le point Q appartient à l'ensemble $F^+(P)$; or, Q est un point arbitraire de l'ensemble $E^+(P)$, donc nous avons le

THÉORÈME. — *Si* P *est un point de la fermeture* $\bar{A}$ *du domaine* A, *on a*

$$F^+(P) \supset E^+(P).$$

57. Soient P et Q deux points de la fermeture A du domaine A; supposons qu'il existe deux suites $\{P_n\}$ et $\{Q_n\}$ de points de la fermeture $\bar{A}$, telles que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P, \qquad \lim_{n\to\infty} Q_n = Q \qquad \text{et} \qquad F^+(P_n) \ni Q_n.$$

Soient $\{U_k(P)\}$ et $\{U_k(Q)\}$ deux suites de voisinages des points P et Q qui tendent respectivement vers les points P et Q pour $k \to \infty$; la convergence des suites $\{P_n\}$ et $\{Q_n\}$ entraîne que l'on a, pour n assez grand,

$$U_k(P) \ni P_n \qquad \text{et} \qquad U_k(Q) \ni Q_n;$$

en conséquence il existe deux voisinages $U(P_n)$ et $U(Q_n)$ des points P_n et Q_n respectivement, tels que l'on ait

$$U(P_n) \subset U_k(P) \qquad \text{et} \qquad U(Q_n) \subset U_k(Q).$$

Or, l'hypothèse $Q_n \in F^+(P_n)$ montre que, pour chaque nombre n, il existe deux suites $\{P_{ln}\}$ et $\{Q_{ln}\}$, telles que l'on ait

$$\lim_{l\to\infty} P_{ln} = P_n, \qquad \lim_{l\to\infty} Q_{ln} = Q_n \qquad \text{et} \qquad Q_{ln} \in E^+(P_{ln}),$$

donc on a, pour l et n assez grands,

$$P_{ln} \in U_k(P) \qquad \text{et} \qquad Q_{ln} \in U_k(Q).$$

Soit $[l(k), n(k)]$ une paire des deux nombres m et n, qui satisfasse à ces conditions; posons

$$P'_k = P_{l(k)n(k)}, \qquad Q'_k = Q_{l(k)n(k)},$$

de sorte que l'on a

$$\lim_{k\to\infty} P'_k = P, \qquad \lim_{k\to\infty} Q'_k = Q \qquad \text{et} \qquad Q'_k \in E^+(P_k);$$

c'est-à-dire que Q appartient à l'ensemble $F^+(P)$.

Réciproquement, si l'on désigne par Q un point de l'ensemble $F^+(P)$, il est clair qu'il existe deux suites $\{P_n\}$ et $\{Q_n\}$ de points de la fermeture $\bar{A}$, telles que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P, \qquad \lim_{n\to\infty} Q = Q \qquad \text{et} \qquad Q_n \in F^+(P_n),$$

puisque l'on a

$$E^+(P_n) \subset F^+(P_n),$$

d'après le n° 56.

Donc nous avons le

THÉORÈME. — *Soient* P *et* Q *deux points de la fermeture* $\bar{A}$ *du domaine* A; *pour*

qu'il existe deux suites $\{P_n\}$ *et* $\{Q_n\}$ *de points de la fermeture* $\overline{A}$, *telles que l'on ait*

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P, \qquad \lim_{n\to\infty} Q_n = Q \qquad \text{et} \qquad Q_n \in F^+(P_n),$$

il faut et il suffit que le point Q *appartienne à l'ensemble* $F^+(P)$. ..

58. Théorème. — *Si* P *est un point de la fermeture* $\overline{A}$ *du domaine* A, *l'ensemble* $F^+(P)$ *est :* 1° *fermé et* 2° *connexe.*

1° En effet, soit Q un point d'accumulation quelconque de l'ensemble $F^+(P)$, de sorte qu'il existe une suite $\{Q_n\}$ de points de l'ensemble $F^+(P)$, telle que l'on ait $\lim_{n\to\infty} Q_n = Q$. Posons

$$P_n = P;$$

nous avons

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P \qquad \text{et} \qquad Q_n \in F^+(P_n);$$

donc Q appartient à l'ensemble $F^+(P)$, d'après le théorème du numéro précédent. Par conséquent l'ensemble $F^+(P)$ est fermé, puisque, par hypothèse, Q est un point d'accumulation arbitraire de l'ensemble $F^+(P)$.

2° Supposons que $F^+(P)$ ne soit pas connexe; nous pouvons décomposer l'ensemble $F^+(P)$ qui est fermé, d'après ce que nous venons de démontrer, en deux ensembles fermés non vides et disjoints F_1 et F_2 :

$$F^+(P) = F_1 \cup F_2, \qquad F_i \neq \emptyset \qquad (i = 1, 2), \qquad F_1 \cap F_2 = \emptyset.$$

Soient $U(F_1)$ et $U(F_2)$ deux voisinages des deux ensembles fermés F_1 et F_2 respectivement, tels que l'on ait

$$\overline{U(F_1)} \cap \overline{U(F_2)} = \emptyset.$$

Supposons que le point P appartienne à l'ensemble F_1, et désignons par Q un point de l'ensemble F_2.

Comme l'on a $Q \in F^+(P)$, il existe une suite $\{Q_n\}$ de points, dont chaque élément Q_n appartient à l'ensemble $E^+(P_n)$, où $\{P_n\}$ est une certaine suite qui converge vers le point P, et telle que l'on ait $\lim_{n\to\infty} Q_n = Q$. Donc nous avons

$$P_n \in U(F_1) \qquad \text{et} \qquad Q_n \in U(F_2),$$

pour n assez grand. A cause de ces relations et de la connexité de l'ensemble $E^+(P_n)$, on peut extraire un point Q'_n de chaque ensemble $E^+(P_n)$, tel que l'on ait, pour n assez grand,

$$Q'_n \notin \overline{U(F_1)} \cup \overline{U(F_2)};$$

en conséquence on peut extraire une suite partielle $\{Q'_{n'}\}$ de la suite $\{Q'_n\}$, telle que l'on ait

$$\lim_{n'\to\infty} Q'_{n'} = Q',$$

Q' étant un point de la fermeture $\bar{A}$ n'appartenant ni à $U(F_1)$, ni à $U(F_2)$, ni *a fortiori* à F_1 ou F_2.

Or, la suite $\{P_{n'}\}$, en tant que suite partielle de la suite $\{P_n\}$, doit converger vers le point P, donc le point Q' est un point de l'ensemble $F^+(P)$, puisque l'on a

$$Q'_{n'} \in E^+(P_{n'}),$$

ce qui nous conduit à une contradiction avec l'hypothèse

$$F^+(P) = F_1 \cup F_2.$$

Par conséquent $F^+(P)$ est connexe.

Corollaire. — *Soit* P *un point de la fermeture* $\bar{A}$ *du domaine* A, *on a*

$$F^-(P) \supset \overline{E^+(P)}.$$

En effet, d'après le n° 56, nous avons

$$F^+(P) \supset E^+(P);$$

or, $F^+(P)$ est fermé, donc nous avons

$$F^+(P) \supset \overline{E^+(P)}.$$

59. Théorème. — *Soit* P *un point de la fermeture* $\bar{A}$ *du domaine* A; *si* Q *est un point de l'ensemble* $F^+(P)$, *on a*

$$F^-(Q) \ni P.$$

Nous appellerons réversibilité cette propriété du prolongement secondaire indirect.

En effet, il existe une suite $\{Q_n\}$ de points de la fermeture $\bar{A}$, qui converge vers Q pour $n \to \infty$, et dont chaque élément Q_n est extrait de l'ensemble $E^+(P_n)$, $\{P_n\}$ étant une certaine suite de points de la fermeture $\bar{A}$ qui converge vers le point P pour $n \to \infty$. Or, en raison de la réversibilité du prolongement secondaire direct, on a

$$E^-(Q_n) \ni P_n, \qquad \text{d'où} \qquad F^-(Q) \ni P.$$

60. Soit M un ensemble *contenu dans la fermeture* $\bar{A}$ du domaine A; nous posons, comme toujours,

$$F^+(M) = \bigcup_{P \in M} F^+(P), \qquad F^-(M) = \bigcup_{P \in M} F^-(P)$$

et

$$F(M) = F^-(M) \cup F^-(M).$$

Théorème. — *Si* U *désigne un sous-ensemble ouvert du domaine* A, *on a*

$$\overline{E^+(U)} \supset F^+(U).$$

On démontre ce théorème en remplaçant K et D par E et F respectivement dans la démonstration du théorème du n° 49.

61. Théorème. — *Soit* P *un point de la fermeture* $\overline{A}$ *du domaine* A; *si l'on désigne par* Q *un point de l'ensemble* $F^+(P)$ *appartenant au domaine* A, *on a*

$$K^+(Q) \subset F^+(P);$$

en outre, si l'on suppose que, quand P *appartient au domaine* A, *le point* Q *n'est pas un point de la demi-caractéristique positive* $P(t)$, *on a*

$$K(Q) \subset F^+(P).$$

En effet, par définition, il existe deux suites $\{Q_n\}$ et $\{P_n\}$ de points de la fermeture $\overline{A}$, telles que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P, \qquad \lim_{n\to\infty} Q_n = Q \qquad \text{et} \qquad Q_n \in E^+(P_n).$$

Soit t_0 une valeur quelconque de l'intervalle de définition de la solution $Q(t)$, et désignons par $\{U_k(Q(t_0))\}$ une suite de voisinages du point $Q(t_0)$ qui tend vers le point $Q(t_0)$ pour $k \to \infty$.

D'après le n° 11, il existe une suite $\{U_k(Q)\}$ de voisinages du point Q, telle que l'on ait

$$U_k(Q)(t_0) \subset U_k(Q(t_0)) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Or, la convergence de la suite $\{Q_n\}$ vers le point Q pour $n \to \infty$ entraîne que l'on a, pour n assez grand,

$$Q_n \in U_k(Q) \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

donc si l'on désigne par $n(k)$ un nombre n qui satisfasse à cette condition, on a

$$Q_{n(k)}(t_0) \in U_k(Q)(t_0) \subset U_k(Q(t_0)) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Posons

$$P_{n(k)} = P'_k \qquad \text{et} \qquad Q_{n(k)}(t_0) = Q'_k \qquad (k = 1, 2, \ldots);$$

par hypothèse, on a

$$E^+(P'_k) \supset Q'_k(-t_0) = Q_{n(k)}.$$

Or, d'après le n° 55, on a

$$E^+(P'_k) \supset E^+(Q_{n(k)}) \supset Q_{n(k)}(t)$$

et, si P est un point de la frontière Ȧ du domaine A, ou si Q n'appartient pas à la demi-caractéristique positive $P(t)$, quand bien même P serait un point du domaine A, on a

$$E^+(P'_k) \supset E^+(Q_{n(k)}) \supset Q_{n(k)}(t) \cup Q_{n(k)}(s);$$

donc nous avons

$$E^+(P'_k) \ni Q'_k,$$

ou bien pour toute valeur t_0 de t, ou bien pour toute valeur non négative t_0 de t dans l'intervalle de définition de la solution $Q(t)$. En conséquence nous avons

$$F^+(P) \supset Q(t) \cup Q(s) \quad \text{ou} \quad F^+(P) \supset Q(t).$$

Or, $F^+(P)$ est fermé, donc le théorème est démontré.

CHAPITRE IV.

STABILITÉ.

I. — Stabilité faible.

62. DÉFINITION. — *Nous disons qu'une région invariante fermée* M *est faiblement stable au sens positif, si, pour tout voisinage* U *de l'ensemble fermé* M, *il existe un voisinage* V *de* M, *tel que nous ayons*

$$K^+(V) \subset U.$$

La région invariante fermée M étant contenue dans le domaine A, si l'on désigne par U un voisinage assez petit de M, U est contenu dans A. Donc $K^+(V)$ est contenu dans A, *a fortiori* $L^+(V)$ également, ce qui montre que $V(t)$ est défini pour toute valeur positive de t.

On définit de même une région invariante fermée faiblement stable au sens négatif.

Nous ajoutons le mot « faible » ou « faiblement » afin de distinguer une autre sorte de stabilité que nous définirons dans le prochain paragraphe. Mais, si nous ne considérons que la stabilité faible, comme dans ce paragraphe, nous supprimons le mot « faible » ou « faiblement ».

Nous disons qu'une région invariante fermée est stable aux deux sens, si elle est stable au sens positif ainsi qu'au sens négatif. Une région invariante stable aux deux sens, soit M, *est dite centre au sens de Bendixson, si, pour tout point* P *en dehors de* M, *on a*

$$L(P) \cap M = 0.$$

63. THÉORÈME. — *Soient* M *une région invariante fermée, et* U *un voisinage quelconque de l'ensemble fermé* M; *chacune des trois paires de conditions suivantes est équivalente.*

1° M *est stable au sens positif: il existe un voisinage de* M, *soit* V, *tel que l'on ait*

$$D^+(V) \subset U;$$

2° M *est stable au sens négatif: il existe un voisinage de* M, *soit* V, *tel que l'on ait*

$$D^-(V) \subset U;$$

3° M *est stable aux deux sens; il existe un voisinage de* M, *soit* V, *tel que l'on ait*

$$D(V) \subset U.$$

En effet, supposons que M soit stable au sens positif, et désignons par U_1 un voisinage de l'ensemble fermé M, dont la fermeture $\overline{U}_1$ est contenue dans le voisinage donné U de M. Par définition, il existe un voisinage V de M tel que l'on ait $K^+(V) \subset U_1$. En conséquence, d'après le n° 49, nous avons

$$D^+(V) \subset \overline{K^+(V)} \subset \overline{U}_1 \subset U.$$

On démontre facilement la réciproque de ce que nous venons de démontrer, car, d'après le théorème du n° 42, on a toujours $D^+(P) \supset K^+(P)$, pourvu que le point P appartienne au domaine A, d'où

$$D^+(V) \supset K^+(V),$$

puisque, si V est assez petit, V est contenu dans A.

On démontre de même l'équivalence de la deuxième paire de conditions et celle de la troisième.

Nous remarquons que, d'après ce théorème, même si l'on remplaçait K^+, K^- par D^+, D^-, on ne pourrait pas faire extension de la notion de stabilité.

64. Théorème. — *Pour qu'une région invariante fermée* M *soit stable au sens positif, il faut et il suffit que, pour tout point* P *n'appartenant pas à* M, *on ait*

$$D^-(P) \cap M = \emptyset.$$

En effet, supposons que M soit une région invariante stable au sens positif et que l'intersection des deux ensembles $D^-(P)$ et M ne soit pas vide, P étant un point n'appartenant pas à M, et désignons par Q un point de l'intersection de $D^-(P)$ et de M : $Q \in D^-(P) \cap M$. L'hypothèse $M \not\ni P$ entraîne que, si l'on désigne par U(M) un voisinage assez petit de M et par U(P) un voisinage assez petit du point P, on a $U(M) \cap U(P) = \emptyset$.

Soit V(M) un voisinage quelconque de l'ensemble fermé M contenu dans U(M). L'hypothèse $D^-(P) \ni Q$ montre qu'il existe une suite $\{P_n\}$ de points du domaine A et une suite $\{t_n\}$ de valeurs non positives de t, telles que l'on ait

$$\lim_{n \to \infty} P_n = P \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to \infty} P_n(t_n) = Q,$$

de sorte qu'à cause de l'hypothèse $Q \in M$, on a, pour n assez grand,

$$P_n \in U(P) \qquad \text{et} \qquad P_n(t_n) \in V(M).$$

Soit n_1 un nombre n satisfaisant à ces conditions et posons

$$Q' = P_{n_1}(t_{n_1}) \qquad \text{et} \qquad t' = -t_{n_1},$$

de sorte que l'on a $Q'(t') = P_{n_1} \in U(P)$, t' étant non négatif. Or, par hypothèse, nous avons $U(P) \cap U(M) = \emptyset$, donc nous avons

$$Q'(t') \notin U(M).$$

En conséquence, pour tout voisinage $V(M)$ de l'ensemble M, la condition

$$V(M)(t) \subset U(M)$$

n'est pas vérifiée pour une certaine valeur non négative de t.

Par conséquent, pour que M soit stable au sens positif, il faut que, pout tout point P n'appartenant pas à M, on ait

$$D^-(P) \cap M = \emptyset.$$

Supposons réciproquement que, pour tout point P n'appartenant pas à M, on ait $D^-(P) \cap M = \emptyset$, M n'étant pas stable au sens positif. Je dis que cette hypothèse conduit à une contradiction. En effet, soit $\{V_n(M)\}$ une suite de voisinages de l'ensemble fermé M qui tend vers M pour $n \to \infty$; il existe un voisinage U de M, tel que, pour un certain point P_n de chaque voisinage $V_n(M)$, on ait

$$P_n(t_n) \notin U,$$

t_n étant une certaine valeur non négative de t, puisque, par hypothèse, M n'est pas stable au sens positif. Comme les points $P_n(t_n)$ sont contenus dans le domaine borné A, l'ensemble $\{P_n(t_n)\}$ a des points d'accumulation dans la fermeture $\overline{A}$ du domaine A; nous désignons un de ces points par P, de sorte que l'on peut extraire de la suite $\{P_n(t_n)\}$ une suite partielle $\{P_{n'}(t_{n'})\}$, telle que cette suite converge vers le point P pour $n' \to \infty$ et que la suite correspondante $\{P_{n'}\}$ soit également convergente; désignons par Q le point limite de la suite $\{P_{n'}\}$, de sorte que l'on a $D^+(Q) \ni P$, d'où $D^-(P) \ni Q$.

Comme, par hypothèse, $\{V_{n'}(M)\}$ tend vers M pour $n' \to \infty$, en tant que suite partielle de la suite $\{V_n(M)\}$, $P_{n'}$ étant contenu dans $\{V_{n'}(M)\}$, on a $Q \in M$, ce qui entraîne que l'on a

$$D^-(P) \cap M \neq \emptyset,$$

P n'appartenant pas à M, contrairement à notre hypothèse.

Donc, pour que M soit stable au sens positif, il suffit que l'on ait

$$D^-(P) \cap M = \emptyset,$$

pour tout point P n'appartenant pas à la région M.

Comme conséquence directe du théorème que nous venons de démontrer, on a le

Corollaire. — *Pour qu'une région invariante fermée* M *soit stable au sens positif, il faut et il suffit que, pour tout point* P *n'appartenant pas à la région* M, *on ait*

$$E^-(P) \cap M = \emptyset.$$

65. Théorème. — *Pour qu'une région invariante fermée* M *soit stable aux deux sens, il faut et il suffit que, pour tout point* P *n'appartenant pas à la région* M, *on ait*

$$D(P)\cap M=\emptyset \qquad ou \qquad E(P)\cap M=\emptyset.$$

En effet, en combinant les deux conditions pour la stabilité au sens positif et au sens négatif, on démontre ce théorème.

Bien que nous ayons supposé dans la définition des centres au sens de Bendixson que, pour tout point P en dehors de la région invariante fermée M stable aux deux sens, nous avons $L(P)\cap M=0$, le théorème précédent montre que cette dernière condition est automatiquement remplie par toutes les régions invariantes M stables aux deux sens, car nous avons $D(P)\supset L(P)$ pour tout point P du domaine A.

Donc nous avons le

Théorème. — *Pour qu'une région invariante fermée* M *soit centre au sens de Bendixson, il faut et il suffit que* M *soit stable aux deux sens.*

66. Théorème. — *Pour qu'une région invariante fermée* M *soit stable au sens positif, il faut et il suffit que, pour tout point* P *de la région* M, *on ait*

$$D^+(P)\subset M,$$

c'est-à-dire que l'on ait

$$D^+(M)\subset M.$$

En effet, s'il existait un point de M, soit P, tel que l'on ait $D^+(P)\not\subset M$, on aurait $D^-(Q)\ni P\in M$, de sorte que l'on aurait

$$D^-(Q)\cap M\neq\emptyset,$$

où Q désigne un point de $D^+(P)$ n'appartenant pas à M.

Or, d'après le théorème du n° 64, alors M n'est pas stable au sens positif, donc pour que M soit stable au sens positif, il faut que, pour tout point de M, on ait

$$D^+(P)\subset M.$$

Réciproquement, si M n'était pas stable au sens positif, pour un point Q en dehors de la région M, on aurait $D^+(Q)\cap M\neq\emptyset$, d'après le n° 63. Désignons par P un point de l'intersection $D^-(Q)\cap M$; l'hypothèse $D^-(Q)\ni P$ entraîne $D^+(P)\ni Q\notin M$, P étant un point de la région M.

Donc, pour que M soit stable au sens positif, il suffit que, pour tout point P de la région M, on ait

$$D^+(P)\subset M.$$

Comme au n° 64, on déduit facilement le

Corollaire. — *Pour qu'une région invariante fermée* M *soit stable au sens*

positif, il faut et il suffit que, pour tout point P *de la région* M, *on ait*

$$E^{+}(P) \subset M,$$

c'est-à-dire que l'on ait

$$E^{+}(M) \subset M.$$

67. De la même manière qu'au n° 65, on voit que la condition nécessaire et suffisante pour la stabilité aux deux sens d'une région invariante fermée M est

$$D(M) \subset M.$$

Examinons cette dernière condition d'un peu plus près. Cette condition entraîne que, pour tout point P de l'ensemble M, la caractéristique totale $P(t) \cup P(s)$ est contenue dans M, puisque l'on a $P(t) \cup P(s) \subset D(P)$. Donc nous avons

$$M(t) \subset M,$$

pourvu que $M(t)$ soit défini. Or, par hypothèse, M est fermé, donc, il existe un nombre positif ε, tel que $M(t)$ soit défini pour $|t| < \varepsilon$. A l'aide du lemme du n° 39, considérant que M est fermé, on démontre que l'ensemble M est invariant. Donc, même si l'on ne suppose pas que M soit invariant, M doit être une région invariante stable aux deux sens, pourvu que l'ensemble M soit fermé et que l'on ait $D^{+}(M) \subset M$.

Ainsi nous avons le

THÉORÈME. — *Pour qu'un sous-ensemble fermé* M *du domaine* A *soit une région invariante aux deux sens, il faut et il suffit que l'on ait*

$$D(M) \subset M.$$

On remarque que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

$$D(M) \subset M, \qquad D(M) = M, \qquad E(M) = M,$$

M étant un sous-ensemble du domaine A.

II. — Stabilité forte.

68. Par analogie avec la définition des points isolés, *nous disons qu'un ensemble fermé satisfaisant à une condition* (C) *est isolé en tant qu'ensemble satisfaisant à la condition* (C), *s'il existe un voisinage* U *de l'ensemble fermé* M, *dans lequel il n'y a plus d'ensembles satisfaisant à la condition* (C), *excepté les sous-ensembles de* M.

69. DÉFINITION. — *Nous disons qu'une région invariante fermée* M *est fortement*

stable au sens positif, si, pour tout voisinage U *de l'ensemble* M, *il existe un voisinage de* M, *tel que l'on ait*

$$E^+(V) \subset U.$$

On définit de même la stabilité forte au sens négatif.

Une région invariante fermée fortement stable au sens positif ainsi qu'au sens négatif est dite fortement stable aux deux sens. Une région invariante fermée M *fortement stable aux deux sens est appelée centre au sens fort, si, pour tout point* P *en dehors de la région* M, *on a*

$$E(P) \cap M = 0.$$

Si l'on désigne par B un sous-ensemble quelconque de l'ensemble A et par P un point quelconque de A, nous avons, d'après le n° 55,

$$E^+(B) \supset K^+(B), \qquad E^-(B) \supset K^-(B), \qquad E(B) \supset K(B)$$

et

$$E(P) \supset K(P).$$

Donc on démontre facilement le

THÉORÈME. — *Une région invariante fermée fortement stable au sens positif, au sens négatif, ou aux deux sens est respectivement faiblement stable au sens positif, au sens négatif, ou aux deux sens.*

Un centre au sens fort est un centre au sens de Bendixson.

70. THÉORÈME. — *Soit* M *une région invariante fermée; pour que* M *soit fortement stable au sens positif, il faut et il suffit que, pour tout voisinage* U *de l'ensemble fermé* M, *il existe un voisinage* V *de l'ensemble fermé* M, *tel que l'on ait*

$$F^+(V) \subset U.$$

En effet, soit U_1 un voisinage assez petit de M, dont la fermeture $\overline{U}_1$ est contenue dans U. Si l'on suppose que M est fortement stable au sens positif, par définition, il existe un voisinage V de M tel que l'on ait $E^+(V) \subset U_1$, de sorte que l'on a

$$\overline{E^+(V)} \subset \overline{U}_1 \subset U.$$

Or, V étant ouvert, on a, d'après le n° 60, $F^+(V) \subset \overline{E^+(V)}$, d'où

$$F^+(V) \subset U.$$

Par conséquent la condition du théorème est nécessaire.

Réciproquement, la relation générale $F^+(V) \supset E^+(V)$ montre que, pour que M soit fortement stable au sens positif, la condition du théorème est suffisante.

71. Profitant de la réversibilité énoncée au n° 59, on démontre les deux théorèmes suivants, de la même manière que les théorèmes des n^{os} 64 et 65.

THÉORÈME. — *Pour qu'une région invariante fermée* M *soit fortement stable aux deux sens, il faut et il suffit que, pour tout point* P *en dehors de la région* M, *on ait*

$$F^-(P) \cap M = \emptyset.$$

THÉORÈME. — *Pour qu'une région invariante fermée soit un centre au sens fort, il faut et il suffit qu'elle soit fortement stable aux deux sens.*

72. On démontre, de la même manière qu'aux n^os^ 66 et 67, les deux théorèmes suivants.

THÉORÈME. — *Pour qu'une région invariante fermée* M *soit fortement stable au sens positif, il faut et il suffit que, pour tout point* P *de l'ensemble* M, *on ait*

$$F^+(P) \subset M,$$

c'est-à-dire que l'on ait

$$F^+(M) \subset M.$$

THÉORÈME. — *Pour qu'un ensemble fermé* M *soit une région invariante fermée fortement stable aux deux sens, il faut et il suffit que, pour tout point* P *de l'ensemble* M, *on ait*

$$F(P) \subset M,$$

c'est-à-dire que l'on ait

$$F(M) \subset M.$$

D'ailleurs, cette dernière condition est équivalente à

$$F(M) = M.$$

73. THÉORÈME. — *Pour qu'une région invariante fermée* M *faiblement stable au sens positif soit fortement stable au sens positif, il suffit que la région* M *soit isolée en tant que région invariante fermée qui n'est pas fortement stable au sens positif, ou* a fortiori *en tant que région invariante.*

En effet, si la région invariante fermée M faiblement stable au sens positif n'était pas fortement stable au sens positif, il existerait un point P en dehors de la région M tel que l'on ait

$$D^-(P) \cap M = \overline{\emptyset} \quad \text{et} \quad F^-(P) \cap M \neq \emptyset.$$

Soient U un voisinage quelconque de la région fermée M, et U_1 un voisinage de M dont la fermeture $\overline{U_1}$ est contenue dans U et ne contient pas le point P. D'après la définition de la stabilité faible au sens positif, il existe un voisinage V de M, tel que l'on ait $K^+(V) \subset U_1$. Nous supposons que ce voisinage V est assez petit pour que l'on ait $V \cap D^-(P) = \emptyset$. Puisque l'ensemble fermé $D^-(P)$ est disjoint d'avec l'ensemble fermé M, cette hypothèse ne restreint pas la généralité.

Or, d'après le n° 58, $F^-(P)$ est connexe, donc il existe un point de $F^-(P)$, soit Q, contenu dans V et n'appartenant pas à M. Les relations $Q \in V$ et $V \cap D^-(P) = \emptyset$ montrent que Q n'est pas un point de la demi-caractéristique négative $P(s)$ et que l'on a

$$L^+(Q) \subset F^-(P) \qquad \text{et} \qquad Q(t) \subset U_1,$$

d'où

$$L^+(Q) \subset U_1 \subset U.$$

Donc nous avons démontré qu'il y a dans U une région invariante fermée $L^+(Q)$.

Or $F^-(P) \ni Q$ montre $F^-(P) \cap L^+(Q) \neq \emptyset$, P n'appartenant pas à U, ni *a fortiori* à $L^+(Q)$, donc la région invariante $L^+(Q)$ n'est pas fortement stable au sens positif, ce qui achève la démonstration.

CHAPITRE V.

Points limites (II).

I. — Cas où m est arbitraire.

74. Nous revenons à l'étude des points limites, et considérons l'ensemble $L^+(P)$, P étant un point régulier du domaine A.

Nous commençons par le cas où β est fini, de sorte que $L^+(P)$ est contenu dans la frontière Ȧ du domaine A. Supposons que $L^+(P)$ ne se réduise pas à un seul point; désignons par M l'ensemble des points Q pour lesquels il existe une suite $\{t_n\}$ de valeurs de t, telle que l'on ait

$$0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots \to \beta, \qquad \lim_{n \to \infty} P(t_n) = Q$$

et

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} |X_i(P(t_n))| = \infty.$$

On voit sans peine que M est contenu dans $L^+(P)$. Je dis d'abord que l'ensemble M est partout dense dans $L^+(P)$.

En effet, désignons par Q_1 un point quelconque de $L^+(P)$ et par U un voisinage quelconque du point Q_1. Comme, par hypothèse, $L^+(P)$ ne se réduit pas à un seul point, il existe un point Q_2 de $L^+(P)$ différent de Q_1. Soient U_1 et U_2 deux voisinages bornés du point Q_1, tels que la fermeture $\bar{U}_1$ de U_1 soit contenue dans U et ne contienne pas le point Q_2 et que la fermeture U_2 soit contenue dans U_1.

Les hypothèses $Q_1 \in L^+(P)$, $Q_2 \in L^+(P)$ entraînent qu'il existe deux suites

$\{\tau_n\}$, $\{\tau'_n\}$ de valeurs de t, telles que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} P(\tau_n) = Q_1, \qquad 0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n < \ldots \to \beta$$

et

$$\lim_{n\to\infty} P(\tau'_n) = Q_2, \qquad 0 \leq \tau'_1 < \tau'_2 < \ldots < \tau'_n < \ldots \to \beta.$$

sans restreindre la généralité, on peut supposer que l'on a

$$0 \leq \tau_1 < \tau'_1 < \tau_2 < \tau'_2 < \ldots < \tau_n < \tau'_n < \ldots \to \beta.$$

Or, le point Q_2 n'appartient pas à U_1, et U_2 contient le point Q_1, $\overline{U}_2$ étant contenue dans U_1, donc, à cause de la continuité de la solution $P(t)$, il existe des valeurs t'_n $(n = 1, 2, \ldots)$ de t, telles que l'on ait

$$P(t'_n) \subset U_1 - U_2, \qquad \tau_n < t'_n < \tau'_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

et

$$P(t) \in U_1 \quad \text{pour} \quad \tau_n \leq t \leq t'_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Comme U_1 est borné, l'ensemble $\{P(t'_n)\}$ a des points d'accumulation dans $\overline{U}_1 - U_2$. Nous désignons par Q_3 un de ces points d'accumulation, de sorte que l'on peut extraire de la suite $\{P(t'_n)\}$ une suite partielle $\{P(t'_{n'})\}$ telle que l'on ait $\lim_{n'\to\infty} P(t'_{n'}) = Q_3$. Mais, sans restreindre la généralité, on peut supposer que la suite $\{P(t'_n)\}$ elle-même converge vers le point Q_3.

Le point Q_3 n'étant pas contenue dans U_2, il diffère du point Q_1, de sorte que, pour un certain indice de coordonnées des points Q_1 et Q_3, soit k, on a

$$y_k^3 - y_k^1 \neq 0.$$

A cause de la convergence des deux suites $\{P(\tau_n)\}$ et $\{P(t'_n)\}$ vers les points Q_1 et Q_3 respectivement, si l'on désigne par δ un nombre positif inférieur à $|y_k^3 - y_k^1|$, on a, pour n assez grand,

$$|x_k(t'_n) - x_k(\tau_n)| > \delta, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{x_k(t'_n) - x_k(\tau_n)}{t'_n - \tau_n}\right| > \frac{\delta}{t'_n - \tau_n},$$

les valeurs $t'_n - \tau_n$ étant positives.

Or, d'après le théorème de la moyenne, il existe une valeur t_n de t comprise entre τ_n et t'_n, telle que l'on ait

$$\frac{X_k(t'_n) - x_k(\tau_n)}{t'_n - \tau_n} = \frac{dx_k(t_n)}{dt} = X_k(P(t_n)),$$

donc on a

$$|X_k(P(t_n))| > \frac{\delta}{t'_n - \tau_n}.$$

En outre, la convergence des suites $\{\tau_n\}$ et $\{\tau'_n\}$ vers β entraîne celle de la

suite $\{t'_n\}$ vers β, en conséquence celle de la suite $\{|t'_n - \tau_n|\}$ vers zéro pour $n \to \infty$. Donc on a $\lim_{n\to\infty} |X_k(P(t_n))| = \infty$, *a fortiori*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} |X_i(P(t_n))| = \infty.$$

D'ailleurs, à cause de la condition

$$0 \leq \tau_1 < t_1 < t'_1 < \tau'_1 < \tau_2 < t_2 < t'_2 < \tau'_2 < \ldots < \tau_n < t_n < t'_n < \tau'_n < \ldots \to \beta,$$

on a

$$0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots \to \beta.$$

Or, l'hypothèse $P(t) \in U_1$ pour $\tau_n < t < t'_n$ entraîne $P(t_n) \in U_1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, donc les points d'accumulation de l'ensemble $\{P(t_n)\}$ sont contenus dans $\overline{U}_1$, *a fortiori* dans U. Désignons un de ces points d'accumulation par Q; on peut extraire de la suite $\{t_n\}$ une suite partielle $\{t_{n'}\}$ telle que l'on ait

$$\lim_{n'\to\infty} P(t_{n'}) = Q.$$

En outre, $\{t_{n'}\}$ étant une suite partielle de la suite $\{t_n\}$, on a

$$0 \leq t_{1'} < t_{2'} < \ldots < t_{n'} < \ldots \to \beta,$$

ce qui montre que le point Q appartient à $L^+(P)$. On voit d'ailleurs qu'en tant que suite partielle de la suite $\left\{\sum_{i=1}^{m} |X_i(P(t_n))|\right\}$, la suite $\left\{\sum_{i=1}^{m} |X_i(P(t_{n'}))|\right\}$ tend vers l'infini pour $n' \to \infty$. Donc le point Q appartient à M.

Or, Q_1 est un point arbitraire de l'ensemble $L^+(P)$ et U est un voisinage arbitraire de Q_1, donc la démonstration que M est partout dense dans $L^+(P)$ est achevée.

75. Je dis maintenant que M coïncide avec $L^+(P)$. En effet, désignons de nouveau par Q un point quelconque de $L^+(P)$. Étant donné que M est partout dense dans $L^+(P)$, on peut extraire une suite de points de l'ensemble M, soit $\{Q_n\}$, qui converge vers le point Q pour $n \to \infty$.

L'hypothèse $Q_n \in M$ entraîne que, pour chaque n, il existe une suite $\{t_{nl}\}$ de valeurs de t, telle que l'on ait

$$0 \leq t_{n1} < t_{n2} < \ldots < t_{nl} < \ldots \to \beta, \qquad \lim_{l\to\infty} P(t_{nl}) = Q_n$$

et

$$\lim_{l\to\infty} \sum_{i=1}^{m} |X_i(P(t_{nl}))| = \infty.$$

Soit $\{U_k(Q)\}$ une suite de voisinages du point Q qui tend vers le point Q pour $k \to \infty$; posons

$$t_1 = t_{11}.$$

Supposons que t_k soit déterminée de manière que l'on ait

$$t_{k-1} < t_k, \qquad t_{1k} \leq t_k, \qquad U_k(Q) \ni P(t_k)$$

et

$$k - 1 < \sum_{i=1}^{m} | X_i(P(t_k)) | .$$

La convergence $Q_n \to Q$ pour $n \to \infty$ montre $Q_n \in U_{k+1}(Q)$ pour n assez grand, et la convergence $P(t_{nl}) \to Q_n$ pour $l \to \infty$ entraîne

$$P(t_{nl}) \in U_{k+1}(Q) \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{m} | X(P(t_{nl})) | > k,$$

pour l assez grand, et à cause de la convergence des suites $\{t_{nl}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ vers β pour $l \to \infty$, on a

$$t_k < t_{nl} \qquad \text{et} \qquad t_{1k+1} \leq t_{nl}$$

pour l assez grand. Soit $\{n, l\}$ une paire d'indices satisfaisant à ces conditions. Posons

$$t_{k+1} = t_{nl}.$$

Ainsi nous avons une suite $\{t_k\}$ qui satisfait aux conditions

$$0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_k < \ldots \to \beta, \qquad \lim_{k \to \infty} P(t_k) = Q$$

et

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{m} | X_i(P(t_k)) | = \infty ;$$

donc on a $Q \in M$ et en conséquence $L^+(P) \subset M$, puisque Q est un point arbitraire de l'ensemble $L^+(P)$.

Par conséquent on a

$$L^+(P) = M,$$

car, comme l'on a remarqué au numéro précédent, on a

$$L^+(P) \supset M.$$

Donc nous avons

THÉORÈME. — *Soit* P *un point régulier du domaine* A ; *si la solution* $P(t)$ *n'est pas définie pour toute valeur positive de* t, *et que l'ensemble* $L^+(P)$ *ne se réduit pas à un seul point, pour tout point* Q *de l'ensemble* $L^+(P)$, *il existe une suite* $\{t_n\}$ *de valeurs de* t *telle que l'on ait*

$$0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots \to \beta, \qquad \lim_{n \to \infty} P(t_n) = Q$$

et

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} | X_i(P(t_k)) | = \infty ,$$

où β *désigne, comme toujours, l'extrémité supérieure de l'intervalle de définition de la solution* $P(t)$.

76. Supposons désormais que la solution $P(t)$ est définie pour toute valeur positive de t, P étant un point régulier du domaine A.

Envisageons d'abord le cas où l'ensemble $L^+(P)$ ne contient pas de points réguliers, de sorte que l'on a

$$L^+(P) \subset \dot{A} \cup S.$$

Comme l'ensemble $L^+(P)$ est connexe, d'après le n° 24, $L^+(P)$ appartient à une composante connexe de l'ensemble fermé $\dot{A} \cup S$. De plus, $L^+(P)$ ne contient pas de points de l'intérieur $\dot{S}$ de l'ensemble S, puisque tous les points d'une caractéristique régulière sont réguliers. Par conséquent $L^+(P)$ appartient à une composante connexe de la réunion de la frontière $\dot{A}$ et de la frontière $\dot{S}$.

Si une composante connexe de la frontière $\dot{S}$ qui n'est pas disjointe d'avec $L^+(P)$ est fermée en tant qu'ensemble dans l'espace R_m, la frontière $\dot{A}$ et cette composante connexe fermée sont séparées, donc $L^+(P)$ est contenu dans cette composante connexe fermée de la frontière $\dot{S}$.

Ainsi nous avons le

THÉORÈME. — *Soit* P *un point régulier du domaine* A. *Supposons que la solution* $P(t)$ *soit définie pour toute valeur positive de* t; *si l'ensemble* $L^+(P)$ *est disjoint d'avec l'ensemble* R *des points réguliers,* $L^+(P)$ *constitue un sous-ensemble connexe contenu dans une composante connexe de la réunion de la frontière* $\dot{A}$ *du domaine* A *et de la frontière* $\dot{S}$ *de l'ensemble* S *des points singuliers.*

En particulier, *si l'ensemble* S *est fermé en tant qu'ensemble dans l'espace* R_m, $L^+(P)$ *est ou bien entièrement contenue dans une composante connexe de la frontière* $\dot{A}$, *ou bien entièrement contenue dans une composante connexe de la frontière* $\dot{S}$ *de l'ensemble* S.

On démontre le théorème suivant qui est un peu plus fort que la dernière partie du théorème précédent.

THÉORÈME. — *Si les points singuliers appartenant à l'ensemble* $L^+(P)$ *constituent un ensemble non vide et fermé en tant qu'ensemble dans l'espace* R_m, *et que* $L^+(P) \cap \dot{A}$ *n'est pas vide,* $L^+(P)$ *contient des points réguliers.*

77. Supposons que l'ensemble $L^+(P)$ ne soit pas disjoint d'avec $\dot{A} \cup \dot{S}$, et posons

$$L^+(P) \cap (\dot{A} \cup \dot{S}) = M.$$

Chacun des trois ensembles du premier membre étant fermé, M est également

fermé, donc nous pouvons décomposer l'ensemble M en composantes connexes fermées M_i ($i \in I$), I désignant l'ensemble d'indices.

Envisageons une composante connexe fermée M_0 ($0 \in I$) et supposons que M_0 ne coïncide pas avec $L^+(P)$, de sorte que l'on a ou bien $R \cap L^+(P) \neq 0$, ou bien $M \neq M_0$. Mais le second cas de l'alternative montre que l'ensemble M n'est pas connexe, donc on a $L^+(P) \cap R \neq 0$. Par conséquent on a, dans tous les cas,

$$L^+(P) \cap R \neq 0.$$

Supposons de plus que, si l'on a $M \neq M_0$, M_0 est isolé en tant que sous-ensemble de M, et désignons par Q' un des points réguliers de l'ensemble $L^+(P)$. Soit U un voisinage quelconque de l'ensemble M_0 ; je dis qu'il existe deux points réguliers Q_1 et Q_2 de l'ensemble $L^+(P)$, tels que l'on ait

$$L^+(Q_1) \subset U \qquad \text{et} \qquad L^-(Q_2) \subset U.$$

En effet, soient U_1 et V deux voisinages bornés de M_0, tels que la fermeture $\overline{U}_1$ ne contienne ni le point Q' ni d'autres points de M que ceux de M_0, et $\overline{U}_1$ soit contenu dans U et que la fermeture $\overline{V}$ de V soit contenue dans U_1.

A cause de l'hypothèse $L^+(P) \supset M_0$, il existe une suite $\{t_n\}$ de valeurs de t, telle que l'on ait

$$0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots \to \infty, \qquad \lim_{n \to \infty} P(t_n) = Q,$$

Q désignant un point fixe de M_0, et l'autre hypothèse $L^+(P) \ni Q'$ entraîne qu'il existe une suite $\{t'_n\}$ de valeurs de t, telle que l'on ait

$$0 \leq t'_1 < t'_2 < \ldots < t'_n < \ldots \to \infty, \qquad \lim_{n \to \infty} P(t'_n) = Q'.$$

Donc on a

$$P(t'_n) \notin U_1 \qquad \text{et} \qquad P(t_n) \in V,$$

pour n assez grand. Nous pouvons supposer sans restreindre la généralité

$$0 \leq t_1 < t'_1 < t_2 < t'_2 < \ldots < t_n < t'_n < \ldots \to \infty.$$

A cause de la continuité de la solution $P(t)$, il existe des valeurs τ_n et τ'_n ($n = 1, 2, \ldots$), telles que l'on ait, pour n assez grand,

$$P(\tau_n) \in U_1 - V, \qquad t'_n < \tau_n < t_{n+1}, \qquad P(\tau'_n) \in U_1 - V, \qquad t_n < \tau'_n < t'_n$$

et

$$P(t) \in U_1 \qquad \text{pour} \quad \tau_n < t < t_{n+1} \qquad \text{ou} \qquad t_n < t < \tau'_n.$$

L'ensemble $U_1 - V$ étant borné, on peut supposer qu'il existe $\lim_{n \to \infty} P(\tau'_n)$, soit Q_2, de sorte que Q_2 appartient à $\overline{U}_1 - V$. On voit facilement que Q_2 est un point régulier de $L^+(P)$.

Envisageons la demi-caractéristique négative $Q_2(s)$ et supposons qu'il existe

une valeur négative τ_0 de t, telle que l'on ait $Q_2(\tau_0)\notin U_1$. Soit W un voisinage de l'arc fermé $\overset{\frown}{Q_2, Q_2(\tau_0)}$ de la demi-caractéristique négative $Q_2(s)$, assez petit pour que $\overline{W}$ soit disjoint d'avec l'ensemble fermé M_0. D'après le n° 10, pour un voisinage assez petit $V(Q_2)$ du point Q_2, on a $V(Q_2)(t)\subset W$ pour $o\geqq t\geqq\tau_0$. Or, par hypothèse, on a $\lim_{n\to\infty} P(\tau'_n)=Q_2$, donc on a, pour n assez grand,

$$P(\tau'_n)\in V(Q_2),$$

d'où

$$P(\tau'_n+t)\subset W \qquad \text{pour} \quad o\geqq t\geqq\tau_0.$$

Considérons la suite $\{t_n-\tau'_n\}$, et posons

$$o \geqq \overline{\lim_{n\to\infty}}(t_n-\tau'_n)=\tau.$$

On peut supposer sans perdre la généralité que l'on a

$$\lim_{n\to\infty}(t_n-\tau'_n)=\tau.$$

Supposons d'abord que l'on ait $\tau>\tau_0$. Nous avons $P(t_n)=P(\tau'_n+(t_n-\tau'_n))$, donc l'hypothèse $\lim_{n\to\infty}(t_n-\tau'_n)=\tau$ entraîne que l'on a $P(t_n)\in W$, pour n assez grand, d'où

$$\lim_{n\to\infty} P(t_n)=Q_2(\tau)\in\overline{W};$$

ceci est une conclusion contradictoire avec l'hypothèse $\lim_{n\to\infty} P(t_n)=Q\in M_0$, puisque W est assez petit pour que l'on ait $\overline{W}\cap M_0=0$, donc l'hypothèse $\tau>\tau_0$ est absurde.

Supposons maintenant que l'on ait $\tau\leqq\tau_0$; soit ε un nombre positif quelconque inférieur à $|\tau_0|$. L'hypothèse $\lim_{n\to\infty}(t_n-\tau'_n)=\tau\leqq\tau_0<o$ entraîne, pour n assez grand, $o>\tau_0+\varepsilon>t_n-\tau'_n$, d'où $\tau'_n>\tau'_n+\tau_0+\varepsilon>t_n$, donc l'on a, pour n assez grand,

$$P(\tau'_n+\tau_0+\varepsilon)\in U_1,$$

puisque, par hypothèse, on a $P(t)\in U_1$ pour $\tau'_n>t>t_n$.

Or, l'hypothèse $\lim_{n\to\infty} P(\tau'_n)=Q_2$ entraîne

$$\lim_{n\to\infty} P(\tau'_n+\tau_0+\varepsilon)=Q_2(\tau_0+\varepsilon),$$

donc nous avons

$$Q_2(\tau_0+\varepsilon)\in U_1,$$

conclusion qui n'est pas vérifiée, puisque, à cause de la continuité de la solution $Q_2(t)$, on a $Q_2(\tau_0+\varepsilon)\notin U$ pour ε assez petit, $Q_2(\tau_0)$ n'appartenant pas à l'ensemble fermé $\overline{U}_1$. Donc l'hypothèse $\tau\leqq\tau_0$ est aussi absurde.

Étant donné que les deux hypothèses $\tau > \tau_0$, $\tau \leqq \tau_0$ sont toutes les deux absurdes, l'autre hypothèse qu'il existe une valeur τ_0 doit être également absurde, donc nous avons

$$Q_2(s) \subset U_1 \qquad \text{d'où} \qquad L^-(Q_2) \subset U_1 \subset U.$$

De la même manière on démontre que l'on a $L^+(Q_1) \subset U$, où Q_1 désigne un des points d'accumulation de l'ensemble $\{P(\tau_n)\}$.

Donc nous avons le

Théorème. — *Supposons que l'ensemble* $L^+(P) \cap \{\dot{A} \cup \dot{S}\}$ *ne soit pas vide; soit* M_0 *une composante connexe de l'ensemble* $L^+(P) \cap \{\dot{A} \cup \dot{S}\}$. *Si* $L^+(P)$ *ne coïncide pas avec* M_0, *pour tout voisinage* U *de l'ensemble fermé* M_0, *ou bien il existe deux points régutiers* Q_1 *et* Q_2 *de l'ensemble* $L^+(P)$ *tels que l'on ait*

$$L^+(Q_1) \subset U \qquad \textit{et} \qquad L^-(Q_2) \subset U,$$

ou bien il existe dans U *des points de l'ensemble* $L^+(P) \cap \{\dot{A} \cup \dot{S}\}$ *n'appartenant pas à* M_0.

78. Nous envisageons ici les résultats du numéro précédent d'un peu plus près. Si M_0 est isolé en tant que sous-ensemble de l'ensemble $L^+(P) \cap \{\dot{A} \cup \dot{S}\} = M$, par définition, pour un voisinage assez petit U de l'ensemble M, il n'existe plus dans U de points de l'ensemble $L^+(P) \cap \{\dot{A} \cup \dot{S}\}$ excepté ceux de M_0; or il existe deux points réguliers Q_1 et Q_2 de l'ensemble $L^+(P)$, d'après le numéro précédent, tels que l'on ait

$$L^+(Q_1) \subset U \qquad \text{et} \qquad L^-(Q_2) \subset U.$$

D'autre part, la relation $Q_1 \in L^+(P)$ entraîne $L^+(Q_1) \subset L^+(P)$, donc, si l'on suppose que $L^+(Q_1)$ est disjoint d'avec M_0, $L^+(Q_1)$ est une région invariante fermée dont tous les points sont réguliers. Donc nous avons le

Théorème. — *Soit* M_0 *une composante connexe de l'ensemble* $L^+(P) \cap \{\dot{A} \cup \dot{S}\}$ *que nous supposons non vide, et supposons que l'ensemble* $L^+(P)$ *ne coïncide pas avec* M_0; *si* M_0 *est isolé en tant que sous-ensemble de* $L^+(P) \cap \{\dot{A} \cup \dot{S}\}$, *pour tout voisinage* U *de l'ensemble fermé* M_0, *ou bien il existe deux points réguliers* Q_1 *et* Q_2 *de l'ensemble* $L^+(P)$, *tels que l'on ait*

$$L^+(Q_1) \cap M_0 \neq \emptyset \qquad \textit{et} \qquad L^-(Q_2) \cap M_0 \neq \emptyset,$$

ou bien il existe une région invariante fermée constituée de points réguliers de $L^+(P)$ *et contenue dans* U.

79. Supposons par ailleurs que M_0 ne contienne pas de points de la frontière $\dot{A}$, de sorte que M_0 soit une région invariante fermée. Désignons par U un

voisinage de l'ensemble M_0, tel que U ne contienne pas de points de la frontière Ȧ; et supposons qu'il existe un point régulier Q de l'ensemble $L^+(P)$, tel que l'on ait

$$L^+(Q) \subset U.$$

Dans ce cas, même si $L^+(Q)$ n'est pas disjoint d'avec M_0, $L^+(Q)$ est une région invariante, puisque M_0 ne contient pas de points de la frontière Ȧ. Donc, si l'on suppose de plus que M_0 est isolé en tant que région invariante fermée contenue dans $L^+(P)$, il faut que $L^+(Q)$ soit contenu dans M_0. Donc nous avons le

THÉORÈME. — *Supposons qu'une composante connexe* M_0 *non vide de l'ensemble* $L^+(P) \cap \{\dot{A} \cup \dot{S}\}$ *soit disjointe d'avec la frontière* Ȧ *et que* $L^+(P)$ *ne coïncide pas avec* M_0; *si* M_0 *est isolé en tant que sous-ensemble de* $L^+(P) \cap \{\dot{A} \cup \dot{S}\}$ *ainsi que région invariante contenue dans* $L^+(P)$, *il existe deux points* Q_1 *et* Q_2 *tels que l'on ait*

$$L^-(Q_1) \subset M_0 \quad \text{et} \quad L^-(Q_2) \subset M_0.$$

80. Changeons maintenant de sujet et supposons que, pour tout point Q de l'ensemble $L^+(P)$, nous ayons

$$L^+(P) = K(Q);$$

je dis que, pour tout point Q de l'ensemble $L^+(P)$, on a

$$L(Q) \cap \{Q(t) \cup Q(s)\} \neq \emptyset.$$

En effet, supposons qu'il existe un point Q de $L^+(P)$ tel que l'on ait

$$L(Q) \cap \{Q(t) \cup Q(s)\} \neq \emptyset,$$

et désignons par Q_1 un point de $L(Q)$. Puisque l'hypothèse $Q_1 \in L(Q)$ entraîne $L(Q) \supset K(Q_1)$, nous avons

$$L^+(P) - K(Q_1) \supset Q(t) \cup Q(s) \neq \emptyset;$$

ceci est en contradiction avec l'hypothèse $L^+(P) = K(Q_1)$, puisque Q_1 appartient à $L^+(P)$.

Étant donné que, pour tout point Q de $L^+(P)$, on a $L(Q) \cap \{Q(t) \cup Q(s)\} \neq \emptyset$, nous supposons que l'on a

$$L^+(Q) \cap \{Q(t) \cup Q(s)\} \neq \emptyset,$$

de sorte que

$$K(Q) = L(Q) = L^+(Q) = K^+(Q) \supset K^-(Q) \supset L^-(Q).$$

Supposons que $L^+(Q)$ ne coïncide pas avec $L^-(Q)$ et désignons par Q_1 un point de $L^-(Q)$, de sorte que l'on a $L^-(Q) \supset K(Q_1)$. Donc $K(Q_1)$ ne coïncide pas avec $L^+(P)$, conclusion contradictoire avec notre hypothèse. Donc on a, pour tout point Q de l'ensemble $L^+(P)$,

$$L^+(P) = L^+(Q) = L^-(Q) = K^+(Q) = \dots$$

Puisque la réciproque de ce que nous venons de démontrer est triviale, nous avons le

THÉORÈME. — *Soit* P *un point du domaine* A ; *pour que l'on ait*

$$L^+(P) = K(Q)$$

pour tout point Q *de l'ensemble* $L^+(P)$, *il faut et il suffit que l'on ait*

$$L^+(P) = L^+(Q) = L^-(Q)$$

pour tout point Q *de l'ensemble* $L^+(P)$.

II. — Courbes dans le plan.

81. Comme application de résultats que nous avons obtenus, nous envisageons toujours dans ce chapitre le cas où l'on a $m = 2$, c'est-à-dire que nous étudions les courbes définies par les équations

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = dt$$

dans un domaine borné A dans le plan II, où X_1 et X_2 sont deux fonctions continues dans le domaine A ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre par rapport à x_1 et x_2.

82. THÉORÈME. — *Soit* Q *un point régulier de l'ensemble* $L^+(P)$, P *étant un point régulier du domaine* A ; *soit* eQe' *un arc sans contact au point* Q, *assez petit pour que l'arc* eQe' *soit sans contact en tout point de* eQe'. *Si, pour deux valeurs positives* t_0 *et* t_0' *de* t $(t_0 < t_0')$, *on a*

$$P(t_0) \in eQe' \qquad et \qquad P(t_0') \in eQe',$$

ou bien le point $P(t_0')$ *appartient à l'arc partiel* $\overset{\frown}{P(t_0), Q}$ *de l'arc* eQe, *ou bien les trois points* $P(t_0)$, $P(t_0')$ *et* Q *coïncident.*

Pour que l'on soit dans le second cas de l'alternative, il faut et il suffit que $P(t)$ *soit périodique, et que* $t_0' - t_0$ *soit une de ses périodes.*

On remarque que, dans ce théorème, on ne suppose pas que $L^+(P)$ soit contenu dans l'ensemble R des points réguliers.

Pour démontrer le théorème, supposons que les trois points $P(t_0)$, $P(t_0')$ et Q ne coïncident pas. Soit t_1 une valeur de t plus grande que t_0, telle que l'on ait

$$P(t_1) \in eQe' \qquad et \qquad P(t) \notin eQe' \qquad pour \quad t_0 < t < t_1.$$

On voit, d'après le n° 25, que cette valeur t_1 existe toujours, puisque P est régulier. Je dis que les points $P(t_0)$ et $P(t_1)$ ne coïncident pas.

En effet, s'ils coïncidaient, la solution $P(t)$ serait périodique de période fondamentale $t_1 - t_0$, puisqu'il n'existe pas de valeurs de t comprises entre t_0 et t_1, pour lesquelles $P(t)$ appartient à l'arc eQe', *a fortiori* coïncide avec le point $P(t_0)$. Donc la caractéristique $P(t)$ est représentée par les points de la solution $P(t)$ correspondant aux valeurs de t comprises entre t_0 et t_1 (t_0 inclus et t_1 exclus). Or dans cet intervalle seul le point $P(t_0)$ appartient à l'arc eQe', donc le point $P(t'_0)$ doit coïncider avec le point $P(t_0)$; ceci est en contradiction avec notre hypothèse. En conséquence on a

$$P(t_0) \neq P(t_1).$$

Donc, d'après le n° 15, $P(t)$ pour $t_0 \leqq t \leqq t_1$ est une courbe de Jordan et, d'après le n° 18, l'arc partiel $\overset{\frown}{P(t_0), P(t_1)}$ de l'arc eQe' est une courbe de Jordan, donc ces deux courbes constituent une courbe de Jordan fermée, soit C, puisque, d'après la définition de la valeur t_1, l'arc $\overset{\frown}{P(t_0), P(t_1)}$ de la caractéristique $P(t) \cup P(s)$ et l'arc $\overset{\frown}{P(t_0), P(t_1)}$ de l'arc eQe' n'ont pas de points communs autres que leurs extrémités $P(t_0)$ et $P(t_1)$.

Par conséquent, d'après le théorème de Jordan, la courbe C décompose $\Pi - C$ en deux régions Π_1 et Π_2. Considérons les points $P(t_1 + \tau)$, où τ peut prendre toute valeur positive. On voit facilement que, si τ est assez petit, $P(t_1 + \tau)$ appartient à une même région, soit Π_1, entre les deux régions Π_1 et Π_2, de sorte que $P(t_0 - \tau')$ appartient à la région Π_2, τ' étant une valeur positive assez petite.

Je dis que, pour toute valeur positive de τ, le point $P(t_1 + \tau)$ appartient à la région Π_1. En effet, étant donné que, pour un nombre positif assez petit τ, $P(t_1 + \tau)$ appartient à Π_1, s'il existe une valeur positive de τ, soit τ_0, pour laquelle $P(t_1 + \tau_0)$ n'appartient pas à Π_1, il existe une valeur τ_1 entre zéro et τ_0, telle que l'on ait

$$P(t_1 + \tau_1) \in o \qquad \text{et} \qquad P(t_1 + \tau) \in \Pi_1 \qquad \text{pour} \quad o \leqq \tau < \tau_1.$$

Supposons que $P(t_1 + \tau_1)$ appartienne à l'arc $\overset{\frown}{P(t_0), P(t_1)}$ de la caractéristique $P(t) \cup P(s)$, de sorte que $P(t_1 + \tau_1)$ coïncide avec un point $P(t'')$, t'' étant une valeur de t comprise entre t_0 et t_1. Alors la solution $P(t)$ est périodique de période $t_1 + \tau_1 - t''$, donc on a

$$P(t'' + t) = P(t_1 + \tau_1 + t)$$

pour toute valeur positive ou négative de t.

Si t'' n'égale pas t_0, désignons par δ un nombre positif quelconque inférieur à $t'' - t_0$ et à τ_1, de sorte que l'on a

$$t_0 < t'' - \delta < t_1 \qquad \text{et} \qquad t_1 < t_1 + \tau_1 - \delta < t_1 + \tau_1$$

et

$$P(t'' - \delta) = P(t_1 + \tau_1 - \delta).$$

Le premier membre de cette égalité appartient à l'arc $\overset{\frown}{P(t_0), P(t_1)}$ et le second membre à la région Π_1 ; donc cette égalité n'est pas vérifiée et l'hypothèse faite est absurde.

Si t'' égale t_0, pour un nombre assez petit δ, on a

$$P(t_0 - \delta) \in \Pi_2$$

comme nous l'avons vu plus haut ; mais, si δ est plus petit que τ_1, on a

$$t_1 < t_1 + \tau_1 - \delta < t_1 + \tau_1,$$

donc le point $P(t_1 + \tau_1 - \delta)$, qui doit coïncider avec le point $P(t_0 - \delta)$, appartient à Π_1 ; cette conclusion est également impossible.

Par conséquent l'hypothèse faite que $P(t_1 + \tau_1)$ appartient à l'arc $\overset{\frown}{P(t_0), P(t_1)}$ de la caractéristique $P(t) \cup P(s)$ est absurde. Donc on a

$$P(t) \in \Pi_1 \qquad \text{pour} \quad t > t_1,$$

car aucune caractéristique ne peut traverser l'arc $\overset{\frown}{P(t_0), P(t_1)}$ de l'arc eQe' de Π_1 à Π_2, eQe' étant sans contact en tous ses points.

Comme $P(t)$ appartient à Π_1 pour toute valeur de t supérieure à t_1, si $P(t)$ traverse l'arc eQe' à une valeur de t plus grande que t_1, soit t', l'arc $\overset{\frown}{P(t_0), P(t')}$ de l'arc eQe' contient le point $P(t_1)$. Or, par hypothèse Q est un point de $L^+(P)$, donc, d'après le n° 22, Q est un point d'accumulation de l'intersection de $L^+(P)$ et de l'arc eQe'. En conséquence Q n'appartient ni à Π_2 ni à l'arc $\overset{\frown}{P(t_0), P(t_1)}$ de l'arc eQe', ni à l'arc $\overset{\frown}{P(t_0), P(t'_0)}$ de l'arc eQe', de sorte que l'arc $\overset{\frown}{P(t_0), Q}$ contient le point $P(t'_0)$.

Ce que nous venons de voir démontre en même temps que, pour que les trois points $P(t_0)$, $P(t'_0)$ et Q coïncident, il faut et il suffit que $P(t)$ soit périodique, *et que* $t'_0 - t_0$ *soit une de ses périodes*.

83. On démontre à l'aide du théorème précédent les deux lemmes suivants :

LEMME. — *Soit* P *un point du domaine* A ; *si* $L^+(P)$ *contient le point* P, *ou bien* P *est un point singulier, ou bien la solution* $P(t)$ *est périodique, de sorte qu'on a toujours*

$$L^+(P) = L^-(P) = P(t) = P(s) = \dots$$

LEMME (THÉORÈME DE BENDIXSON). — *Soit* P *un point régulier du domaine* A ; *si tous les points de* $L^+(P)$ *sont réguliers, pour tout point* Q *de* $L^+(P)$, *la solution* $Q(t)$ *est périodique*.

Cependant le sujet de ce paragraphe est d'établir la réciproque de ce der-

nier lemme. On remarque que, comme hypothèse, on ne suppose pas que l'ensemble $L^+(P)$ soit contenu dans l'ensemble R des points réguliers.

LEMME. — *Soit* P *un point régulier du domaine* A ; *s'il existe un point régulier* Q *de* $L^+(P)$, *tel que la solution* $Q(t)$ *soit périodique*, $L^+(P)$ *coïncide avec la caractéristique fermée* $K(Q) = Q(t)$, *de sorte que tous les points de* $L^+(P)$ *sont réguliers.*

En effet, supposons que $L^+(P)$ ne coïncide pas avec la caractéristique fermée $K(Q)$, et désignons par Q' un point de l'ensemble non vide $L^+(P) - K(Q)$, et par T la période fondamentale de la solution périodique $Q(t)$. Soit eQe' un arc sans contact au point Q et soit U un voisinage du point Q assez petit pour que l'arc eQe' soit sans contact dans U et que U ne contienne pas le point Q'. D'après les nos 5 et 20, si l'on désigne par ε un nombre positif assez petit et par V un voisinage du point Q assez petit, $V(t)$ appartient à U pour toute valeur de t, $|t| < \varepsilon$, et il existe une et une seule valeur de t, telle que l'on ait

$$Q''(t) \in eQe' \qquad \text{et} \qquad |t| < \varepsilon,$$

où Q'' désigne un point quelconque de V.

Désignons par W un voisinage de la caractéristique fermée $K(Q)$ qui ne contient pas le point Q'. D'après le n° 11, il existe un voisinage V' du point Q, tel que l'on ait

$$V'(t) \in W \qquad \text{pour} \quad o \leq t \leq T \qquad \text{et} \qquad V'(T) \subset V,$$

car, comme Q et $Q(T)$ représentent le même point, V est un voisinage de $Q(T)$.

Or, l'hypothèse $L^+(P) \ni Q$ entraîne qu'il existe une valeur positive t_1 de t, telle que l'on ait

$$P(t_1 + t) \in W \qquad \text{pour} \quad o \leq t \leq T \qquad \text{et} \qquad P(t_1 + T) \in V,$$

donc on a

$$P(t_1 + \tau) \in eQe' \qquad \text{et} \qquad P(t_1 + \tau) \in U,$$

τ étant un certain nombre tel que l'on ait $|T - \tau| < \varepsilon$.

Pour simplifier les notations, posons

$$P_1 = P(t_1) \qquad \text{et} \qquad P_2 = P(t_1 + \tau).$$

Le même raisonnement qu'à la démonstration du théorème du n° 81 démontre que l'arc $\overset{\frown}{P_1, P_2}$ de la caractéristique $P(t) \cup P(s)$ et l'arc $\overset{\frown}{P_1, P_2}$ de l'arc eQe' constituent une courbe de Jordan fermée, soit C'. D'ailleurs la caractéristique fermée $K(Q)$ est une courbe de Jordan, que nous désignons par C.

Puisque, par hypothèse, $L^+(P) - K(Q)$ n'est pas vide, Q n'appartient pas à la caractéristique $P(t) \cup P(s)$, donc les points P_1, P_2 et Q ne coïncident pas, ce qui montre, d'après le théorème du n° 81, que le point P_2 appartient à l'arc $\overset{\frown}{P_1, Q}$ de l'arc eQe', et que, si l'on désigne par Π_1 la région entourée par C et C',

$P(t)$ appartient à Π_1 pour $t > t_1 + \tau$. Or, Q' est un point de $L^+(P)$, et Q' n'appartient ni à W, en conséquence ni à Π_1, ni à C, ni à C'. Donc nous sommes conduits à une contradiction ; l'hypothèse que $L^+(P) - K(Q)$ n'est pas vide est absurde.

84. En combinant les lemmes précédents, nous avons un théorème contenant celui de Bendixson.

THÉORÈME. — *Si l'on désigne par* P *un point du domaine* A, *les quatre conditions suivantes sont équivalentes :*

1° *il existe un point* Q *de* $L^+(P)$, *tel que la solution* $Q(t)$ *est périodique ;*

2° *tous les points de l'ensemble* $L^+(P)$ *sont réguliers ;*

3° *l'ensemble* $L^+(P)$ *ne se réduisant pas à un seul point, on a, pour tout point* Q *de* $L^+(P)$,

$$L^+(P) = L^+(Q);$$

4° *l'ensemble* $L^+(P)$ *ne se réduisant pas à un seul point, il existe un point* Q *de* $L^+(P)$ *tel que l'on ait*

$$L^+(P) = L^+(Q).$$

Remarque. — Comme nous l'avons défini au chapitre I, dans ce Mémoire nous ne considérons pas les solutions singulières comme solutions périodiques.

85. Supposons que l'ensemble $L^+(P)$ ne soit disjoint ni d'avec l'ensemble R des points réguliers, ni d'avec la réunion de la frontière $\dot{A}$ du domaine A et de la frontière $\dot{S}$ de l'ensemble S des points singuliers. Soit Q un point régulier quelconque de $L^+(P)$. Comme conséquence directe du théorème précédent, on a

$$L^+(Q) \cap \{\dot{S} \cup \dot{A}\} \neq \emptyset;$$

mais je dis de plus que, pour tout point Q de l'ensemble $L^+(P)$, $L^+(Q)$ est contenu dans une composante connexe de $\dot{S} \cup \dot{A}$.

En effet, pour le voir, il suffit de démontrer que l'on a

$$L^+(Q) \cap R = \emptyset,$$

pour tout point régulier Q de l'ensemble $L^+(P)$, puisque l'on a

$$A = R \cup S \quad \text{et} \quad \bar{A} \supset L^+(Q).$$

Supposons que $L^+(Q)$ et R ne soient pas disjoints et désignons par Q' un point de l'intersection de $L^+(Q)$ et de R. Soit $eQ'e'$ un arc sans contact au point Q' assez petit pour que $eQ'e'$ soit sans contact en tous ses points.

L'hypothèse $Q' \in L^+(Q)$ montre qu'il existe une valeur t_0 de t, telle que l'on ait $Q(t_0) \in eQ'e'$. Soit t_1 la plus petite valeur de t supérieure à t_0, telle que l'on ait $Q(t_1) \in eQ'e'$. L'arc $\overset{\frown}{Q(t_0), Q(t_1)}$ de la caractéristique $Q(t) \cup Q(s)$ et

l'arc $\overset{\frown}{Q(t_0), Q(t_1)}$ de l'arc $eQ'e'$ constituent une courbe de Jordan fermée, soit C, qui décompose $\Pi - C$ en deux régions Π_1 et Π_2.

D'après le théorème du n° 81, on a

$$\overset{\frown}{Q(t_0), Q'} \ni Q(t_1).$$

Donc, si l'on suppose que le point Q' appartient à Π_1, $Q(t_1+\tau)$ appartient à Π_1 et $Q(t_0-\tau)$ à Π_2, pour toute valeur positive de τ. Soit P' un point quelconque de la région Π_1; on peut montrer que $P'(t)$ appartient à Π_1 pour toute valeur positive de t, par le même raisonnement qu'au n° 82. Or, les hypothèses $Q' \in \Pi_1$ et $Q' \in L^+(Q) \subset L^+(P)$ entraînent qu'il existe une valeur t' de t, telle que l'on ait

$$P(t') \in \Pi_1,$$

de sorte que $P(t'+t)$ appartient à Π_1 pour toute valeur positive de t; mais cela est impossible, puisque l'on a $Q(t_0-\tau) \in L^+(P)$, $Q(t_0-\tau)$ appartenant à Π_2, pour toute valeur positive de τ. Donc l'hypothèse $L^+(Q) \cap R \neq \emptyset$ est absurde et l'on a

$$L^+(Q) \subset \dot{A} \cup \dot{S}.$$

D'ailleurs, puisque $L^+(Q)$ est un sous-ensemble connexe de $L^+(P)$, $L^+(Q)$ est contenu dans une composante connexe de l'ensemble $L^+(P) \cap \{\dot{A} \cup \dot{S}\}$.

De la même manière on démontre le même résultat pour $L^-(Q)$.

En combinant ces résultats avec le théorème du n° 76, nous avons le

THÉORÈME. — *Supposons que l'ensemble* $L^+(P)$ *ne soit disjoint ni d'avec la réunion de la frontière* $\dot{A}$ *du domaine* A *et de la frontière* $\dot{S}$ *de* S, *ni d'avec l'ensemble* R; P *étant un point régulier du domaine* A; *si l'on désigne par* Q *un point quelconque de l'ensemble* $L^+(P)$, $L^+(Q)$ *ainsi que* $L^-(Q)$ *sont contenus dans une composante connexe de l'ensemble* $L^+(P) \cap \{\dot{A} \cup \dot{S}\}$.

86. Avec les mêmes hypothèses sur $L^+(P)$ qu'au numéro précédent, nous considérons l'ensemble $L^+(P) \cap \{\dot{A} \cup \dot{S}\} = M$ et décomposons cet ensemble fermé M en composantes connexes $M_i (i \in I)$, I étant l'ensemble d'indices.

Supposons qu'une composante connexe $M_0 (o \in I)$ soit isolée en tant que sous-ensemble de M, de sorte que, dans un voisinage assez petit U de l'ensemble fermé M, il n'y a plus de points de M sauf ceux contenus dans M_0. Or, d'après le théorème du n° 77, ou bien il existe deux points Q_1 et Q_2, tels que l'on ait

$$L^+(Q_1) \cap M_0 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad L^-(Q_2) \cap M_0 \neq \emptyset,$$

ou bien il existe dans U une région invariante fermée constituée de points réguliers de $L^+(P)$.

Je dis que ce dernier cas de l'alternative n'est pas vérifié. En effet, s'il existait une région invariante fermée constituée de points réguliers de $L^+(P)$, soit B, on aurait

$$L^+(Q) \subset B \subset R \qquad \text{et} \qquad L^+(Q) \subset B \subset L^+(P),$$

pour tout point Q de B. Donc, d'après le théorème du n° 84, $L^+(Q)$ coïnciderait avec une caractéristique fermée, en conséquence, toujours d'après le même théorème, on aurait

$$L^+(P) \subset R,$$

contrairement à notre hypothèse. Donc il existe deux points Q_1 et Q_2 tels que l'on ait

$$L^+(Q_1) \cap M_0 \neq 0, \qquad L^-(Q_2) \cap M_0 \neq 0$$

et

$$Q_i \in L^+(P) \cap R \qquad (i = 1, 2).$$

Or, d'après le théorème du numéro précédent, $L^+(Q_1)$ est contenu dans une composante connexe de M, dont il est contenu dans M_0 : $L^+(Q_1) \subset M_0$.

De la même manière on démontre que l'on a $L^-(Q_2) \subset M_0$.

Donc nous avons le

Théorème. — *Avec les mêmes hypothèses sur* $L^+(P)$ *qu'au théorème précédent, désignons par* M *l'ensemble* $L^+(P) \cap \{\dot{A} \cup \dot{S}\}$ *et décomposons* M *en composantes connexes* $M_i (i \in I)$, I *étant l'ensemble d'indices.*

Si une composante connexé $M_0 (o \in I)$ *est isolée en tant que sous-ensemble de* M, *il existe deux points réguliers* Q_1 *et* Q_2 *de l'ensemble* $L^+(P)$, *tels que l'on ait*

$$L^+(Q_1) \subset M_0 \qquad \text{et} \qquad L^-(Q_2) \subset M_0.$$

DEMI-GROUPES INVERSIFS

ET

DEMI-GROUPES RÉUNIONS

DE

DEMI-GROUPES SIMPLES

PAR M. R. CROISOT.

Introduction.

Dans un Mémoire paru en 1941 [*cf.* note (5)], A. H. Clifford a étudié les demi-groupes qui sont *réunions de groupes*. Il a montré, en particulier, qu'un tel demi-groupe D est réunion de demi-groupes complètement simples disjoints qui sont ses sous-demi-groupes simples maximaux, la partition de D ainsi déterminée étant telle que l'équivalence $\mathcal{R}$ correspondante soit régulière et que le demi-groupe quotient $D/\mathcal{R}$ soit un demi-treillis. Une grande partie de la démonstration peut être faite sous une hypothèse plus faible, imposant seulement à tout idéal bilatère de D d'être semi-premier (1). On voit alors, d'une part, que cette hypothèse entraîne que D est *réunion de demi-groupes simples* (*cf.* théorème 4) et, d'autre part, qu'un demi-groupe réunion de demi-groupes simples est réunion de demi-groupes simples disjoints qui sont ses sous-demi-groupes simples maximaux, l'équivalence $\mathcal{R}$ correspondante étant encore régulière et $D/\mathcal{R}$ étant encore un demi-treillis (*cf.* propriétés 8 et 9). Ayant obtenu ce résultat, il était naturel d'étudier le cas intermédiaire où l'on impose aux idéaux à gauche (par exemple) de D d'être semi-premiers. On voit

(1) Cette hypothèse est plus faible que la précédente car on voit qu'un demi-groupe est réunion de groupes si et seulement si tous ses idéaux à gauche et à droite sont semi-premiers (*cf.* corollaire 1 du théorème 1).

que cette condition est équivalente au fait que D soit *réunion de demi-groupes simples à gauche* (*cf.* théorème 3). Mais, bien que D soit alors réunion de demi-groupes simples à gauche disjoints, ses sous-demi-groupes simples à gauche maximaux, l'équivalence $\mathcal{R}_g$ correspondante n'est pas nécessairement régulière.

Ce cas intermédiaire qui est, à ce point de vue, moins intéressant que les deux autres, car il semble que les demi-groupes simples réunions de demi-groupes simples à gauche puissent être très compliqués, se rattache à un autre ordre de questions. Il est en effet à peu près immédiat (*cf.* propriété 5) que tous les idéaux à gauche d'un demi-groupe D sont semi-premiers si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

(0, 2) *Pour tout* $x \in D$, *il existe* $u \in D$ *tel que l'on ait* $x = ux^2$.

Cette condition est à rapprocher de la condition

(1, 1) *Pour tout* $x \in D$, *il existe* $u \in D$ *tel que l'on ait* $x = xux$

introduite récemment par G. Thierrin [*cf.* note (2)] qui appelle demi-groupes *inversifs* les demi-groupes qui la vérifient. Par analogie, j'appelle demi-groupes *inversifs à gauche* les demi-groupes qui vérifient la condition (0, 2) et demi-groupes *inversifs à droite* les demi-groupes qui vérifient la condition symétrique (2, 0). Ce rapprochement suggère l'étude plus générale des demi-groupes qui satisfont à une condition du type suivant (avec m et n entiers positifs ou nuls) :

(m, n) *Pour tout* $x \in D$, *il existe* $u \in D$ *tel que l'on ait* $x = x^m u x^n$.

Le paragraphe I de ce travail est consacré en grande partie à la classification des demi-groupes vérifiant une ou plusieurs des conditions (m, n) avec $m + n > 1$ et des conditions citées plus haut.

Les conditions (m, n) sont toutes vérifiées dans un demi-groupe qui est réunion de groupes, en particulier dans un groupe et dans un demi-treillis. Dans le paragraphe II, j'étudie certains renforcements de ces conditions. Je précise d'abord quels sont les demi-groupes qui satisfont à l'une de ces conditions avec, de plus, *l'unicité*, pour chaque élément x, de l'élément u vérifiant l'égalité $x = x^m u x^n$. Dans un autre ordre d'idées, si l'on se limite aux conditions (1, 1), (0, 2) et (2, 0), on constate que, dans un groupe, les rôles de x et u peuvent être échangés, ces deux éléments étant inverses l'un de l'autre. Je détermine quels sont les demi-groupes vérifiant une de ces conditions et, en même temps, cette *propriété de réciprocité*. Finalement, en considérant l'une quelconque des conditions (m, n), on voit que les demi-treillis satisfont à une propriété supplémentaire que l'on peut nommer anti-réciprocité : $x = x^m u x^n$ et $u = u^m x u^n$ entraînent $x = u$. Je détermine quels sont les demi-groupes qui vérifient une des conditions (m, n) renforcée par cette *propriété d'anti-réciprocité* [sauf dans les cas $(0, n)$ et $(m, 0)$ où de tels demi-groupes peuvent être très compliqués].

1. – Classification des demi-groupes considérés : équivalences et implications liant les conditions qui servent à les définir.

Nous considérons trois familles de conditions susceptibles d'être vérifiées dans un demi-groupe D.

a. La première famille se compose des conditions, représentées par les symboles (m, n) où m et n sont des entiers positifs ou nuls et définies de la façon suivante :

(m, n) *Pour tout* $x \in D$, *il existe* $u \in D$ *tel que l'on ait* $x = x^m u x^n$.

On convient que, dans le cas où m (ou n) est nul, x^m (ou x^n) doit être supprimé au second membre de cette égalité. La condition $(0, 0)$ est évidemment triviale; la condition $(0, 1)$ exprime que chaque élément de D possède un élément unité à gauche et la condition $(1, 0)$ exprime que chaque élément de D possède un élément unité à droite; nous étudierons seulement les conditions pour lesquelles on a $m + n > 1$. Les demi-groupes vérifiant la condition $(1, 1)$ sont les demi-groupes *inversifs* (2); par analogie, nous poserons les définitions suivantes :

Définition 1. — Un demi-groupe *inversif à gauche* est un demi-groupe vérifiant la condition

$(0, 2)$ *Pour tout* $x \in D$, *il existe* $u \in D$ *tel que l'on ait* $x = ux^2$.

Définition 2. — Un demi-groupe *inversif à droite* est un demi-groupe vérifiant la condition

$(2, 0)$ *Pour tout* $x \in D$, *il existe* $u \in D$ *tel que l'on ait* $x = x^2 u$ (3).

b. La seconde famille se compose des quatre conditions suivantes :

(J) *Tout idéal (à gauche, à droite ou bilatère) de* D *est semi-premier* (4);
(IG) *Tout idéal à gauche de* D *est semi-premier;*
(ID) *Tout idéal à droite de* D *est semi-premier;*
(I) *Tout idéal bilatère de* D *est semi-premier.*

---

(2) Ces demi-groupes ont été introduits par G. Thierrin, *Comptes rendus*, t. 232, 1951, p. 376.

(3) Naturellement, la classe des demi-groupes inversifs ne coïncide pas avec celle des demi-groupes qui sont à la fois inversifs à gauche et inversifs à droite. En fait, deux des trois conditions $(1, 1)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$ entraînent la troisième et il n'y a pas d'autre relation entre ces conditions (*voir* plus loin le tableau de la figure 1).

(4) Un idéal I (à gauche, à droite ou bilatère) de D est dit semi-premier s'il vérifie la condition

$$x^2 \in I \Rightarrow x \in I.$$

Il en résulte immédiatement que l'on a $x \in I$ dès que l'on a $x^n \in I$, quel que soit n entier positif.

c. La troisième famille comprend également quatre conditions :

(G) D *est réunion de groupes* ([5]);
(SG) D *est réunion de demi-groupes simples à gauche;*
(SD) D *est réunion de demi-groupes simples à droite;*
(S) D *est réunion de demi-groupes simples.*

Nous allons montrer, grâce aux propriétés et théorèmes suivants, que toutes ces conditions se réduisent à cinq conditions logiquement distinctes.

Propriété 1. — *Les conditions* $(0, n)$ *pour* $n \geqq 2$ *sont équivalentes entre elles.*

Il est trivial que $(0, n)$ entraîne $(0, q)$ pour $q \leqq n$. D'autre part, avec $n \geqq 2$, $(0, n)$ entraîne $(0, 2n-1)$ car l'égalité $x = ux^n$ permet d'écrire

$$x = (ux)\,x^{n-1} = (u^2x^n)\,x^{n-1} = u^2x^{2n-1};$$

par suite, $(0, n)$ avec $n \geqq 2$ entraîne $(0, n+1)$, d'où l'on déduit, par induction, que $(0, 2)$ entraîne $(0, n)$ pour tout $n \geqq 2$.

Propriété 2. — *Les conditions* $(1, n)$ *pour* $n \geqq 2$ *sont équivalentes entre elles.*

La démonstration est analogue à celle de la propriété 1, l'égalité $x = xux^n$ permettant d'écrire

$$x = (xux)\,x^{n-1} = (xuxux^n)\,x^{n-1} = (xuxu)\,x^{2n-1}.$$

Propriété 3. — *Les conditions* (m, n) *pour* $m \geqq 2$ *et* $n \geqq 2$ *sont équivalentes entre elles.*

Évidemment, (m, n) entraîne (p, q) pour $p \leqq m$ et $q \leqq n$. D'autre part, (m, n) avec $m \geqq 2$ et $n \geqq 2$ entraîne $(2m-1, 2n-1)$ car, de l'égalité $x = x^m ux^n$, on déduit

$$x = x^{m-1}(xux)\,x^{n-1} = x^{m-1}(x^m ux^n ux^m ux^n)\,x^{n-1} = x^{2m-1}(ux^n ux^m u)\,x^{2n-1};$$

donc (m, n) avec $m \geqq 2$ et $n \geqq 2$ entraîne $(m+1, n)$ et $(m, n+1)$, d'où résulte, par double induction, que $(2, 2)$ entraîne (m, n) pour tout $m \geqq 2$ et tout $n \geqq 2$.

Propriété 4. — *La condition* $(1, 2)$ *est équivalente à la conjonction des conditions* $(1, 1)$ *et* $(0, 2)$.

Il est évident que $(1, 2)$ entraîne $(1, 1)$ et $(0, 2)$. Réciproquement, si un demi-groupe D vérifie $(1, 1)$ et $(0, 2)$, pour tout $x \in D$, on peut trouver $a \in D$ et $b \in D$ satisfaisant aux égalités $x = xax$ et $x = bx^2$; on en déduit

$$x = xa(bx^2) = x(ab)\,x^2,$$

donc D vérifie $(1, 2)$.

([5]) Les demi-groupes vérifiant la condition (G) ont été étudiés par A. H. Clifford, *Ann. of Math.*, t. 41, 1941, p. 1037-1049.

PROPRIÉTÉ 5. — *La condition* (0, 2) *est équivalente à la condition* (IG).

Si (0, 2) est vérifiée dans un demi-groupe D, et si un idéal à gauche de D contient x^2, il contient tout élément de Dx^2, donc en particulier x. Réciproquement, si un demi-groupe D vérifie (IG), quel que soit $x \in D$, l'idéal à gauche Dx^2, qui contient x^3, contient aussi x, d'où l'existence de u satisfaisant à (0, 2).

COROLLAIRE. — *La conjonction des conditions* (0, 2) *et* (2, 0) *est équivalente à la condition* (J).

Ceci résulte de la propriété 5 et de la propriété symétrique et du fait que la condition (J) équivaut à la conjonction des conditions (IG) et (ID).

Par analogie avec la propriété 5, nous avons la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 6. — *La condition* (I) *peut se mettre sous la forme*

(I′) *Pour tout* $x \in D$, *il existe* $a \in D$ *et* $b \in D$ *tels que l'on ait* $x = ax^2b$.

En effet, si un demi-groupe D vérifie (I), pour tout $x \in D$, l'idéal Dx^2D qui contient x^4 doit contenir x, d'où l'existence de a et b satisfaisant à (I′). Réciproquement, si (I′) est vérifiée dans un demi-groupe D, et si un idéal de D contient x^2, il contient tout élément de Dx^2D, donc en particulier x.

THÉORÈME 1. — *Un demi-groupe à la fois inversif à gauche et inversif à droite est réunion de groupes et réciproquement.*

Si un demi-groupe D est réunion de groupes, il vérifie les conditions (0, 2) et (2, 0) : il suffit de prendre pour élément u l'élément inverse de l'élément x dans un groupe auquel appartient x. Réciproquement, considérons un demi-groupe D satisfaisant aux conditions (0, 2) et (2, 0) : à tout élément $x \in D$, nous pouvons faire correspondre $a \in D$ et $b \in D$ tels que l'on ait $x = ax^2$ et $x = x^2b$; on peut écrire

$$(ax)(xb) = a(xxb) = ax = (axx)b = xb,$$

d'où résulte que l'élément $e = ax = xb$ est idempotent. Les égalités

$$x = (ax)x = ex \qquad \text{et} \qquad x = x(xb) = xe$$

montrent que cet idempotent est élément unité à gauche et à droite pour x. De plus, l'élément axb satisfait aux relations

$$(axb)x = a(xb)x = a(ax)x = ax = e,$$
$$x(axb) = x(ax)b = x(xb)b = xb = e$$

qui montrent qu'il constitue un inverse relatif pour x. Par suite, le demi-groupe D est réunion de groupes ([6]).

([6]) *Cf.* A. H. CLIFFORD, *loc. cit.*, théorème 1.

Corollaire 1. — *Pour qu'un demi-groupe soit réunion de groupes, il faut et il suffit que tous ses idéaux (à gauche, à droite et bilatères) soient semi-premiers.*

D'après le théorème 1 et le corollaire de la propriété 5, ces deux conditions sont, en effet, équivalentes à la conjonction des conditions (0, 2) et (2, 0).

Corollaire 2. — *La condition* (2, 2) *est équivalente à la conjonction des conditions* (0, 2) *et* (2, 0) *et à la condition* (G).

En effet, la condition (2, 2) entraîne les conditions (0, 2) et (2, 0). Réciproquement, si un demi-groupe vérifie la condition (G), il vérifie la condition (2, 2) : il suffit de prendre pour u le cube de l'élément inverse de x dans un groupe auquel appartient x.

Théorème 2. — *Un demi-groupe à la fois inversif et inversif à gauche est réunion de groupes et réciproquement.*

Si un demi-groupe est réunion de groupes, il vérifie les conditions (1, 1) et (0, 2) en prenant pour u l'élément inverse de x dans un groupe auquel appartient x. Pour établir la réciproque, nous pouvons considérer, d'après la propriété 4, un demi-groupe D qui vérifie la condition (1, 2); quel que soit $x \in D$, nous pouvons trouver $y \in D$ satisfaisant à l'égalité

$$x = xyx^2; \tag{1}$$

d'après la propriété 2, le demi-groupe D vérifie la condition (1, 3) et, à l'élément yx, nous pouvons associer un élément z satisfaisant à l'égalité

$$yx = (yx)z(yx)^3; \tag{2}$$

d'après (1), nous pouvons écrire

$$(yx)^3x = (yx)y(xyx^2) = (yx)^2 \tag{3}$$

d'où résulte, en utilisant d'abord (1) et (2),

$$x = x(yx)x = x(yxz(yx)^3)x = (xyxz)(yx)^3x = (xyxz)(yx)^2; \tag{4}$$

d'après la condition (1, 2), à l'élément $(yx)^2$, correspond un élément t vérifiant l'égalité

$$(yx)^2 = (yx)^2t(yx)^4$$

dont on déduit d'après (4)

$$x = (xyxz)(yx)^2 = (xyxz)(yx)^2t(yx)^4 = xt(yx)^4;$$

de cette égalité, résulte, compte tenu de (3),

$$x^2(yx) = x(xyx) = xt(yx)^4(xyx) = xt(yx)((yx)^3x)(yx) = xt(yx)^4 = x,$$

ce qui montre que la condition (2, 0) est vérifiée par le demi-groupe D qui est donc une réunion de groupes d'après le théorème 1.

COROLLAIRE 1. — *Un demi-groupe inversif dans lequel tout idéal à gauche est semi-premier est une réunion de groupes et réciproquement.*

Ceci résulte immédiatement de la propriété 5 et du théorème 2.

COROLLAIRE 2. — *La condition* (1, 2) *est équivalente à la condition* (2, 2).

C'est une conséquence du théorème 2 et du corollaire 2 du théorème 1.

LEMME 1. — *Soit* D *un demi-groupe dans lequel tout idéal à gauche est semi-premier. En désignant par* $\mathcal{R}_g$ *la relation d'équivalence définie par*

$$x \equiv y\ (\mathcal{R}_g) \Leftrightarrow \mathrm{D}x = \mathrm{D}y,$$

chaque classe de la partition correspondant à $\mathcal{R}_g$ *est un sous-demi-groupe simple à gauche de* D.

Soit a un élément quelconque de D; posons $\mathrm{D}a = \mathrm{I}$ et considérons l'ensemble S des éléments $x \in \mathrm{D}$ tels que l'on ait $\mathrm{D}x = \mathrm{I}$. Quel que soit $x \in \mathrm{S}$, on a $x^2 \in \mathrm{S}$ car l'inclusion $\mathrm{D}x^2 \subseteq \mathrm{D}x$ est évidente et l'inclusion $\mathrm{D}x \subseteq \mathrm{D}x^2$ résulte du fait que l'idéal à gauche $\mathrm{D}x^2$ est semi-premier. De là, on déduit l'égalité

$$\mathrm{I}x = \mathrm{D}x^2 = \mathrm{D}x = \mathrm{I}$$

qui montre que S est un sous-demi-groupe de D car, quels que soient $x \in \mathrm{S}$ et $y \in \mathrm{S}$, on a

$$\mathrm{D}xy = \mathrm{I}y = \mathrm{I}.$$

Montrons que S est un demi-groupe simple à gauche. Pour tout $x \in \mathrm{S}$ et tout $y \in \mathrm{S}$, de l'égalité $\mathrm{I}x = \mathrm{I}$ et du fait que y appartient à $\mathrm{D}y = \mathrm{I}$, on déduit l'existence de $i \in \mathrm{I}$ tel que l'on ait $ix = y$; or, l'égalité $\mathrm{D}y = \mathrm{I}$ prouve que l'élément i peut se mettre sous la forme $i = dy$ avec $d \in \mathrm{D}$. Le demi-groupe D vérifiant la condition (0, 2) d'après la propriété 5, il existe $u \in \mathrm{D}$ tel que l'on ait $d = ud^2$. Nous pouvons donc écrire

$$y = ix = (dy)x = d(yx) = (ud^2)(yx) = (ud)(dyx) = (ud)y = u(dy) = ui$$

d'où l'on déduit l'inclusion $\mathrm{D}y \subseteq \mathrm{D}i$ ce qui, compte tenu de l'inclusion évidente $\mathrm{D}i = \mathrm{D}dy \subseteq \mathrm{D}y$, entraîne $\mathrm{D}i = \mathrm{D}y$, c'est-à-dire $i \in \mathrm{S}$.

THÉORÈME 3. — *Pour qu'un demi-groupe soit réunion de demi-groupes simples à gauche, il faut et il suffit que tous ses idéaux à gauche soient semi-premiers, c'est-à-dire qu'il soit inversif à gauche.*

La condition est suffisante d'après le lemme 1 et elle est nécessaire car un demi-groupe qui est réunion de demi-groupes simples à gauche vérifie la condition (0, 2).

Corollaire. — *Un demi-groupe inversif qui est en même temps réunion de demi-groupes simples à gauche est réunion de groupes et, par suite, réunion de demi-groupes simples à gauche inversifs.*

C'est une conséquence des théorèmes 2 et 3.

Remarque. — Dans l'hypothèse du lemme 1, deux éléments d'un même sous-demi-groupe simple à gauche de D sont nécessairement équivalents modulo $\mathcal{R}_g$. Il en résulte que tout sous-demi-groupe simple à gauche de D est inclus dans un sous-demi-groupe simple à gauche maximal unique, son saturé par $\mathcal{R}_g$, et que deux-sous-demi-groupes simples à gauche maximaux distincts sont disjoints.

En fait, cette propriété est valable sans hypothèse sur D :

Propriété 7. — *Dans un demi-groupe* D *quelconque, tout sous-demi-groupe simple à gauche, s'il en existe, est inclus dans un sous-demi-groupe simple à gauche maximal unique et deux sous-demi-groupes simples à gauche maximaux distincts sont disjoints.*

La réunion des sous-demi-groupes simples à gauche d'une chaîne croissante (par rapport à la relation d'inclusion) de sous-demi-groupe simples à gauche est un sous-demi-groupe simple à gauche. Par suite, d'après le théorème de Zorn, tout sous-demi-groupe simple à gauche est inclus dans un sous-demi-groupe simple à gauche maximal. Le reste de la propriété 7 résulte du fait que le sous-demi-groupe R engendré par la réunion de deux sous-demi-groupes simples à gauche S et T ayant un élément commun a est simple à gauche : en effet, on a $Ra \supseteq Sa = S$ et $Ra \supseteq Ta = T$, d'où $Ra \supseteq R$ et par suite $Ra = R$; on en déduit, pour tout $s \in S$, $Rs = R$ et, pour tout $t \in T$, $Rt = R$; chaque élément $r \in R$ étant le produit d'un nombre fini d'éléments de S et d'éléments de T, ceci entraîne $Rr = R$, c'est-à-dire que R est simple à gauche.

Lemme 2. — *Soit* D *un demi-groupe dans lequel tout idéal bilatère est semi-premier. Quels que soient* $u \in D$, $v \in D$, *on a les relations :*

$$Du^2D = DuD, \tag{1}$$

$$DuvD = DvuD, \tag{2}$$

$$DuDDvD = DvuD. \tag{3}$$

La relation (1) résulte immédiatement du fait que l'idéal Du^2D est semi-premier.

L'idéal $DuvD$ contient $vuvu = (vu)^2$ donc aussi vu et, de même, l'idéal $DvuD$ contient uv, d'où la relation (2).

L'idéal $DuDDvD$ contient $vuvuvu = (vu)^3$, donc aussi vu; d'autre part, pour tout $d \in D$, l'idéal $DvuD$ contient $(ud)vu(dv) = (udv)^2$, donc aussi udv et par suite tout élément de $uDDv$ et de $DuDDvD$, ce qui établit la relation (3).

LEMME 3. — *Soit* D *un demi-groupe dans lequel tout idéal bilatère est semi-premier. En désignant par* $\mathcal{R}$ *la relation d'équivalence définie par*

$$x \equiv y(\mathcal{R}) \Leftrightarrow \mathrm{D}x\,\mathrm{D} = \mathrm{D}y\,\mathrm{D},$$

chaque classe de la partition correspondant à $\mathcal{R}$ *est un sous-demi-groupe simple de* D.

Si l'on a $x \equiv y(\mathcal{R})$, les relations (3) et (1) du lemme 2 entraînent

$$\mathrm{D}xy\,\mathrm{D} = \mathrm{D}y\,\mathrm{D}\mathrm{D}x\,\mathrm{D} = \mathrm{D}x\,\mathrm{D}\mathrm{D}x\,\mathrm{D} = \mathrm{D}x^2\,\mathrm{D} = \mathrm{D}x\mathrm{D}, \qquad \text{d'où} \qquad xy \equiv x(\mathcal{R}),$$

ce qui montre que chaque classe modulo $\mathcal{R}$ est un sous-demi-groupe de D.

Ce demi-groupe est simple : en effet, si l'on pose $\mathrm{D}x\,\mathrm{D}=\mathrm{I}$, on a $\mathrm{I}x\mathrm{I} = \mathrm{I}$ car l'idéal semi-premier $\mathrm{I}x\mathrm{I}$, évidemment inclus dans I, contient x; par suite, la relation $x \equiv y(\mathcal{R})$ entraîne l'existence de $h \in \mathrm{I}$ et $k \in \mathrm{I}$ tels que l'on ait $hxk = y$, d'où résulte $y \in \mathrm{D}h\,\mathrm{D}$ puisque cet idéal contient h; on en déduit $\mathrm{D}h\,\mathrm{D} = \mathrm{I}$, c'est-à-dire $x \equiv h(\mathcal{R})$ et l'on établit de même $x \equiv k(\mathcal{R})$.

THÉORÈME 4. — *Pour qu'un demi-groupe soit réunion de demi-groupes simples, il faut et il suffit que tous ses idéaux bilatères soient semi-premiers.*

La condition est suffisante d'après le lemme 3 et elle est nécessaire d'après la propriété 6 car un demi-groupe qui est réunion de demi-groupes simples vérifie la condition (I').

La propriété suivante est conséquence immédiate du lemme 3 :

PROPRIÉTÉ 8. — *Dans un demi-groupe* D *qui est réunion de sous-demi-groupes simples, tout sous-demi-groupe simple est inclus dans un sous-demi-groupe simple maximal unique et deux sous-demi-groupes simples maximaux distincts sont disjoints* (7).

Il suffit, en effet, de remarquer que deux éléments d'un même sous-demi-groupe simple sont nécessairement équivalents modulo $\mathcal{R}$.

La propriété suivante précise, dans une certaine mesure, la structure des demi-groupes qui sont réunion de sous-demi-groupes simples :

PROPRIÉTÉ 9. — D *étant un demi-groupe dans lequel tout idéal bilatère est semi-premier, l'équivalence* $\mathcal{R}$ *définie dans le lemme* 2 *est régulière et le demi-groupe-quotient* $\mathrm{D}/\mathcal{R}$ *est un demi-treillis* (8).

La régularité de $\mathcal{R}$ résulte de la relation (3) du lemme 2 et le demi-groupe-quotient $\mathrm{D}/\mathcal{R}$ est un demi-treillis d'après les relations (1) et (2) de ce lemme.

(7) J'ignore si la propriété 8 est valable (comme la propriété 7) sans hypothèse sur D.

(8) La démonstration des lemmes 2 et 3 et de la propriété 9 n'est qu'une adaptation de la démonstration que fait A. H. CLIFFORD, *loc. cit.*, dans l'étude de la structure des demi-groupes qui sont réunions de groupes.

En groupant les résultats précédents et éventuellement les résultats symétriques, il nous reste cinq conditions logiquement différentes :

a. D *est réunion de groupes,* ce qui se traduit par une des conditions équivalentes : (G), (J), (m, n) avec $m \geqq 2$ et $n \geqq 2$, $(1, n)$ avec $n \geqq 2$, $(m, 1)$ avec $m \geqq 2$.

b. D *est inversif à gauche,* ce qui se traduit par une des conditions équivalentes : (SG), (IG), $(0, n)$ avec $n \geqq 2$.

c. D *est inversif à droite,* ce qui se traduit par une des conditions équivalentes : (SD), (ID), $(m, 0)$ avec $m \geqq 2$.

d. D *est inversif,* ce qui se traduit par la condition $(1, 1)$.

e. D *est réunion de demi-groupes simples,* ce qui se traduit par une des conditions équivalentes : (S), (I), (I′).

Avant de résumer dans un tableau les implications liant ces cinq conditions, nous démontrons la propriété suivante :

Propriété 10. — *Un demi-groupe qui est à la fois inversif et réunion de demi-groupes simples est réunion de demi-groupes simples inversifs.*

Soit D un tel demi-groupe. Nous montrons que les classes modulo $\mathcal{R}$ définies dans le lemme 3 sont des demi-groupes inversifs : x étant un élément d'une telle classe X, puisque D est inversif, nous pouvons trouver $u \in D$ vérifiant l'égalité $x = xux$; cette égalité entraîne $x = (xux)ux = x(uxu)x$; en désignant par U la classe modulo $\mathcal{R}$ de l'élément u, nous avons, dans le demi-groupe-quotient $D/\mathcal{R}$ qui est un demi-treillis d'après la propriété 9,

$$X = XUX = XU \qquad \text{et} \qquad UXU = XU = X,$$

ce qui montre que l'élément uxu appartient à X; par conséquent, le demi-groupe simple X est inversif.

Dans le tableau de la figure 1, nous avons ajouté aux cinq conditions précédentes la condition

(SI) D *est réunion de demi-groupes simples inversifs*

qu'on peut encore mettre sous la forme

(SI′) *Pour tout* $x \in D$, *il existe* $a \in D$ *et* $b \in D$ *tels que l'on ait* $x = xax^2bx$.

Grâce à cette adjonction, le tableau est un sous-demi-treillis (par rapport à la conjonction logique) du treillis des conditions susceptibles d'être vérifiées dans un demi-groupe. Pour nous en assurer, nous utiliserons, d'une part, quatre contre-exemples destinés à montrer que les six conditions examinées sont effectivement distinctes, d'autre part, la propriété 10, le théorème 1, le théorème 2 et le symétrique du théorème 2 qui montrent que l'on a bien un sous-demi-treillis du treillis des conditions.

Exemple 1. — Le demi-groupe de Baer et Levi (9) est simple à gauche; par conséquent, il est inversif à gauche. Il n'est ni inversif ni inversif à droite car chacune de ces conditions entraîne, pour chaque élément, l'existence d'un élément unité à droite, ce qui n'est pas vérifié (10).

Exemple 2. — Le produit du demi-groupe de Baer et Levi et d'un demi-groupe anti-isomorphe au demi-groupe de Baer et Levi est simple; donc, il vérifie la condition (S). Il ne vérifie pas les conditions (1, 1), (0, 2), (2, 0) puisque le demi-groupe de Baer et Levi ne vérifie pas les conditions (1, 1) et (2, 0).

Exemple 3. — Le demi-groupe de toutes les applications d'un ensemble E dans lui-même est inversif; en effet, soit α une de ces applications et considérons

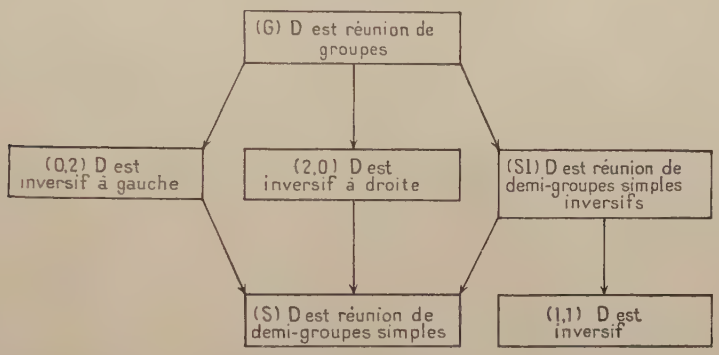

Fig. 1.

une application β telle que l'on ait $\beta(x) \in \alpha^{-1}(x)$, pour tout $x \in \alpha(E)$; il existe évidemment toujours au moins une application vérifiant cette condition et elle satisfait à l'égalité $\alpha\beta\alpha = \alpha$. Ce demi-groupe n'est pas réunion de demi-groupes simples si E possède au moins trois éléments car il ne vérifie pas alors la condition (I') de la propriété 6; en effet, soient x et y deux éléments distincts de E et soit α l'application définie par $\alpha(x) = \alpha(y) = x$ et $\alpha(z) = y$ pour tout élément z de E différent de x et y; on a $\alpha^2(x) = \alpha^2(y) = \alpha^2(z) = x$, donc l'application α^2 est une application constante; par suite, quelles que soient les applications β et γ, l'application $\gamma\alpha^2\beta$ est également une application constante qui ne peut donc être égale à α.

---

(9) *Cf.* R. Baer et F. Levi, *Sitzungsb. der Heidelberger Akad. der Wissenschaften*, t. 18, 1932, p. 7. On entend d'ordinaire sous le nom de demi-groupe de Baer et Levi un demi-groupe plus général que celui qui a été utilisé par ces auteurs : il s'agit du demi-groupe de toutes les applications biuniyoques α d'un ensemble E infini dans lui-même telles que le complémentaire de $\alpha(E)$ dans E ait une puissance déterminée au moins égale au dénombrable. *Cf.* M. Teissier, *C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 1120.

(10) *Cf.* M. Teissier, *loc. cit.*, II, 2°.

Exemple 4. — E étant un ensemble infini quelconque, nous considérons les applications α de E dans E satisfaisant à la condition suivante :

(F) *Pour tout* $x \in E$, *l'ensemble* $\alpha^{-1}(x)$, *s'il n'est pas vide, est fini* ([11]).

Il est immédiat que ces applications forment un sous-demi-groupe D du demi-groupe de toutes les applications de E dans E. Nous allons montrer que le demi-groupe D vérifie la condition (SI) sans vérifier les conditions (0, 2) et (2, 0). Pour cela, nous établissons successivement que D est simple, qu'il est inversif et qu'il n'est pas réunion de groupes.

D'après la condition (F), quel que soit $\alpha \in D$, l'ensemble $\alpha(E)$ est équipotent à E. Considérons deux éléments quelconques, α et β, de D et montrons qu'il est possible de trouver deux éléments, γ et δ, de D tels que l'on ait $\beta = \delta\alpha\gamma$. Les ensembles $\beta(E)$ et $\alpha(E)$ étant équipotents d'après la remarque précédente, nous pouvons déterminer une application biunivoque π de $\beta(E)$ sur $\alpha(E)$. Considérons d'autre part une application τ (évidemment biunivoque) de $\alpha(E)$ dans E vérifiant $\tau(x) \in \alpha^{-1}(x)$ pour tout $x \in \alpha(E)$. Posons $\gamma = \tau\pi\beta$ et déterminons δ de façon à ce que sa trace sur $\alpha(E)$ coïncide avec π^{-1} et de façon à ce que la condition (F) soit réalisée, ce qui est toujours possible; nous aurons alors $\delta\alpha = \pi^{-1}\alpha$ et nous pourrons écrire

$$\delta\alpha\gamma = \pi^{-1}\alpha\tau\pi\beta = \pi^{-1}(\alpha\tau)\pi\beta = \pi^{-1}\pi\beta = \beta,$$

ce qui montre que D est simple.

Quel que soit $\alpha \in D$, nous pouvons déterminer une application β de E dans E satisfaisant à la condition (F) et telle que l'on ait $\beta(x) \in \alpha^{-1}(x)$ pour tout $x \in \alpha(E)$. Nous avons $\alpha\beta\alpha = \alpha$ et par suite D est inversif.

D n'est pas réunion de groupes. En effet, puisque D est simple, s'il était réunion de groupes, il serait complètement simple ([12]). Il ne peut en être ainsi car nous pouvons trouver dans D un idempotent non primitif : les idempotents de D sont les applications ε de E dans E vérifiant la condition (F) et la condition suivante :

(C) *Pour tout* $x \in \varepsilon(E)$, *on a* $\varepsilon(x) = x$;

ε étant l'un quelconque de ces idempotents, on peut trouver un idempotent φ différent de ε tel que l'on ait $\varphi\varepsilon = \varepsilon\varphi = \varphi$; il suffit pour cela que φ satisfasse aux conditions supplémentaires $\varphi(E) \subset \varepsilon(E)$ et $\varepsilon(x) = \varepsilon(y) \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$.

Remarque. — Si D est un demi-groupe fini qui soit réunion de demi-groupes simples, il est réunion de groupes : en effet, tout demi-groupe simple fini

---

([11]) Il suffirait d'une condition plus faible que la condition (F) :

Pour tout $x \in E$, *la puissance de l'ensemble* $\alpha^{-1}(x)$ *est bornée par une puissance fixe strictement inférieure à celle de* E.

([12]) *Cf.* A. H. Clifford, *loc. cit.*, lemme 2,7.

contient un idempotent, donc il contient un idempotent primitif; par suite, il est complètement simple et est donc réunion de groupes. Il en résulte que, dans le cas d'un demi-groupe fini, les conditions (G), (0, 2), (2, 0), (SI) et (S) sont équivalentes; la condition (1, 1) est plus faible qu'elles comme le montre l'exemple 3 qui peut être fini.

II. — Étude des demi-groupes définis par certains renforcements des conditions (m, n).

Nous considérons d'abord les demi-groupes définis par l'une des conditions (m, n) auxquels on impose, de plus, pour tout x, l'unicité de l'élément u satisfaisant à la condition (m, n). Nous dirons qu'un tel demi-groupe vérifie la condition (m, n) *avec unicité*. Nous appellerons, en particulier, demi-groupes inversifs (ou inversifs à gauche, ou inversifs à droite) *avec unicité* les demi-groupes qui vérifient la condition (1, 1) [ou la condition (0, 2), ou la condition (2, 0)] avec unicité.

Théorème 5. — *Les seuls demi-groupes inversifs avec unicité sont les groupes.*

Un demi-groupe inversif avec unicité ne peut posséder deux idempotents distincts. En effet, soient deux idempotents e et f d'un tel demi-groupe D. Il existe un élément $g \in D$ vérifiant l'égalité $(ef)g(ef) = ef$; or, on sait que, si l'élément u qui satisfait à $xux = x$ est unique, on a $uxu = u$ [13]; par suite, l'élément g vérifie aussi l'égalité $g(ef)g = g$. Mais, $(ef)g(ef) = ef$ peut s'écrire

$$(ef)(fg)(ef) = ef \qquad \text{et} \qquad (ef)(ge)(ef) = ef,$$

d'où résulte $fg = ge = g$ d'après la condition d'unicité. On en tire $(ge)(fg) = g^2$, ce qui, compte tenu de $g(ef)g = g$ implique que g est un idempotent. Par suite, on a $ggg = g$ et l'on en déduit $ef = g$ en utilisant encore la relation $g(ef)g = g$ et la condition d'unicité. L'élément ef étant un idempotent, on peut écrire

$$(ef)e(ef) = ef \qquad \text{et} \qquad (ef)f(ef) = ef,$$

d'où résulte $e = f$ d'après la condition d'unicité.

Un demi-groupe inversif avec unicité D possédant au moins un idempotent, il en possède un et un seul que nous désignons par e. Soit x un élément quelconque de D et u l'élément de D qui lui correspond par la condition (1, 1). De $xux = x$, résulte $xu = ux = e$ qui est donc élément unité de D par rapport auquel tout élément de D admet un élément inverse. Par suite, D est un groupe.

Théorème 6. — *Les seuls demi-groupes vérifiant l'une des conditions* (0, n)

(13) *Cf.* G. Thierrin, *loc. cit.*

pour $n \geq 2$ avec unicité sont les groupes à gauche ([14]). *En particulier, les seuls demi-groupes inversifs à gauche avec unicité sont les groupes à gauche.*

Un demi-groupe D vérifiant l'une des conditions (o, n) pour $n \geq 2$ avec unicité est réunion de demi-groupes simples à gauche d'après la propriété 1 et le théorème 3. Soit S l'un quelconque de ces demi-groupes simples à gauche; pour tout $x \in S$, il existe $u \in S$ satisfaisant à $x = ux^n$ (puisque S est simple à gauche) et cet élément u est unique d'après la condition d'unicité; il en résulte que S est un groupe à gauche ([15]), donc que D est réunion de groupes.

Par suite, D est réunion de demi-groupes complètement simples qui sont ses classes modulo l'équivalence $\mathcal{R}$ définie au lemme 3 ([16]). D'après la condition d'unicité, chacun de ces demi-groupes complètement simples est un groupe à gauche (sinon, il contiendrait un groupe à droite qui ne serait pas un groupe et qui mettrait la condition d'unicité en défaut). Supposons que l'équivalence $\mathcal{R}$ ne soit pas l'équivalence absolue. D'après la propriété 9, nous pourrions trouver deux classes modulo $\mathcal{R}$ distinctes, soient S_α et S_β, telles que l'on ait $S_\alpha S_\beta \subseteq S_\beta$ et $S_\beta S_\alpha \subseteq S_\beta$. La réunion de S_α et S_β serait un demi-groupe dont la structure est connue grâce à un théorème de A. H. Clifford ([17]). En utilisant les notations de ce théorème, S_β étant un groupe à gauche, l'application Φ devrait être un homomorphisme de S_α dans S_β. En désignant par E un élément idempotent de S_α, $E\Phi$ serait nécessairement l'élément unité du groupe G; d'autre part, l'application $i \to Ei$ de l'ensemble J dans lui-même étant idempotente, il existerait $i_0 \in J$ tel que l'on ait $Ei_0 = i_0$; on pourrait alors écrire, en négligeant le second indice des éléments de S_β puisque K se réduit ici à un seul élément :

$$E(e; i_0)^n = E(e; i_0) = (E\Phi.e; Ei_0) = (e; i_0),$$

ce qui contredirait la condition d'unicité puisqu'on a évidemment déjà

$$(e; i_0)(e; i_0)^n = (e; i_0).$$

Donc, l'équivalence $\mathcal{R}$ est l'équivalence absolue, c'est-à-dire que D est simple et est un groupe à gauche.

([14]) On appelle groupe à gauche un demi-groupe qui vérifie l'existence des quotients à gauche et la règle de simplification à droite. On sait que cette deuxième condition est équivalente, en présence de la première, à l'existence d'au moins un élément idempotent et qu'un tel demi-groupe est isomorphe au produit d'un groupe et d'un anti-semi-groupe à droite (demi-groupe dans lequel tout élément est permis à droite).

([15]) Un demi-groupe simple à gauche dans lequel il existe deux éléments a et b tels que $ub = vb = a$ entraîne $u = v$ est un groupe à gauche. *Cf.* R. Croisot, *C. R. Acad. Sc.*, t. 237, 1953, p. 778, lemme 2.

([16]) *Cf.* A. H. Clifford, *loc. cit.*, § 2.

([17]) *Loc. cit.*, théorème 4.

THÉORÈME 7. — *Les seuls demi-groupes vérifiant l'une des conditions* (m, n) *pour* $m \geq 1$ *et* $n \geq 1$ *avec unicité sont les groupes.*

Pour $m = n = 1$, ceci a fait l'objet du théorème 5. Nous pouvons donc supposer qu'on a $m + n > 2$. Un demi-groupe D satisfaisant à l'hypothèse est alors nécessairement une réunion de groupes d'après le théorème 1, le théorème 2 ou le théorème symétrique du théorème 2. La condition d'unicité entraîne que les demi-groupes complètement simples qui constituent les classes modulo $\mathcal{R}$ sont des groupes, ce qui implique la permutabilité des idempotents de D ([18]). Si e et f sont deux idempotents de D, nous pouvons donc écrire

$$(ef)^m e(ef)^n = (ef)^m f(ef)^n = ef,$$

d'où $e = f$ d'après la condition d'unicité. Le demi-groupe D contenant un seul idempotent, $\mathcal{R}$ est l'équivalence absolue et D est un groupe.

Remarquons maintenant que, dans un groupe, l'élément u satisfaisant à une condition (m, n) avec $m + n = 2$ est l'élément inverse de l'élément x; par suite, la correspondance entre x et u est alors réciproque. Il semble donc naturel d'étudier les demi-groupes définis par l'une des conditions (m, n) avec $m + n = 2$ auxquels on impose, de plus, cette réciprocité. Nous appellerons ces demi-groupes demi-groupes inversifs (ou inversifs à gauche, ou inversifs à droite) *avec réciprocité*.

LEMME 4. — *Un demi-groupe complètement simple est inversif avec réciprocité, inversif à gauche avec réciprocité, inversif à droite avec réciprocité.*

On sait ([19]) qu'un tel demi-groupe D peut être représenté de la façon suivante : G étant un groupe, J et K deux ensembles d'indices, et $(j, k) \to p_{kj}$ une application de $J \times K$ dans G, les éléments de D sont les triples $(a; j, k)$ avec $a \in G$, $j \in J$, $k \in K$, la loi de composition étant donnée par

$$(a; j, k)(a'; j', k') = (ap_{kj'}a'; j, k').$$

Soit alors $x = (a; j, k)$ un élément quelconque de D; cherchons comment doit être choisi $u = (a'; j', k')$ pour qu'on ait $xux = x$; on doit avoir pour cela :

$$(ap_{kj'}a'p_{kj}a; j, k) = (a; j, k);$$

on peut donc choisir arbitrairement j' et k', puis déterminer a' par l'éga-

([18]) En effet, soient A et B deux classes modulo $\mathcal{R}$; soient e et f leur élément unité respectif; il existe une classe modulo $\mathcal{R}$, soit C, telle que l'on ait $AB \subseteq C$ et $BA \subseteq C$; g étant l'élément unité de C, on peut écrire $(ef)g = e(fg) = eg = g$, d'où $ef = g$, et de même $fe = g$. On obtient ainsi une propriété caractéristique des demi-groupes réunions de groupes dans lesquels les idempotents sont permutables : leurs sous-demi-groupes simples maximaux sont des groupes.

([19]) *Cf.* D. REES, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, t. 36, 1940, p. 387-400.

lité $(ap_{kj'})(a'p_{k'j}) = e$, élément unité de G. Mais cette égalité peut aussi se mettre sous la forme $(a'p_{k'j})(ap_{kj'}) = e$, ce qui établit la réciprocité entre x et u. Donc, D est inversif avec réciprocité.

En utilisant les mêmes notations, cherchons maintenant comment on doit choisir u pour qu'on ait $x = ux^2$; on doit alors vérifier l'égalité

$$(a'p_{kj}ap_{kj}a; j', k) = (a; j, k);$$

donc, j' doit être égal à j, k' est arbitraire et a' doit satisfaire à $(a'p_{k'j})(ap_{kj}) = e$. Ceci s'écrit encore $(ap_{kj})(a'p_{k'j}) = e$, d'où la réciprocité entre x et u. Donc, D est inversif à gauche avec réciprocité et, par symétrie, inversif à droite avec réciprocité.

Lemme 5. — *Soit* D *un demi-groupe vérifiant la condition*

$$xyx = x \Rightarrow yxy = y;$$

soit $\mathcal{R}$ *la relation d'équivalence définie dans* D *par*

$$a \equiv b(\mathcal{R}) \Leftrightarrow \mathrm{D}a\,\mathrm{D} = \mathrm{D}b\,\mathrm{D};$$

si un produit d'éléments de D *est égal à un idempotent, tous les éléments de ce produit sont équivalents à cet idempotent modulo* $\mathcal{R}$.

Considérons d'abord le cas d'un produit de deux éléments : $uv = e$, idempotent de D; on a $e = euv \in \mathrm{D}u\,\mathrm{D}$; d'autre part, on peut écrire

$$(ve)\,u(ve) = ve(uv)e = veee = ve,$$

d'où résulte, d'après l'hypothèse, $u = u(ve)u = (uv)eu$, ce qui entraine $u \in \mathrm{D}e\,\mathrm{D}$; on a donc $u \equiv e(\mathcal{R})$; par symétrie, on a également $v \equiv e(\mathcal{R})$.

Considérons maintenant le cas d'un produit de trois éléments : $uvw = e$, idempotent de D; cette égalité peut s'écrire $u(vw) = e$ ou $(uv)w = e$, d'où résulte, d'après ce qu'on vient d'établir $u \equiv w \equiv e(\mathcal{R})$; d'autre part, on a

$$(weuv)(weuv) = we(uvw)e(uv) = w(eee)uv = weuv,$$

ce qui montre que cet élément est un idempotent, soit f; on peut alors écrire $(weu)v = f$ et $w(euv) = f$, d'où l'on déduit $v \equiv w \equiv f(\mathcal{R})$, et, par suite, $u \equiv v \equiv w \equiv e(\mathcal{R})$.

Le cas d'un nombre quelconque d'éléments en résulte immédiatement.

Théorème 8. — *Les demi-groupes inversifs avec réciprocité sont les demi-groupes complètement simples.*

D'après le lemme 4, il suffit de montrer qu'un demi-groupe inversif avec réciprocité est un demi-groupe complètement simple.

Montrons d'abord qu'un tel demi-groupe D est simple; D étant inversif, on a $\mathrm{D}^3 = \mathrm{D}$ et il suffit d'établir que l'équivalence $\mathcal{R}$ définie dans le lemme 5 est

l'équivalence absolue. Soient x et y deux éléments quelconques de D; on peut trouver $z \in D$ tel que l'élément $(xy)z$ soit idempotent ([20]); il en résulte, d'après le lemme 5, que les éléments x et y sont équivalents modulo $\mathcal{R}$, c'est-à-dire que l'équivalence $\mathcal{R}$ est bien l'équivalence absolue.

Soit e un idempotent de D; nous montrons qu'il est primitif. En effet, si f est un idempotent de D vérifiant les égalités $ef = fe = f$, on a $fef = f$, d'où $efe = e$, d'après la condition de réciprocité, ce qui entraîne $e = f$. Le demi-groupe simple D est donc complètement simple.

THÉORÈME 9. — *Les demi-groupes inversifs à gauche avec réciprocité sont les demi-groupes complètement simples.*

En vertu du lemme 4, il reste à établir qu'un demi-groupe D inversif à gauche avec réciprocité est complètement simple.

A tout élément $x \in D$, on peut faire correspondre $u \in D$ tel que l'on ait $x = ux^2$; on en déduit $u = xu^2$ d'après la condition de réciprocité, d'où résulte $x = xu^2x^2$, ce qui entraîne que D est inversif. D est donc réunion de groupes d'après le théorème 2.

Il suffit de montrer que D est simple. S'il n'en était pas ainsi, nous pourrions trouver deux sous-demi-groupes simples maximaux de D, soient S_α et S_β, tels que l'on ait $S_\alpha S_\beta \subseteq S_\beta$ et $S_\beta S_\alpha \subseteq S_\beta$. Considérons, dans cette hypothèse, un idempotent de S_α, soit E; en utilisant à nouveau les notations de A. H. Clifford ([17]), l'application $i \to Ei$ de l'ensemble J dans lui-même étant idempotente, il existe $j \in J$ tel que l'on ait $Ej = j$; prenons un élément x de S_β de la forme $(a; j, k)$, a étant un élément de G et k un élément de K fixé arbitrairement; le produit Ex^2 peut s'écrire

$$Ex^2 = E(ap_{kj}a; j, k) = (E\Phi . p_{1E,j}ap_{kj}a; j, k);$$

si l'on choisit alors a de façon à satisfaire à l'égalité $E\Phi . p_{1E,j}ap_{kj} = e$, élément unité de G, on a $Ex^2 = x$, ce qui contredit la condition de réciprocité, car l'élément xE^2 appartient à S_β et il ne peut être égal à E.

La fin de ce travail se justifie par la remarque suivante : dans un demi-treillis, l'élément u satisfaisant à une condition (m, n) appartient à l'idéal principal engendré par l'élément x; par suite, la correspondance entre x et u est alors anti-réciproque (u correspond à x et x correspond à u entraînent $x = u$). C'est pourquoi nous allons étudier les demi-groupes définis par l'une des conditions (m, n) auxquels on impose, de plus, cette anti-réciprocité. Nous dirons qu'ils vérifient la condition (m, n) considérée *avec anti-réciprocité*.

([20]) En réalité, nous utilisons seulement le fait que D est un demi-groupe inversé (*Cf.* G. THIERRIN, *C. R. Acad. Sc.*, t. 234, 1952, p. 1336). Par conséquent, les demi-groupes inversés vérifiant la condition du lemme 5 sont les demi-groupes complètement simples.

THÉORÈME 10. — *Les demi-groupes inversifs avec anti-réciprocité sont les demi-groupes réunions de groupes dans lesquels les sous-demi-groupes simples maximaux sont des groupes involutifs* ([21]).

Soit D un demi-groupe inversif avec anti-réciprocité. Pour tout $x \in D$, il existe $u \in D$ tel que l'on ait $x = xux$; cette égalité entraîne

$$x = xu(xux) = x(uxu)x \qquad \text{et} \qquad uxu = ux(uxu)xu = (uxu)x(uxu),$$

d'où $x = uxu$, d'après la condition d'anti-réciprocité; on en tire

$$x^2 = (uxu)x = u(xux) = ux \qquad \text{et} \qquad x^2 = x(uxu) = (xux)u = xu, \qquad \text{d'où} \qquad ux = xu.$$

Par suite, l'égalité $x = xux$ peut s'écrire $x = ux^2$, ce qui montre que D est inversif à gauche et par conséquent réunion de groupes en vertu du théorème 2. La condition d'anti-réciprocité entraîne alors que les demi-groupes complètement simples qui constituent ses sous-demi-groupes simples maximaux sont des groupes et que ces groupes sont involutifs.

Réciproquement, soit D un demi-groupe réunion de groupes dans lequel les sous-demi-groupes simples maximaux sont des groupes involutifs. D est évidemment inversif. Supposons que x et u soient deux éléments de D vérifiant les égalités $x = xux$ et $u = uxu$. Si l'on désigne par X et U respectivement les sous-demi-groupes simples maximaux qui contiennent x et u, on a, dans le demi-treillis $D/\mathcal{R}$ défini dans la propriété 9,

$$X = XUX = XU \qquad \text{et} \qquad U = UXU = XU, \qquad \text{d'où} \qquad X = U,$$

c'est-à-dire que x et u appartiennent au même sous-demi-groupe simple maximal. Celui-ci étant un groupe involutif, on a $x = u$, d'où la condition d'anti-réciprocité.

THÉORÈME 11. — *Les demi-groupes vérifiant l'une des conditions* (m, n) *pour* $m \geqq 1$, $n \geqq 1$, $m + n \geqq 3$ *avec anti-réciprocité sont les demi-groupes réunions de groupes dans lesquels les sous-demi-groupes simples maximaux sont des groupes satisfaisant, pour* $k = m + n$, *à la propriété*

(P_k) *Si l'ordre d'un élément divise* $k(k-2)$, *cet ordre divise* k ([22]).

Soit D un demi-groupe vérifiant une condition (m, n) pour $m \geqq 1$, $n \geqq 1$, $m + n \geqq 3$ avec anti-réciprocité. Il est réunion de groupes. La condition d'anti-réciprocité entraîne que les demi-groupes complètement simples qui constituent ses sous-demi-groupes simples maximaux sont des groupes. Si x est un élément quelconque d'un tel groupe, soit G, il existe dans G un élément et un seul u satisfaisant à l'égalité $x = x^m u x^n$; c'est l'élément $u = x^{1-m-n}$.

([21]) La structure de ces demi-groupes est connue d'après l'étude de A. H. CLIFFORD, *loc. cit.*, § 3, en vertu de la remarque de la note ([18]). Ils sont nécessairement commutatifs.

([22]) Il est remarquable que ceci n'impose aucune condition si $k = 3$.

Supposons alors que G possède un élément g dont l'ordre divise $k(k-2)$ pour $k=m+n$; en prenant $x=g$, nous avons $u=g^{1-k}$ et en prenant $x=g^{1-k}$, nous avons $u=g^{(1-k)^2}=g^{k(k-2)}g=g$; on en déduit, d'après la condition d'anti-réciprocité, $g=g^{1-k}$, c'est-à-dire que l'ordre de g divise k.

Réciproquement, soit D un demi-groupe réunion de groupes dans lequel les sous-demi-groupes simples maximaux sont des groupes satisfaisant à la propriété (P_k). On voit d'abord, comme dans la réciproque du théorème 10 que les égalités $x=x^m u x^n$ et $u=u^m x u^n$ peuvent être compatibles seulement si x et u appartiennent au même sous-demi-groupe simple maximal; s'il en est ainsi, nous pouvons écrire $u=x^{1-m-n}$ et $x=u^{1-m-n}$, d'où résulte, puisqu'on a $m+n=k$, la propriété (P_k) étant vérifiée,

$$x=x^{(1-k)^2}=x^{k(k-2)}x=x^{-k}x=x^{1-k}=u.$$

La condition d'anti-réciprocité est donc réalisée.

Remarque. — Les demi-groupes vérifiant l'une des conditions (o, n) pour $n\geq 2$ avec anti-réciprocité peuvent avoir une structure très compliquée car il en est ainsi en particulier des demi-groupes réunions de demi-groupes simples dans lesquels chaque sous-demi-groupe simple maximal est un demi-groupe simple à gauche sans idempotent ou un groupe à gauche dont les sous-groupes maximaux sont involutifs si $n=2$ ou satisfont à la propriété (P_n) si $n>2$.

ALGÈBRES UNITAIRES ET ESPACES D'AMBROSE

PAR R. PALLU DE LA BARRIÈRE.

Introduction.

Le présent travail répond à différentes préoccupations :

A. Montrer les rapports entre la théorie des « L^2 system » de W. Ambrose [1] (1) et celle des algèbres unitaires de R. Godement et Nakano [8] et [11].

B. Montrer que les axiomes des « L^2 system » sont surabondants et donner des axiomes indépendants dont les axiomes de W. Ambrose non conservés se déduisent. Il y a ainsi identité entre « L^2 system » et « espaces d'Ambrose ».

C. Profiter des notions introduites en vue de l'étude précédente pour donner des démonstrations simplifiées de certains résultats connus tels que le théorème de commutation (th. 2).

D. Montrer que dans le cas de l'espace d'Ambrose défini sur l'espace des fonctions de carré intégrable sur un groupe localement compact unimodulaire par l'involution $f \to f^*\left[f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}\right]$ et le produit de composition, la définition abstraite et opérationnelle de l'espace d'Ambrose coïncide avec la définition naturelle (th. 6).

E. Donner quelques compléments relatifs aux produits tensoriels d'algèbres unitaires et d'espaces d'Ambrose (§ 3).

F. Donner dans le cas général une rapide discussion des propriétés centrales des espaces d'Ambrose permettant une classification (§ 4). Cette étude est directement inspirée du cas particulier traité dans [7].

La lecture de ce Mémoire ne suppose pas celle préalable des Mémoires de W. Ambrose, R. Godement et Nakano sur le sujet, mais par contre la connaissance des résultats fondamentaux sur les algèbres d'opérateurs dans les espaces hilbertiens; en particulier ceux relatifs à leur classification. Les notations sont conformes à celles de [14].

(1) Les nombres entre crochets renvoient à la bibliographie.

La démonstration de l'un de nos résultats a été publiée dans une précédente Note [15]. On trouvera ici une démonstration sensiblement simplifiée grâce aux judicieuses remarques de J. Dixmier dont les conseils nous ont permis par ailleurs d'importantes améliorations dans l'exposé de nos résultats.

1. Définitions et propriétés générales.

DÉFINITION 1. — *Une algèbre unitaire est une $\star$-algèbre* **A** *munie d'une structure d'espace préhilbertien au moyen d'un produit scalaire* $\langle u, v \rangle$ *et vérifiant les axiomes suivants :*

(AU 1) $\langle u, v \rangle = \langle v^*, u^* \rangle$;

(AU 2) $\langle uv, w \rangle = \langle v, u^* w \rangle$;

(AU 3) *Pour tout* $u \in \mathbf{A}$ *l'opérateur* $v \to vu$ *est continu pour la topologie forte définie par la structure préhilbertienne ;*

(AU 4) *Les éléments de la forme* uv *sont denses dans* **A**.

Remarque 1. — Étant donné une algèbre unitaire **A**, la relation $uv = (v^* u^*)^*$ montre que l'opérateur $v \to uv$ est pour tout $u \in \mathbf{A}$ un opérateur borné pour la topologie forte. On a, d'autre part, pour $u, v, w \in \mathbf{A}$:

$$\langle uv, w \rangle = \langle w^*, v^* u^* \rangle = \langle vw^*, u^* \rangle = \langle u, wv^* \rangle$$

et par suite la relation :

$$\langle uv, w \rangle = \langle u, wv^* \rangle.$$

Ces deux remarques rétablissent la symétrie entre les propriétés de la multiplication à gauche et de la multiplication à droite dans les algèbres unitaires.

Donnons maintenant quelques définitions et notations nécessaires à l'introduction de la notion d'espace d'Ambrose.

Étant donné un espace hilbertien H, nous appellerons multiplication partiellement définie sur H, toute application d'une partie de $H \times H$ dans H notée $(x, y) \to xy$. Pour tout $x \in H$, nous noterons L_x et R_x, les applications partielles $y \to xy$ et $y \to yx$. Aucune hypothèse même de linéarité n'est faite *a priori* sur ces applications.

DÉFINITION 2. — *Étant donné un espace hilbertien* H *muni d'une involution* $x \to x^*$ *et d'une multiplication partiellement définie* $(x, y) \to xy$, *on appelle algèbre unitaire sous-jacente à* H, *tout sous-espace vectoriel* **A**, *dense dans* H *tel que l'involution, la multiplication et la structure hilbertienne de* H *induisent sur* **A** *une structure d'algèbre unitaire* (*ceci suppose en particulier que* **A** *soit stable pour l'involution et que le produit de deux éléments de* **A** *soit toujours défini et soit élément de* **A**).

Remarque 2. — Si $\mathbf{A}$ est une algèbre unitaire sous-jacente à H, la restriction de R_u (et de L_u) à $\mathbf{A}$ est pour $u \in \mathbf{A}$ un opérateur linéaire et continu.

DÉFINITION 3. — *Étant donné un espace hilbertien* H *possédant une involution et une multiplication partiellement définie, une algèbre unitaire* $\mathbf{A}$, *sous-jacente à* H *sera dite régulière si :*

(i) R_u *est continu et partout défini pour* $u \in \mathbf{A}$ ([2]);
(ii) *Si* l_x *est la restriction de* L_x *à* $\mathbf{A}$, *on a pour tout* $x \in H$, $L_x = l_{x^*}^*$.

DÉFINITION 4. — *Un espace hilbertien* H *possédant une involution et une multiplication partiellement définie est dit espace d'Ambrose s'il vérifie l'axiome suivant :*

(EA) *Il existe une algèbre unitaire sous-jacente à* H *et régulière.*

Par la suite H étant un espace d'Ambrose, nous désignerons toujours par $\mathbf{A}$ une algèbre unitaire sous-jacente à H et régulière. Nous montrerons plus tard que toute algèbre unitaire sous-jacente à H est régulière.

Remarque 3. — D'après les définitions, L_x est pour tout $x \in H$ un opérateur linéaire fermé dont l'ensemble de définition est dense dans H. Pour tout $u \in \mathbf{A}$, l'opérateur l_u est borné (rem. 1). Il en est de même de L_u qui est donc le plus petit prolongement fermé de l_u. L'opérateur L_{u^*} est également borné (comme $u^* \in \mathbf{A}$.) On a alors

$$L_u^* = (l_{u^*}^*)^* = l_{u^*}^{**} = L_{u^*}.$$

On démontrera plus loin que pour tout $x \in H$, on a $L_x^* = L_{x^*}$.

Remarque 4. — Le produit xy est toujours défini si l'un des facteurs est élément de $\mathbf{A}$.

LEMME 1. — *On a les égalités suivantes :*

(i) $\langle ux, y\rangle = \langle x, u^*y\rangle$
(ii) $\langle xu, y\rangle = \langle x, yu^*\rangle$ } *pour* $x, y \in H$ *et* $u \in \mathbf{A}$;
(iii) $\langle xu, v\rangle = \langle u, x^*v\rangle$
(iv) $\langle ux, v\rangle = \langle u, vx^*\rangle$ } *pour* $x \in H$ *et* $u, v \in \mathbf{A}$;
(v) $(ux)^* = x^*u^*$ *pour* $x \in H$ *et* $u \in \mathbf{A}$;
(vi) $\langle x, y^*u\rangle = \langle y, ux^*\rangle$ *pour* $x, y \in H$ *et* $u \in \mathbf{A}$.

Demonstration. — La première égalité découle de la relation $L_u^* = L_{u^*}$ pour $u \in \mathbf{A}$. Pour la deuxième, on remarquera que les deux membres sont continus par rapport à x et y et que l'égalité est vérifiée pour $x, y \in \mathbf{A}$. La troisième égalité découle de la relation $l_x \subset l_{x^*}^*$. Pour la quatrième et la cinquième, on

([2]) Ceci entraîne $\mathbf{A} \subset D_{L_x}$ pour tout $x \in H$.

remarquera que les deux membres sont continus par rapport à x et que l'égalité est vérifiée pour $x \in \mathbf{A}$. Enfin on vérifiera tout d'abord l'égalité (vi) pour $x, y \in \mathbf{A}$, ce qui donne

$$\langle x, y^* u \rangle = \langle yx, u \rangle = \langle y, ux^* \rangle$$

et l'on remarquera que les deux membres sont continus par rapport à x et y.

Notation. — Pour tout $x \in \mathrm{H}$, nous noterons r_x la restriction de R_x à $\mathbf{A}$.

Proposition 1. — *Pour tout* $x \in \mathrm{H}$, *on a* $\mathrm{R}_x = r_{x^*}^*$.

Démonstration. — La relation $y \in \mathrm{D}_{\mathrm{R}_x}$ est équivalente à $x \in \mathrm{D}_{\mathrm{L}_y} = \mathrm{D}_{l_{y^*}^*}$, c'est-à-dire à « $\langle x, y^* u \rangle$ est pour $u \in \mathbf{A}$, une forme semi-linéaire continue en u » ou bien d'après la relation (vi) du lemme 1 à « $\langle y, ux^* \rangle$ est pour $u \in \mathbf{A}$ une forme semi-linéaire continue en u », c'est-à-dire à $y \in \mathrm{D}_{r_{x^*}^*}$. On a donc $\mathrm{D}_{\mathrm{R}_x} = \mathrm{D}_{r_{x^*}^*}$. Soit alors $y \in \mathrm{D}_{r_{x^*}^*}$. On a $\mathrm{R}_x y = \mathrm{L}_y x = l_{y^*}^* x$, c'est-à-dire pour tout $u \in \mathbf{A}$:

$$\langle \mathrm{R}_x y, u \rangle = \langle x, y^* u \rangle.$$

D'autre part :

$$\langle r_{x^*}^* y, u \rangle = \langle y, r_{x^*} u \rangle = \langle y, ux^* \rangle.$$

La relation (vi) du lemme 1 entraîne alors que

$$r_{x^*}^* y = \mathrm{R}_x y.$$

Corollaire. — *L'opérateur* R_x *est pour tout* $x \in \mathrm{H}$, *linéaire fermé et son ensemble de définition est partout dense.*

Remarque 5. — Les propriétés démontrées ont rétabli la symétrie entre la propriété de la multiplication à gauche et de la multiplication à droite dans les espaces d'Ambrose. L'absence de symétrie dans les axiomes est dû au souci d'utiliser des axiomes indépendants. En réalité sur les exemples les axiomes se vérifient aussi bien sur l'une ou l'autre des multiplications. Nous démontrerons plus tard des propriétés dont la vérification directe serait au contraire laborieuse.

Par la suite toute propriété sur la multiplication à gauche se transposera immédiatement à la multiplication à droite et nous ne ferons les démonstrations que dans le premier cas.

Lemme 2. — *Pour tout* $x \in \mathrm{H}$ *on a* $\mathrm{R}_x = \mathrm{S}\mathrm{L}_{x^*}\mathrm{S}$ (et $\mathrm{L}_x = \mathrm{S}\mathrm{R}_{x^*}\mathrm{S}$), S *étant l'involution sur* H.

Démonstration. — La relation $y \in \mathrm{D}_{\mathrm{R}_x} = \mathrm{D}_{r_{x^*}^*}$ est équivalente à

$$\langle y, r_{x^*} u \rangle = \langle y, ux^* \rangle = \langle xu^*, y^* \rangle$$

est une forme semi-linéaire continue par rapport à u pour $u \in \mathbf{A}$ », c'est-à-dire

à « $\langle xu, y^\star\rangle$ est pour $u\in\mathbf{A}$ une forme linéaire continue par rapport à u », c'est-à-dire à $y^\star\in D_{l_x^\star}=D_{L_{x^\star}}$. Les deux opérateurs R_x et $SL_{x^\star}S$ ont donc même ensemble de définition. Soit alors $y\in D_{R_x}$. On a pour tout $u\in\mathbf{A}$:

$$R_x y,\ u\rangle = \langle y, x^\star u\rangle,\quad \langle u, xy\rangle = \langle xu, y^\star\rangle$$
$$= \langle u^\star, x^\star y^\star\rangle = \langle (x^\star y^\star)^\star, u\rangle = \langle SL_{x^\star}Sy, u\rangle$$

et par suite :

$$R_x y = SL_{x^\star}Sy.$$

Corollaire. — *Si xy est défini, $y^\star x^\star$ est défini et l'on a $(xy)^\star=y^\star x^\star$.*

Supposons que L_x soit continu. Il en est de même de l_x et, par suite, de $L_{x^\star}=l_x^\star$ et de R_x. Inversement si R_x est continu, il en est de même de L_x. Cette remarque conduit à la définition suivante :

Définition 5. — *Un élément $a\in H$ est dit borné si L_a ou R_a est continu.*

Comme L_x est fermé, on peut encore dire qu'un élément a est borné si et seulement si L_a (ou R_a) est partout défini.

Théorème 1. — *L'ensemble* **B** *des éléments bornés est une algèbre unitaire sous-jacente à* H.

Démonstration. — Le produit xy étant linéaire en x et y, **B** est un sous-espace vectoriel de H. On a $\mathbf{A}\subset\mathbf{B}$. Par suite, **B** est dense dans H. La relation $R_x=SL_{x^\star}S$ montre que **B** est stable pour l'involution. Si $a\in\mathbf{B}$, L_a est partout défini. Le produit de deux éléments de **B** est ainsi toujours défini. On démontre alors la relation

$$a(bc)=(ab)c \qquad \text{pour} \quad a, b, c\in\mathbf{B}$$

en remarquant que la relation est vérifiée pour $a,\ b, c\in\mathbf{A}$ et que les deux membres sont continus par rapport à chaque variable. Cette relation entraîne que le produit de deux éléments de **B** est un élément de **B** et que la multiplication dans **B** est associative. Les autres axiomes des ★-algèbres

$$(a+b)c=ac+bc, \qquad a(b+c)=ab+ac,$$
$$(\alpha a)b=\alpha(ab)=a(\alpha b) \quad (\text{pour } \alpha \text{ complexe}) \qquad \text{et} \qquad (ab)^\star=b^\star a^\star$$

se démontrent en remarquant que les deux membres sont toujours séparément continus par rapport aux variables qui y figurent et que les relations sont vérifiées pour $a,\ b,\ c\in\mathbf{A}$. L'ensemble **B** est donc une ★-algèbre. Muni du produit scalaire défini par H, **B** est une algèbre unitaire. L'axiome (AU 2), c'est-à-dire la relation $\langle ab, c\rangle=\langle b, a^\star c\rangle$ se démontre en remarquant que l'égalité est valable pour $a,\ b,\ c\in\mathbf{A}$ et que les deux membres sont séparément continus par rapport à $a,\ b,\ c$. Les axiomes (AU 1) et (AU 3) sont vérifiés trivialement et (AU 4) découle de l'inclusion $\mathbf{A}\subset\mathbf{B}$.

LEMME 3. — *Si* $x \in H$ *et si* $xu = 0$ *pour tout* $u \in \mathbf{A}$, *on a* $x = 0$.

Démonstration. — Soit x tel que $xu = 0$ pour $u \in \mathbf{A}$. On aura pour $u, v \in A$:

$$\langle xu, v \rangle = \langle x, vu^* \rangle = 0.$$

Les éléments vu^* étant denses dans H, on a $x = 0$.

Notation. — Nous désignerons par $\mathbf{L}$ et $\mathbf{R}$ les $\star$-algèbres faiblement fermées (avec unité) engendrées par les opérateurs L_u et R_u pour $u \in \mathbf{A}$ et par $\mathbf{L}'$ et $\mathbf{R}'$ les $\star$-algèbres commutantes.

LEMME 4. — *Les* $\star$*-algèbres* $\mathbf{L}$ *et* $\mathbf{R}$ *sont respectivement les adhérences faibles de l'ensemble des opérateurs* L_u *et de l'ensemble des opérateurs* R_u *pour* $u \in \mathbf{A}$.

Démonstration. — L'adhérence faible de l'ensemble des opérateurs L_u étant une $\star$-algèbre, il suffit de démontrer que son plus grand projecteur E est égal à 1. Soit $\mathfrak{M}$ le sous-espace final de E. Pour tout $u \in \mathbf{A}$ et tout $x \in H$ on a $L_u x \in \mathfrak{M}$. En particulier, on a $uv \in \mathfrak{M}$ pour $u, v \in \mathbf{A}$. Ceci entraîne $\mathfrak{M} = H$ en raison de (AU 4). On a donc $E = 1$.

Remarque 6. — L'axiome (AU 4) est essentiel pour l'exactitude du lemme 4 et, par suite, du théorème 2. Inversement l'axiome (AU 4) des algèbres unitaires peut souvent se vérifier plus facilement après complétion de l'espace. Supposons, par exemple, qu'une $\star$-algèbre soit munie d'une structure d'espace préhilbertien à l'aide d'un produit scalaire vérifiant les axiomes (AU 1), (AU 2) et (AU 3) des algèbres unitaires. Sur l'espace complété H on peut définir l'opérateur R_u linéaire partout défini et continu tel que $R_u v = vu$ pour $v \in \mathbf{A}$. Si 1 est faiblement adhérent à l'ensemble des opérateurs R_u, on peut affirmer que l'axiome (AU 4) est vérifié, c'est-à-dire que $\mathbf{A}$ est une algèbre unitaire. Soit, en effet, $x \in H$ tel que $\langle x, uv \rangle = 0$. Ceci peut s'écrire $\langle R_v x, u \rangle = 0$ pour tout $u, v \in \mathbf{A}$. L'opérateur 1 étant faiblement adhérent à l'ensemble des opérateurs R_v, ceci entraîne $\langle x, u \rangle = 0$ et, par suite, $x = 0$.

LEMME 5. — *Pour tout* $T \in \mathbf{R}'$ *et tout* $a \in \mathbf{B}$, *on a* $Ta \in B$ *et* $TL_a = L_{Ta}$ (*et pour tout* $T \in \mathbf{L}'$, $TR_a = R_{Ta}$).

Démonstration. — Soit $T \in \mathbf{R}'$, $a \in \mathbf{B}$ et $u \in \mathbf{A}$. On a :

$$TL_a u = TR_u a = R_u Ta = L_{Ta} u.$$

L'opérateur TL_a étant borné, il en est de même de l_{Ta}, donc de L_{Ta} (Ta est donc borné) et l'on a (L_{Ta} étant fermé) : $TL_a = L_T$.

LEMME 6. — *Pour tout* $a \in \mathbf{B}$, *on a* $L_a \in \mathbf{L}$ *et* $R_a \in \mathbf{R}$.

Démonstration. — Nous devons montrer que si $T \in \mathbf{L}'$, T permute à L_a pour

$a \in \mathbf{B}$, c'est-à-dire qu'on a $TL_a b = L_a Tb$ pour a, $b \in \mathbf{B}$. L'égalité est vérifiée pour $a \in \mathbf{A}$ et $b \in \mathbf{B}$. Or les relations

$$TL_a b = TR_b a \quad (^4) \qquad \text{et} \qquad L_a Tb = R_{Tb} a$$

montrent (Tb étant borné) que les deux membres sont continus par rapport à a. L'égalité est donc vérifiée pour $a \in \mathbf{B}$.

Remarque 7. — Le lemme montre que $\mathbf{L}$ et $\mathbf{R}$ peuvent être considérées comme les adhérences faibles de l'ensemble des opérateurs L_a et R_a pour $a \in \mathbf{B}$ et que, par suite, $\mathbf{L}$ et $\mathbf{R}$ sont indépendants de $\mathbf{A}$.

Théorème 2 ([3]). — *On a* $\mathbf{L} = \mathbf{R}'$ (*et* $\mathbf{R} = \mathbf{L}'$).

Démonstration. — On a naturellement $\mathbf{L} \subset \mathbf{R}'$ ([4]). Soit $T \in \mathbf{R}'$ et $\mathfrak{T}$ l'application $A \to TA$ définie pour tout opérateur A borné. On a $\mathfrak{T}(L_a) \in \mathbf{L}$ pour tout $a \in \mathbf{B}$ (d'après le lemme 5) et, par suite, $\mathfrak{T}$ étant faiblement continue et $\mathbf{L}$ faiblement fermée,

$$\mathfrak{T}(1) = T \in \mathbf{L}.$$

Remarque 8. — Les relations

$$R_a = SL_{a^*}S \qquad \text{et} \qquad L_a = SR_{a^*}S \qquad \text{pour} \quad a \in \mathbf{B}$$

montrent par un passage à la limite évident que $S\mathbf{L}S = \mathbf{R}$.

Lemme 7. — *Pour tout* $x \in H$, *on a* $L_x \tau_1 \mathbf{L}$ *et* $R_x \tau_1 \mathbf{R}$.

Démonstration. — Montrons tout d'abord que $l_x R_a \supset R_a l_x$ pour $a \in \mathbf{A}$. On a, en effet, pour tout $c \in D_{l_x} = \mathbf{A}$:

$$R_a c = ca \in \mathbf{A} = D_{l_x}, \qquad l_x R_a c = l_x(ca) = x(ca) \qquad \text{et} \qquad R_a l_x c = (xc)a = x(ca).$$

L'opérateur $l_x^{\cdot\cdot}$, prolongement fermé minimum de l_x permute également aux opérateurs R_a pour $a \in \mathbf{A}$. Étant fermé, il permute donc à tout opérateur appartenant à l'adhérence faible de l'ensemble des opérateurs R_a, c'est-à-dire à tout opérateur de $\mathbf{R}$.. On a donc $l_x^{\cdot\cdot} \tau_1 \mathbf{L}$. Pour tout $x \in H$, on a $L_x = l_x^{\cdot\cdot} = (l_x^{\cdot\cdot})^*$. Comme $l_x^{\cdot\cdot} \tau_1 \mathbf{L}$, on a $L_x \tau_1 \mathbf{L}$.

Remarque 9. — En général, on n'a pas $l_x \tau_1 \mathbf{L}$. $\mathbf{A}$ n'étant pas nécessairement stable par $\mathbf{R}$.

Lemme 8. — *Pour tout* $A \in \mathbf{L}$ *et tout* $x \in H$, *on a* $AL_x \subset L_{Ax}$ (*et pour tout* $A \in \mathbf{R}$, $AR_x \subset R_{Ax}$).

([3]) Ce théorème démontré par F. J. Murray et J. von Neumann dans certains cas particuliers [10] a été généralisé par Segal [16], Takenouchi [17] et Godement [7].

([4]) Cette relation traduit l'associativité de la multiplication dans $\mathbf{A}$.

Démonstration. — Soit $y \in D_{L_x}$. On a

$$AL_x y = AR_y x = R_y Ax = L_{Ax} y.$$

THÉORÈME 3. — *Pour tout* $x \in H$, *on a* $L_x^* = L_{x^*}$ (*et* $R_x^* = R_{x^*}$).

Démonstration. — Pour tout $x \in H$, posons $L'_x = l_x^{**} = l_x$. On a $L'_x \subset L_x$ et $L_x^* = L'_{x^*}$. Nous devons donc démontrer que $L_x = L'_x$ pour tout $x \in H$. Remarquons tout d'abord que pour $A \in \mathbf{L}$, la relation $AL_x \subset L_{Ax}$ donne en prenant les restrictions des deux membres à $\mathbf{A}$: $Al_x = l_{Ax}$. On a donc

$$L'_{Ax} = \overline{l}_{Ax} = \overline{Al}_x = \overline{AL}'_x \quad (^5).$$

D'autre part, $L'_x \eta \mathbf{L}$. Posons $L'_x = VA$, avec $V \in \mathbf{L}_{p.i.}$ et $A \eta \mathbf{L}$, $A = A^* \geqq 0$. On a alors

$$A = V^* L'_x = \overline{V^* L}'_x = L'_{V^* x} \geqq 0.$$

Or $L'_{V^* x} = L'^*_{V^* x} = L_{(V^* x)^*}$. Par suite (^{6})

$$V^* x = (V^* x)^* \quad \text{et} \quad L_{V^* x} = L'_{V^* x}.$$

On peut donc écrire

$$A = L'_{V^* x} = L_{V^* x} \supset V^* L_x,$$

ce qui entraîne $D_A \supset D_{L_x}$, c'est-à-dire $D_{L'_x} \supset D_{L_x}$. On a donc bien $L'_x = L_x$.

COROLLAIRE. — *Pour tout* $x \in H$, *on a* $L_x = l_x^{**}$ (*et* $R_x = r_x^{**}$).

THÉORÈME 4. — *Étant donné une algèbre unitaire* $\mathbf{A}$, *on peut définir sur l'espace complété* H *une structure d'espace d'Ambrose notée* $H(\mathbf{A})$ *et une seule telle que* $\mathbf{A}$ *soit une algèbre unitaire sous-jacente à* H *et régulière.*

Pour $u \in \mathbf{A}$, R_u *est donc continu, partout défini et tel que* $R_u v = vu$ *pour* $v \in \mathbf{A}$. *Si l'on pose, pour* $x \in H$, $l_x u = R_u x$ *pour tout* $u \in \mathbf{A}$, L_x *est caractérisé par l'une des propriétés suivantes équivalentes :*

(i) $L_x = l_{x^*}^*$,

(ii) $L_x = l_x^{**}$.

Démonstration. — Pour tout $u \in \mathbf{A}$, on a $\|u^*\| = \|u\|$. L'involution $u \to u^*$ sur $\mathbf{A}$ se prolonge donc d'une façon unique en une involution $x \to x^*$ sur H. Soit $u \in \mathbf{A}$. L'opérateur r_u défini pour tout $v \in \mathbf{A}$ par $r_u v = vu$ étant continu, se prolonge d'une façon unique en un opérateur R_u continu et partout défini sur H. En raison de la propriété (i) de la définition 3, R_u est nécessairement

---

(^{5}) Pour A borné et B quelconque, on a en effet

$$AB \subset \overline{AB} \subset \overline{(A\overline{B})},$$

(^{6}) La relation $L_y = L'_z$ entraîne $yu = zu$ pour $u \in \mathbf{A}$ soit $(y - z)u = 0$ ou enfin $y = z$.

l'opérateur de multiplication à droite par u. La multiplication sur H sera déterminée par la donnée de L_x pour tout $x \in H$. Soit l_x l'opérateur $u \to xu$ défini pour $u \in \mathbf{A}$. On doit avoir $L_x \supset l_x$ et, d'autre part, d'après la propriété (ii) de la définition 3, $L_x = l_{x^*}^*$. On doit donc prendre $L_x = l_{x^*}^*$, ce qui est légitime sous réserve que $l_{x^*}^* \supset l_x$. Or cette relation s'écrit

$$\langle xu, v \rangle = \langle u, x^* v \rangle$$

pour tous $u, v \in \mathbf{A}$ et tout $x \in H$. Les deux membres de cette égalité étant continus par rapport à x et l'égalité étant vérifiée pour $x \in \mathbf{A}$, l'égalité est vérifiée pour tout $x \in H$. On peut donc poser $L_x = l_{x^*}^*$ et cette relation détermine la structure d'espace d'Ambrose unique $H(\mathbf{A})$ telle que $\mathbf{A}$ soit une algèbre unitaire sous-jacente à H et régulière.

D'après le corollaire du théorème 3, il est équivalent de poser $L_x = l_x^{**}$.

Compte tenu du théorème 4, le théorème 3 peut s'énoncer sous une forme ne faisant intervenir que les algèbres unitaires.

Corollaire des théorèmes 3 et 4. — *Soit* $\mathbf{A}$ *une algèbre unitaire et* H *l'espace complété. Pour tout* $u \in \mathbf{A}$, *prolongeons les opérateurs* $v \to uv$ *et* $v \to vu$ *en des opérateurs continus partout définis sur* H : L_u *et* R_u. *Pour tout* $x \in H$, *posons* $l_x u = R_u x$ *et* $r_x u = L_u x$ *pour* $u \in \mathbf{A}$. *On a* $l_x^{**} = l_{x^*}^*$ *et* $r_x^{**} = r_{x^*}^*$. *En appelant* L_x *et* R_x *ces deux opérateurs, on a*

$$L_x^* = L_{x^*} \qquad \text{et} \qquad R_x^* = R_{x^*}.$$

Lemme 9. — *Soit* H *un espace hilbertien muni d'une involution* $x \to x^*$ *et d'une multiplication partiellement définie. Soit* $\mathbf{A}$ *une algèbre unitaire sous-jacente à* H. *Si les deux propriétés suivantes sont réalisées :*

(i) *Pour tout* $u \in \mathbf{A}$, R_u *est partout défini et continu;*

(ii) *Pour tout* $x \in H$, *on a* $L_x^* = L_{x^*}$,

alors H *est un espace d'Ambrose.*

Démonstration. — Soit l_x la restriction de L_x à $\mathbf{A}$. On a $l_x u = L_x u = R_u x$ pour $u \in \mathbf{A}$. D'après le corollaire des théorèmes 3 et 4, on a donc $l_x^{**} = l_{x^*}^*$ pour tout $x \in H$. Or L_x étant fermé, on a $L_x \supset l_x^{**}$ et de même $L_{x^*} \supset l_{x^*}^{**}$, ce qui entraîne en prenant les adjoints : $L_{x^*}^* \subset l_{x^*}^*$, c'est-à-dire $L_x \subset l_x^{**}$. On a donc $L_x = l_x^{**}$, ce qui démontre que H est l'espace d'Ambrose $H(\mathbf{A})$.

Proposition 2. — *L'ensemble des algèbres unitaires sous-jacentes à* H *est identique à l'ensemble des sous-*$\star$*-algèbres de* $\mathbf{B}$ *denses dans* H.

Démonstration. — Soit $\mathbf{A}_1$ une sous-$\star$-algèbre de $\mathbf{B}$. Munie de la structure préhilbertienne induite par celle de H, $\mathbf{A}_1$ vérifie visiblement les axiomes (AU 1), (AU 2) et (AU 3). Pour démontrer (AU 4), considérons l'$\star$-algèbre $\mathbf{L}_1$, adhé-

rence faible de l'ensemble des opérateurs L_u pour $u \in \mathbf{A}_1$. Soit E le plus grand projecteur de $\mathbf{L}_1$. On a pour tout $u \in \mathbf{A}_1$, $EL_u = L_u$ et comme $E \in \mathbf{L}$, cette relation devient en vertu du lemme 5 : $Eu = u$. Si $\mathbf{A}_1$ est dense dans H, on a $E = 1$. Si l'on a

$$\langle x, uv \rangle = \langle x, L_u v \rangle = 0$$

pour tous u, $v \in \mathbf{A}_1$, on a alors (1 étant faiblement adhérent à l'ensemble des opérateurs L_u) $\langle x, v \rangle = 0$ et, par suite, $x = 0$. Inversement toute algèbre unitaire sous-jacente à H est visiblement contenue dans $\mathbf{B}$ et en est une sous-$\star$-algèbre.

Théorème 5. — *Soit* H *un espace d'Ambrose. Toute algèbre unitaire sous-jacente à* H *est régulière.*

Démonstration. — Soit $\mathbf{A}$ une algèbre unitaire sous-jacente à H, l_x la restriction de L_x à $\mathbf{A}$. On a $L_x \supset l_x$ et $L_x^* = L_{x^*}$. Par suite, d'après le lemme 9, H est identique à l'espace d'Ambrose $H(\mathbf{A})$. L'algèbre unitaire $\mathbf{A}$ est donc régulière.

Corollaire 1. — *Étant donné une algèbre unitaire* $\mathbf{A}$, *il existe sur l'espace complété* H *une structure d'espace d'Ambrose et une seule* $H(\mathbf{A})$ *telle que* $\mathbf{A}$ *soit une algèbre unitaire sous-jacente à* $H(\mathbf{A})$.

Corollaire 2. — *Soit* $\mathbf{A}$ *une algèbre unitaire et* $\mathbf{A}_1$ *une sous-*$\star$*-algèbre de* $\mathbf{A}$, *dense dans* $\mathbf{A}$. *L'algèbre* $\mathbf{A}_1$ *est une algèbre unitaire et les espaces d'Ambrose* $H(\mathbf{A})$ *et* $H(\mathbf{A}_1)$ *définis par* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{A}_1$ *sont identiques.*

Démonstration. — Soit $H(\mathbf{A})$ l'espace d'Ambrose défini par $\mathbf{A}$. L'$\star$-algèbre $\mathbf{A}_1$ est une sous-$\star$-algèbre de $\mathbf{A}$, donc de l'algèbre unitaire des éléments bornés. Par suite, $\mathbf{A}_1$ est une algèbre unitaire (prop. 2). On a, de plus,

$$H(\mathbf{A}) = H(\mathbf{A}_1).$$

2. Un exemple.

Étant donné un ensemble localement compact Z muni d'une mesure de Radon, nous aurons à considérer les espaces vectoriels suivants :

L, espace des fonctions continues complexes à support compact;

L^p, espace des fonctions complexes de $p^{\text{ième}}$ puissance intégrable muni de la norme

$$\| f \|_p = \left| \int f(x) |^p \, dx \right|^{\frac{1}{p}};$$

L^∞, espace des fonctions complexes mesurables et essentiellement bornées, muni de la norme

$$\| f \|_\infty = \operatorname{vrai\,max}_{x \in Z} | f(x) |;$$

L_c, espace des fonctions complexes continues telles que pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble des éléments x pour lesquels $|f(x)| \geq \varepsilon$ soit compact.

Soit G un groupe localement compact unimodulaire et dx la mesure de Haar sur G; pour $f, g \in L^2$, on peut définir le produit de composition $f \star g$. On a

$$f \star g(x) = \int f(y)\, g(y^{-1}x)\, dy \qquad \text{et} \qquad f \star g \in L_c.$$

Par suite $f \star g \in L^\infty$ et l'application $(f, g) \to f \star g$ est continue de $L^2 \times L^2$ dans L^∞.

Il est possible d'une façon naturelle de définir partiellement une multiplication sur L^2 : le produit de f et g sera défini si $f \star g \in L^2$ et sera égal dans ce cas à $f \star g$. Il existe, d'autre part, sur L^2 une involution $f \to f^*$ définie par

$$f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}.$$

Théorème 6. — *L'espace hilbertien* L^2 *muni de la multiplication partiellement définie et de l'involution introduites précédemment est un espace d'Ambrose appelé espace d'Ambrose défini par* G *ou espace d'Ambrose* $L^2(G)$. *Les sous-espaces vectoriels* $L^1 \cap L^2$ *et* L *sont des algèbres unitaires sous-jacentes à* $L^2(G)$ (7).

Avant d'exposer la démonstration de ce théorème, démontrons le lemme suivant :

Lemme 10. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction* $f \in L^\infty$ *soit élément de* L^2 *est que la forme semi-linéaire*

$$g \to \int f(x)\, \overline{g(x)}\, dx$$

définie sur $L^1 \cap L^2$ *soit continue pour la topologie induite sur* $L^1 \cap L^2$ *par la topologie de* L^2.

Démonstration. — La condition est visiblement nécessaire. Inversement, si elle est réalisée, on a pour tout $g \in L^1 \cap L^2$

$$\left| \int f(x)\, g(x)\, dx \right| \leq k \left[\int |g(x)|^2\, dx \right]^{\frac{1}{2}},$$

k étant un nombre réel positif. Pour tout ensemble compact K, on aura en

(7) Ambrose ([1], th. 2) a énoncé le premier ce théorème. Outre que certains points de sa démonstration nous ont paru obscurs, cet auteur fait jouer dans ses démonstrations à l'algèbre unitaire L un rôle tel que le caractère naturel de la définition de la multiplication dans $L^2(G)$ n'y apparaît nullement. Ce dernier inconvénient se retrouve chez Mautner [9] qui a esquissé une construction à l'aide d'une autre algèbre unitaire sous-jacente à $L^2(G)$.

prenant $g(x)=f(x)$ pour $x\in K$ et $g(x)=0$ pour $x\notin K$

$$\int_K f(x)\overline{f(x)}\,dx\leq k\left[\int_K |f(x)|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

c'est-à-dire

$$\int_K |f(x)|^2\,dx\leq k^2.$$

Par suite, K étant arbitraire :

$$\int |f(x)|^2\,dx\leq k^2.$$

On a donc bien $f\in L^2$.

Démonstration du théorème 6. — Les propriétés classiques du produit de composition montrent immédiatement que $L^1\cap L^2$, muni du produit scalaire de L^2, du produit de composition et de l'involution considérée, est une algèbre unitaire. Soit H l'espace d'Ambrose défini par cette algèbre unitaire. Nous avons à montrer que la multiplication sur H (notée $f,\ g\to fg$) coïncide (tant au point de vue de l'ensemble de définition qu'au point de vue de la valeur du produit) avec la multiplication naturelle considérée.

Remarquons tout d'abord que si $f\in L^1\cap L^2$ et $g\in L^2$, fg est défini, $f\star g\in L^2$ et $fg=f\star g$, l'égalité étant vraie pour $g\in L_1\cap L_2$ et les deux membres étant continus par rapport à g : le premier membre d'après la définition de l'espace d'Ambrose associé à une algèbre unitaire, le deuxième d'après la relation

$$\|f\star g\|_2\leq \|f\|_1\,\|g\|_2.$$

Remarquons ensuite que pour $f,\ g\in L^2$ et $h\in L^1\cap L^2$, on a :

$$\int f\star g(x)\,\overline{h(x)}\,dx=\langle g, f^*h\rangle.$$

En effet, l'égalité a lieu pour $f,\ g\in L^1\cap L^2$ et les deux membres sont continus par rapport au couple (f, g) (le premier membre en raison de la continuité de l'application $f,\ g\to f\star g$ de $L^2\times L^2$ dans L^∞).

La condition nécessaire et suffisante pour que fg soit défini est alors que la forme semilinéaire $h\to\langle g, f^*h\rangle$, c'est-à-dire $h\to\int f\star g(x)\,\overline{h(x)}\,dx$ définie pour $h\in L^1\cap L^2$ soit continue (pour la topologie induite par L^2), autrement dit que $f\star g\in L^2$ (d'après le lemme 10). On a alors

$$\langle fg, h\rangle=\langle g, f^*h\rangle=\int f\star g(x)\,\overline{h}(x)\,dx$$

et, par suite, $fg=f\star g$.

L'espace d'Ambrose $L^2(G)$ est donc l'espace d'Ambrose défini par l'algèbre unitaire $L^1\cap L^2$. L'$\star$-algèbre L étant une sous-$\star$-algèbre de $L^1\cap L^2$ dense dans H est donc une algèbre unitaire sous-jacente à $L^2(G)$.

3. Produits tensoriels (8).

Soit H et H_1 deux espaces préhilbertiens. Soit u, $u' \in H$ et v, $v' \in H_1$. Les applications

$$(u, u') \to \langle u, v \rangle \langle u', v' \rangle \qquad \text{et} \qquad (v, v') \to \langle u, v \rangle \langle u', v' \rangle$$

sont respectivement bilinéaire et bisemilinéaire (9) dans $H \times H_1$. Il existe donc une forme sesquilinéaire et une seule, $\langle U, V \rangle$, sur le produit tensoriel algébrique $H \otimes H_1$, telle que

$$\langle u \otimes v, u' \otimes v' \rangle = \langle u, u' \rangle \langle v, v' \rangle.$$

Cette forme sesquilinéaire est positive et $\langle U, U \rangle = 0$ entraîne $U = 0$. Elle définit donc sur l'espace vectoriel $H \otimes H_1$ une structure d'espace préhilbertien appelée produit tensoriel des espaces préhilbertiens H et H_1 ou, en abrégé, espace préhilbertien $H \otimes H_1$ (10).

Étant donné deux espaces préhilbertiens H et H_1 et deux sous-espaces vectoriels $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_1$ de H et H_1, il est aisé de vérifier que l'identification canonique de l'espace vectoriel $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_1$ avec un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $H \otimes H_1$ est compatible avec les structures préhilbertiennes introduites sur $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_1$ et $H \otimes H_1$. Donc l'espace préhilbertien $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_1$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de l'espace préhilbertien $H \otimes H_1$ et il est facile de voir que si $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_1$ sont respectivement denses dans H et H_1, il en est de même de $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_1$ dans $H \otimes H_1$.

Si H et H_1 sont deux espaces hilbertiens, nous noterons $H \hat{\otimes} H_1$ le complété de l'espace préhilbertien $H \otimes H_1$, c'est-à-dire l'espace hilbertien produit tensoriel des espaces hilbertiens H et H_1.

Si A et B sont deux opérateurs continus opérant dans deux espaces préhilbertiens H et H_1, $A \otimes B$ (qui opère dans l'espace préhilbertien $H \otimes H_1$) est continu. Si H et H_1 sont hilbertiens, $A \otimes B$ se prolonge donc à $H \hat{\otimes} H_1$. Nous noterons $A \hat{\otimes} B$ ce prolongement.

Les applications $A \to A \hat{\otimes} 1$ et $B \to 1 \hat{\otimes} B$ sont des isomorphismes d'★-algèbres faiblement fermées d'opérateurs et sont donc ultrafortement continues (11).

---

(8) Pour les définitions et notations utilisées dans ce paragraphe, *cf.* [2], chapitre III.

(9) La considération de l'espace « conjugué » $\overline{V}$ d'un espace vectoriel complexe V [$\overline{V}$ a même loi de groupe que V, mais les scalaires y opèrent suivant l'application $(\lambda, x) \to \overline{\lambda} x$ de $C \times V$ sur V] permet de ramener la considération des applications semilinéaires à celles d'applications linéaires et, par suite, d'appliquer les méthodes habituelles en matière de produits tensoriels.

(10) Toute indication de structure devant un symbole $A \otimes B$ implique que des structures homologues sont considérées sur A et B. Cette indication pourra être sous-entendue tant que les structures considérées sur A et B restent inchangées.

(11) *Cf.* [6], th. 3, cor. 2. On trouvera du reste une démonstration particulière au cas présent dans [12].

Comme on a $A \hat{\otimes} B = (A \hat{\otimes} 1)(1 \hat{\otimes} B)$, l'application bilinéaire $(A, B) \to A \hat{\otimes} B$ est séparément ultrafortement continue.

PROPOSITION 3. — *Soit* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{A}_1$ *deux* $\star$*-algèbres. Il existe sur l'algèbre* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}_1$, *une involution* $U \to U^\star$ *définie par*

$$U^\star = \sum_i u_i^* \otimes u_i'^* \qquad \textit{pour} \quad U = \sum_i u_i \otimes u_i'.$$

Démonstration. — L'application à définir n'est autre que le produit tensoriel des involutions sur $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}_1$, ce qui assure son existence. On a visiblement $U^{\star\star} = U$ pour tout $U = \mathbf{A} \otimes \mathbf{A}_1$. Pour

$$U = \sum_j u_i \otimes u_i' \qquad \text{et} \qquad V = \sum_j v_j \otimes v_j',$$

on a

$$(UV)^\star = \sum_{i,j} (u_i v_j')^* \otimes (u_i' v_j')^\star = \sum_{i,j} v_j^* u_i^* \otimes v_j'^* u_i' = V^* U^*.$$

L'application $U \to U^\star$ est donc bien une involution sur l'algèbre $\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}_1$.

DÉFINITION 6. — *Étant donné deux* $\star$*-algèbres* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{A}_1$, *l'algèbre* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}_1$ *munie de l'involution définie par la proposition* 3 *est appelée produit tensoriel des* $\star$*-algèbres* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{A}_1$ (*ou en abrégé* $\star$*-algèbre* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}_1$).

PROPOSITION 4. — *Soit* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{A}_1$ *deux algèbres unitaires. L'*$\star$*-algèbre* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}_1$ *munie de la structure d'espace préhilbertien* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}_1$ *est une algèbre unitaire.*

Démonstration. — Pour $U = \sum_i u_i \otimes u_i'$ et $V = \sum_j v_j' \otimes v_j'$, on a :

$$\langle U, V \rangle = \sum_{i,j} \langle u_i, v_j \rangle \langle u_i', v_j' \rangle = \sum_{i,j} \langle v_j^*, u_i^* \rangle \langle v_j'^*, u_i'^* \rangle = \langle V^*, U^* \rangle.$$

Ceci démontre (AU 1). On a, d'autre part, pour $W = \sum_k w_k \otimes w_k'$:

$$\begin{aligned} \langle UV, W \rangle &= \sum_{i,j,k} \langle u_i v_j, w_k \rangle \langle u_i' v_j', w_k' \rangle \\ &= \sum_{i,j,k} \langle v_j, u_i^* w_k \rangle \langle v_j', u_i'^* w_k' \rangle = \langle V, U^* W \rangle. \end{aligned}$$

Ceci démontre (AU 2).

Soit $u \in \mathbf{A}$, $u' \in \mathbf{A}_1$, $U \in \mathbf{A} \otimes \mathbf{A}_1$ et l_u, $l_{u'}$, l_U les opérateurs de multiplication à gauche par u, u' et U dans $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}_1$. On a $l_{u \otimes u'} = l_u \otimes l_{u'}$ et, par suite, $l_{u \otimes u'}$ est continu. Il en sera de même de l_U, ce qui démontre (AU 3).

Pour démontrer (AU 4), considérons les espaces hilbertiens H, H_1 et $H \hat{\otimes} H_1$

complétés des espaces préhilbertiens $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A} \bigotimes \mathbf{A}_1$. Soit L_u, $L_{u'}$, L_U les prolongements continus de l_u, $l_{u'}$, l_U à H, H_1, $H \hat{\bigotimes} H_1$. On a

$$L_{u\otimes u'} = L_u \hat{\bigotimes} L_{u'} = (L_u \hat{\bigotimes} 1)(1 \hat{\bigotimes} L_{u'}).$$

Les opérateurs unités dans H et H_1 sont respectivement adhérents à l'ensemble des opérateurs L_u et $L_{u'}$. L'application bilinéaire $(L_u, L_{u'}) \to L_u \bigotimes L_{u'}$ étant séparément ultrafortement continue, l'opérateur unité dans $H \hat{\bigotimes} H_1$ est ultrafortement adhérent à l'ensemble des opérateurs $L_{u\otimes u'}$, ce qui démontre (AU 4).

Définition 7. — *Soit* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{A}_1$ *deux algèbres unitaires. L'*$\star$*-algèbre* $\mathbf{A} \bigotimes \mathbf{A}_1$ *munie de la structure d'espace préhilbertien* $\mathbf{A} \bigotimes \mathbf{A}_1$ *est appelée produit tensoriel des algèbres unitaires* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{A}_1$ *(ou en abrégé algèbre unitaire* $\mathbf{A} \bigotimes \mathbf{A}_1$*).*

Proposition 5. — *Soit* H *et* H_1 *deux espaces d'Ambrose et* $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_1$ *deux algèbres unitaires sous-jacentes à* H *et* H_1. *L'espace d'Ambrose défini par l'algèbre unitaire* $\mathbf{A} \bigotimes \mathbf{A}_1$ *est indépendant de* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{A}_1$.

Démonstration. — Soit $\mathbf{B}$ et $\mathbf{B}_1$ les algèbres des éléments bornés de H et H_1. L'algèbre unitaire $\mathbf{A} \bigotimes \mathbf{A}_1$ est une sous-algèbre unitaire de l'algèbre unitaire $\mathbf{B} \bigotimes \mathbf{B}_1$, dense dans $\mathbf{B} \bigotimes \mathbf{B}_1$. Les espaces d'Ambrose définis par $\mathbf{A} \bigotimes \mathbf{A}_1$ et $\mathbf{B} \bigotimes \mathbf{B}_1$ sont donc identiques (cor. 2 du théorème 5).

Définition 8. — *On appelle produit tensoriel de deux espaces d'Ambrose* H *et* H_1 *(ou en abrégé espace d'Ambrose* $H \hat{\bigotimes} H_1$*) l'espace d'Ambrose défini par le produit tensoriel de deux algèbres unitaires sous-jacentes à* H *et* H_1.

Remarque. — Si $\mathbf{B}$ et $\mathbf{B}_1$ sont les algèbres unitaires des éléments bornés de H et H_1, $\mathbf{B} \bigotimes \mathbf{B}_1$ n'est en général pas l'algèbre unitaire des éléments bornés de $H \hat{\bigotimes} H_1$.

Proposition 6. — *Soit* G *et* G_1 *deux groupes localement compacts unimodulaires. L'espace d'Ambrose défini par* $G \times G_1$ *est le produit tensoriel des espaces d'Ambrose définis par* G *et* G_1.

Démonstration. — Notons dy la mesure de Haar sur G, dy' la mesure de Haar sur G_1, $dY = dy\, dy'$ la mesure de Haar sur $G \times G_1$. L'espace hilbertien $L^2(G \times G_1)$ s'identifie d'une manière canonique bien connue au produit tensoriel des espaces hilbertiens $L^2(G)$ et $L^2(G_1)$. Nous avons simplement à vérifier que sur l'algèbre unitaire $L(G) \bigotimes L(G_1)$ qui est dense dans $L^2(G \times G_1)$, l'involution $F \to F^\star$ vérifie $F^\star(X) = \overline{F}(X^{-1})$ et que la multiplication est le produit de composition. Or pour tout

$$F(X) = \sum_i f_i(x) f'_i(x') \qquad [f_i \in L(G), f'_i \in L(G_1), X = (x, x')],$$

on a

$$F^*(X) = \sum_i \bar{f}_i(x^{-1})\,\bar{f}'_i(x'^{-1}) = \bar{F}(X^{-1})$$

et si $G(x) = \sum_j g_j(x)\,g'_j(x')$:

$$\begin{aligned} FG(X) &= \sum_{i,j} [f_i \star g_j(x)]\,(f'_i \star g'_i(x')] \\ &= \sum_{i,j} \int f_i(y)\,g_j(y^{-1}x)\,dy \int f'_i(y)\,g'_j(y'^{-1}x')\,dy' \\ &= \sum_{i,j} \iint f_i(y) f'_i(y')\,g_j(y^{-1}x)\,g'_j(y'^{-1}x')\,dy\,dy' \\ &= \int F(Y)\,G(Y^{-1}X)\,dY = F \star G(X) \qquad [Y = (y, y')]. \end{aligned}$$

4. Centre d'un espace d'Ambrose.

Définition 9. — *Un espace d'Ambrose* H *est dit commutatif s'il existe une algèbre unitaire* **A** *commutative sous-jacente à* H.

Dans ce cas, on a $L_u = R_u$ pour $u \in \mathbf{A}$, donc $l_x = r_x$ pour $x \in H$ et, par suite, $L_x = R_x$. Si le produit xy est défini, il en est de même du produit yx et l'on a $yx = xy$. On a naturellement $\mathbf{R} = \mathbf{L}$. Toute algèbre unitaire sous-jacente à H est alors commutative.

Définition 10. — *On appelle* centre *d'un espace d'Ambrose* H *et l'on note* $H_\natural$ *l'ensemble des éléments* $x \in H$ *vérifiant l'une des propriétés suivantes équivalentes :*

(i) $xa = ax$ *pour tout* $a \in \mathbf{B}$;
(ii) $l_x = r_x$;
(iii) $L_x = R_x$.

Le centre $H_\natural$ est un sous-espace linéaire fermé [d'après la condition (i)] stable pour l'involution [d'après la condition (iii)].

Remarque 10. — Si $x \in H_\natural$, on a $L_x \eta_1 \mathbf{L}^\natural$. En effet, on a $L_x \eta_1 \mathbf{L}$ et $L_x \eta_1 \mathbf{R}$. Comme L_x est fermé, ceci entraîne $L_x \eta_1 \mathbf{L}^\natural$.

Notation. — Nous noterons P le projecteur sur $H_\natural$ et poserons $Px = x^\natural$ pour tout $x \in H$.

Proposition 7. — *Tout* $u \in H^\natural$ *est élément-trace pour* **L** (*et pour* **R**).

Démonstration. — On a, en effet, pour $a, b \in \mathbf{B}$:

$$\begin{aligned} \langle L_a L_b u,\, u\rangle &= \langle abu,\, u\rangle = \langle bu,\, a^* u\rangle = \langle ub,\, ua^*\rangle \\ &= \langle uba,\, u\rangle = \langle bau,\, u\rangle = \langle L_b L_a u,\, u\rangle. \end{aligned}$$

LEMME 11. — *Soit* H_1 *un idéal bilatère* ([12]) *de* H. *On a*

$$(H_1)_\natural = H_\natural \cap H_1.$$

Démonstration. — On a visiblement $(H_1)_\natural \supset H_\natural \cap H_1$. Soit $x \in (H_1)_\natural$. On a $xa = ax$ pour $a \in \mathbf{B} \cap H_1$. Soit P_1 le projecteur sur H_1. Pour $a \in \mathbf{B}$, on a

$$xa = L_x P_1 a = R_x P_1 a = R_x a = ax.$$

Par suite, $x \in H_\natural$.

COROLLAIRE 1. — *On a* $P \in \mathbf{L} \smile \mathbf{R}$.

COROLLAIRE 2. — *Si* H_1 *et* H_2 *sont deux idéaux bilatères orthogonaux complémentaires de* H, *on a*

$$H_\natural = (H_1)_\natural \oplus (H_2)_\natural.$$

Notation. — Soit $H_f = \mathbf{L}(H_\natural) = \mathbf{R}(H_\natural)$ et $H_i = H \ominus H_f$. Les sous-espaces H_f et H_i sont deux idéaux bilatères orthogonaux complémentaires de H et l'on a $(H_f)_\natural = H_\natural$ et $(H_i)_\natural = 0$.

LEMME 12. — *Si* $a \in \mathbf{B}$, *on a* $PL_aP = L_{a^\natural}P$.

Démonstration. — Le premier membre étant borné et le second fermé, il suffit de démontrer que $PL_aPb = L_{a^\natural}Pb$ pour $b \in \mathbf{B}$. Or on a :

$$PL_aPb = PR_{Pb}a = R_{Pb}Pa = R_{Pb}a^\natural = L_{a^\natural}Pb.$$

LEMME 13. — *Si* $a \in \mathbf{B}$, *on a* $a^\natural \in \mathbf{B}$.

Démonstration. — Si $a \in B$, $L_{a^\natural}P$ est borné d'après le lemme 12. Autrement dit, l'opérateur induit par $L_{a^\natural}$ sur $H_\natural$ est borné. Par suite, $L_{a^\natural}$ est borné sur H_f et comme $L_{a^\natural}$ est nul sur H_i, $L_{a^\natural}$ est borné. Par suite, $a^\natural \in \mathbf{B}$.

COROLLAIRE. — *Le sous-espace* $\mathbf{B} \cap H_\natural$ *est dense dans* $H_\natural$.

PROPOSITION 8. — *Le centre* $H_\natural$ *est un espace d'Ambrose commutatif.*

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que $H_\natural$ est stable par tout opérateur R_x pour $x \in H_\natural$ puisque $R_x \eta \mathbf{L}^\natural$. Par suite, si $x, y \in H_\natural$ et si xy est défini, on a $xy \in H_\natural$. Il existe donc sur $H_\natural$ une multiplication partiellement définie. Il existe de plus sur $H_\natural$ une involution puisque $H_\natural$ est stable pour l'involution.

([12]) Nous appellerons (conformément à la terminologie d'Ambrose) idéal bilatère d'un espace d'Ambrose H, tout sous-espace $H_1 \eta L^\natural$ muni de la structure d'espace d'Ambrose induite par H sur H_1. Cette définition se justifie par le fait que H_1 est stable par l'involution et par la multiplication à gauche et à droite par un élément borné quelconque.

L'ensemble $\mathbf{B} \cap H_\natural$ est une sous-algèbre de $\mathbf{B}$. Montrons que c'est une algèbre unitaire. Seul (AU 4) n'est pas immédiat à démontrer. Soit $\mathbf{M}$ l'adhérence faible de l'ensemble des opérateurs L_u pour $u \in \mathbf{B} \cap H_\natural$ et E le plus grand projecteur de $\mathbf{M}$. On a $E \in \mathbf{L}^\natural$. Pour tout $u \in \mathbf{B} \cap H_\natural$, on a $EL_u = L_u$, c'est-à-dire :

$$L_{Eu} = L_u, \qquad \text{d'où} \qquad Eu = u.$$

Soit $x \in H_\natural$ tel que $\langle x, uv \rangle = 0$ pour u, $v \in \mathbf{B} \cap H_\natural$. Ceci s'écrit $\langle x, L_u v \rangle = 0$. Comme E est faiblement adhérent à l'ensemble des opérateurs L_u, ceci entraîne $\langle x, Ev \rangle = 0$, c'est-à-dire $\langle x, v \rangle = 0$ et, par suite, $x = 0$. Donc $\mathbf{B} \cap H_\natural$ est une algèbre unitaire sous-jacente à $H_\natural$. Soit $\overset{\vee}{L}_x$ et $\overset{\vee}{R}_x$ les opérateurs de multiplication par x dans $H_\natural$ pour $x \in H_\natural$. L'opérateur L_x n'est autre que l'opérateur induit par L_x sur $H_\natural$. Par suite, pour tout $u \in \mathbf{B} \cap H_\natural$, R_u est borné et partout défini. De plus on a $\overset{\vee}{L}{}^*_x = \overset{\vee}{L}_{x^*}$ pour tout $x \in H_\natural$. Par suite (lemme 9), $H_\natural$ est un espace d'Ambrose et $\mathbf{B} \cap H_\natural$ étant commutative, $H_\natural$ est commutatif.

Proposition 9. — (i) *Si* $x, y \in H$ *et si* xy *et* yx *sont définis, on a* $(xy)^\natural = (yx)^\natural$;
(ii) *Si* $x \in H$, *on a* $(x^*)^\natural = (x^\natural)^*$;
(iii) *Si* $x \in H^\natural$ *et* $y \in H$, *on a* $(xy)^\natural = xy^\natural$.

Démonstration. — Pour démontrer (i), considérons $z \in \mathbf{B}$. On a :

$$\langle (xy)^\natural, z \rangle = \langle xy, z^\natural \rangle = \langle y, x^* z^\natural \rangle = \langle y, z^\natural x^\natural \rangle = \langle yx, z^\natural \rangle = \langle (yx)^\natural, z \rangle.$$

Pour démontrer (ii), considérons $y \in H_\natural$. On a :

$$\langle (x^*)^\natural, y \rangle = \langle x^*, y \rangle = \langle y^*, x \rangle = \langle y^*, x^\natural \rangle = \langle (x^\natural)^*, y \rangle.$$

Pour démontrer (iii), considérons $z \in H_\natural \cap \mathbf{B}$. On a :

$$\langle (xy)^\natural, z \rangle = \langle xy, z \rangle = \langle y, x^* z \rangle = \langle y^\natural, x^* z \rangle = \langle xy^\natural, z \rangle.$$

Lemme 14. — *Le sous-espace* $H \ominus H_\natural$ *est engendré par les éléments* $uv - vu$ *pour* $u, v \in \mathbf{A}$, $\mathbf{A}$ *étant une algèbre unitaire sous-jacente à* H.

Démonstration. — Pour $u, v \in \mathbf{A}$, on a $(uv)^\natural = (vu)^\natural$ et, par suite, $(uv - vu)^\natural = 0$, c'est-à-dire $uv - vu \in H \ominus H_\natural$. Inversement, soit x orthogonal aux éléments $uv - vu$ pour $u, v \in \mathbf{A}$. On a alors $\langle uv, x \rangle = \langle vu, x \rangle$, c'est-à-dire $\langle v, u^* x \rangle = \langle v, x u^* \rangle$ ou $l_x = r_x$, ou enfin $x \in H_\natural$.

Proposition 10. — *Les sous-espaces* H_f *et* H_i *sont respectivement fini et proprement infini pour* $\mathbf{L}$ *et* $\mathbf{R}$.

Démonstration. — Il faut montrer que si $H = H_f$, $\mathbf{L}$ et $\mathbf{R}$ sont de classe finie et, d'autre part, que si $H = H_i$, aucun sous-espace $\eta_1 \mathbf{L}^\natural$ n'est fini pour $\mathbf{L}$ ou $\mathbf{R}$, autrement dit que si $\mathbf{L}$ ou $\mathbf{R}$ est de classe finie, $H_\natural$ n'est pas réduit à 0.

Supposons donc $H = H_i$. Le sous-espace $H_\natural$ est séparateur pour $\mathbf{L}^\natural$. C'est du reste un sous-espace simple, car l'★-algèbre faiblement fermée induite par $\mathbf{L}^\natural$ sur $H_\natural$ est l'★-algèbre faiblement fermée engendrée par les opérateurs de multiplication dans $H_\natural$. Or $H_\natural$ étant un espace d'Ambrose commutatif, cette ★-algèbre coïncide avec son algèbre commutante. D'autre part, $H_\natural$ est un sous-espace-trace d'après la proposition 7. Donc $H_\natural$ est un sous-espace-$\natural$ pour $\mathbf{L}$ et $\mathbf{L}$ est de classe finie.

Supposons maintenant $\mathbf{L}$ de classe finie. Nous devons montrer que le centre $H_\natural$ n'est pas réduit à o. Soit I l'idéal bilatère de $\mathbf{L}$ formé des éléments L_a pour $a \in \mathbf{B}$. Comme $\mathbf{L}$ est de classe finie, tout idéal bilatère de $\mathbf{L}$ contient un opérateur du centre de $\mathbf{L}$. Il existe donc u tel que $L_u \in \mathbf{L}^\natural$ et l'on a $u \in H_\natural$.

Définition 11. — *Un espace d'Ambrose* H *est dit de classe finie si* $\mathbf{L}$ *et* $\mathbf{R}$ *sont de classe finie.*

Remarque 11. — La proposition précédente montre que la condition nécessaire et suffisante pour que H soit de classe finie est que $H_\natural$ soit un sous-espace générateur pour $\mathbf{L}$ et pour $\mathbf{R}$ ou encore que $H_\natural$ soit un sous-espace séparateur pour $L^\natural$. Le centre $H_\natural$ est alors un sous-espace-$\natural$ pour $\mathbf{L}$ et pour $\mathbf{R}$. L'invariant $C(\chi)$ est égal à 1 ([13]). Si l'on considère l'isomorphisme $A \to A'$ de $\mathbf{L}$ sur $\mathbf{R}$ défini à l'aide du sous-espace-$\natural$ $H_\natural$ par la relation $Ax = A'x$ pour tout $x \in H_\natural$ ([14]), on a ici $(L_a)' = R_a$.

Proposition 11. — *Soit* H *un espace d'Ambrose de classe finie. Pour tout* $a \in \mathbf{A}$, *on a* $L_a^\natural = L_{a^\natural}$.

Démonstration. — Ceci découle immédiatement du lemme 12 puisque $H_\natural$ est un sous-espace-$\natural$ pour $\mathbf{L}$.

Définition 12. — *Un élément* e *est dit élément unité d'un espace d'Ambrose si l'on a* $ea = ae = a$ *pour tout* $a \in \mathbf{B}$.

On a alors $L_e = R_e = 1$ et, par suite, $e \in \mathbf{B}$. De $L_e = L_{e^*}$ on déduit $e = e^*$. On a, d'autre part, $e \in H_\natural$.

Proposition 12. — *Tout espace d'Ambrose possédant un élément unité est de classe finie. Le centre* $H_\natural$ *est alors le sous-espace* $\mathbf{L}^\natural(e)$.

Démonstration. — L'élément e est élément-trace séparateur pour $\mathbf{L}$, donc $\mathbf{L}$ est de classe finie. De plus e est élément séparateur pour $\mathbf{L}^\natural$. Le sous-espace $\mathbf{L}^\natural(e)$ est donc séparateur pour $\mathbf{L}^\natural$. Comme on a visiblement $\mathbf{L}^\natural(e) \subset H_\natural$ et que $H_\natural$ est simple pour $\mathbf{L}^\natural$, on en déduit que $H_\natural = \mathbf{L}^\natural(e)$.

([13]) On en déduit que $C(\chi) = 1$ pour un espace d'Ambrose quelconque du fait que $C(\chi) = 1$ pour $H = H_i$, $\mathbf{L}$ et $\mathbf{R}$ étant alors algébriquement isomorphes.

([14]) *Cf.* [14], chap. I, th. 1.

Remarque 12. — La condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace d'Ambrose de classe finie possède un élément unité est que $H_\natural$ en possède un. En effet, si e est un élément unité de $H_\natural$, on a $L_e^\natural = 1$ et, par suite,

$$L_e = L_{e^\natural} = L_e^\natural = 1.$$

Proposition 13. — *Soit* H *un espace d'Ambrose de classe finie. Tout idéal bilatère* H_1 *de* H *contient un idéal bilatère* H_2 *à élément unité.*

Démonstration. — Il suffit de considérer le cas où $H = H_1$. Soit $\mathfrak{l}$ l'idéal de $\mathbf{L}$ formé des opérateurs L_a pour $a \in \mathbf{B}$. Il suffit de considérer le sous-espace final d'un projecteur $E_2 \neq 0$, $\in \mathfrak{l} \cap \mathbf{L}^\natural$ (cet idéal de $\mathbf{L}$ étant différent de 0, puisque $\mathbf{L}$ est de classe finie).

Si nous appelons irréductible un espace d'Ambrose tel que $\mathbf{L}$ ou $\mathbf{R}$ soit un facteur, c'est-à-dire ne contenant aucun idéal bilatère autre que 0 ou lui-même, nous pouvons énoncer le corollaire suivant :

Corollaire. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace d'Ambrose irréductible soit de classe finie est qu'il possède un élément unité.*

Pour terminer, rappelons que pour l'exemple du paragraphe 2, on a les résultats suivants [7]. Les éléments centraux de $L^2(G)$ sont les fonctions centrales de carré intégrable. La condition nécessaire et suffisante pour que $L^2(G)$ soit de classe finie, est qu'il existe sur un système fondamental de voisinages de l'unité invariants par les automorphismes intérieurs de G. La condition nécessaire et suffisante pour que $L^2(G)$ ait un élément unité est que G soit discret.

Bibliographie.

[1] W. Ambrose, *The* L^2 *system of a unimodular locally compact group* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 65, 1949, p. 26-48).

[2] N. Bourbaki, *Algèbre* (*Act. Sc. Ind.*, Paris).

[3] J. Dixmier, *Les Anneaux d'opérateurs de classe finie* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 66, 1949, p. 209-261).

[4] J. Dixmier, *Sur la réduction des anneaux d'opérateurs* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 68, 1951, p. 185-202).

[5] J. Dixmier, *Algèbres quasi-unitaires* (*Com. Math. Helv.*, t. 26, 1952, p. 275-322).

[6] J. Dixmier, *Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 81, 1933, p. 9-39).

[7] R. Godement, *Mémoire sur la théorie des caractères dans les groupes localement compacts unimodulaires* (*Ann. Math.*, t. 53, 1951, p. 68-124).

[8] R. Godement, *Deuxième mémoire sur la Théorie des caractères* (à paraître).

[9] F. I. Mautner, *Unitary representations of locally compact groups* (*Ann. Math.*, t. 51, 1950, p. 1-25).

[10] F. J. Murray et J. von Neumann, *On Rings of Operators* (*Ann. Math.*, t. 37, 1936, p. 116-229).

[11] Nakano, *Hilbert Algebras* (*Tohoku Math. J.*, 2e série, t. 2, 1950).

[12] J. von Neumann, *On a certain topology for rings of operators* (*Ann. Math.*, t. 37, 1936, p. 111-115).

[13] M. Orihara et T. Tsuda, *The two sided regular representation of a unimodular locally compact group* (*Mem. Fac. Sc. Kyūsyū Univ.*, A, vol. VI, n° 1, 1951, p. 21-29).

[14] R. Pallu de La Barrière, *Sur les algèbres d'opérateurs dans les espaces hilbertiens* (*Bull. Soc. Math. F.*, à paraître).

[15] R. Pallu de La Barrière, *Algèbres unitaires et espaces d'Ambrose* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 233, 1951, p. 997-999).

[16] I. E. Segal, *The two sided regular representation of a unimodular locally compact group* (*Ann. Math.*, t. 51, 1950, p. 293-298).

[17] O. Takenouchi, *On the maximal Hilbert algebras* (*Tohoku Math. J.*, 2e série, t. 3, 1951).

ERRATA.

Sur le problème de la génération d'une transformation donnée d'une courbe fermée par une transformation infinitésimale,
par M. Arrigo Finzi.
(*Annales de l'École Normale Supérieure*, t. 69, 1952, p. 370.)

Page 375, 8e ligne en remontant, *au lieu de* $g(x, \theta \mid \theta_\alpha)$, *lire* $\bar{g}(x, \theta \mid \theta_\alpha)$.

» 378, 10e » en descendant, *au lieu de* $\mathrm{L}[\xi^{0,1}(x \mid \theta_\alpha), x, t]$,
lire $\mathrm{L}[\xi(x, \theta_\alpha), \xi^{0,1}(x, \theta_\alpha), x, t]$.

» » » » » *au lieu de* $\int_0^t \xi^{0,1}[g(x, t, \theta_\alpha), \theta_\alpha]$,

lire $\int_0^t \xi^{0,1}[g(x, \tau, \theta_\alpha), \theta_\alpha]$.

» » 8e » en remontant, *au lieu de* $g^{0,1}(x, t, 0)$, *lire* $g^{0,1}(x, t, \theta_\alpha)$.

» 379, 15e » en descendant, *au lieu de* $\bar{g}^{0,1}(x, \theta_\alpha \mid \theta_\alpha) = g^{0,1}(x, \theta_\alpha)$,
lire $\bar{g}^{0,1}(x, \theta_\alpha \mid \theta_\alpha) = g^{0,1}(x, \theta_\alpha)$?

» 381, 1re » » *au lieu de* $g^{0,1***}[g(x, \theta_\alpha)]$, *lire* $\xi^{0,1***}[g(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]$.

» » 12e » » *au lieu de* $[g_r(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]$, *lire* $\xi[g_r(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]$.

» » 6e » en remontant, *au lieu de* $\dfrac{g^{1,0}_{n_\alpha - r+j}[g_r(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{0,1}[g_{j-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}$,

lire $\dfrac{g^{0,1}[g_{j-1}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}{g^{1,0}_{n_\alpha - r+j}[g_r(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]}$.

» 382, 3e » » *ajouter* $\dfrac{d_\alpha}{n_\alpha}$ *avant la double sommation.*

» 385, 4e » en descendant, *au lieu de* rationnel, *lire* irrationnel.

» 391, 8e » *au lieu de* $\sum_0^{a_{\alpha'}-1} \dfrac{n_{\alpha'}}{g^{1,0}_{ln_{\alpha'}}(x, \theta_\alpha)} \chi[g_{ln_{\alpha'}}(x, \theta_\alpha), \theta_\alpha]$,

lire $\sum_0^{n_{\alpha'}-1} \dfrac{n_{\alpha'}}{g^{1,0}_{ln_{\alpha'}}(x, \theta_\alpha)} \chi_{\alpha'}[g_{ln_{\alpha'}}(x, \theta_\alpha) \mid \theta_\alpha]$.

» » 7e » en remontant, *au lieu de* $\mathrm{T}_{\alpha_{\alpha'}}(0^n)$, *lire* $\mathrm{T}^{n_{\alpha'}}(\theta_\alpha)$.

» 392, 1re » en descendant, *au lieu de* intervalle (1),
lire intervalle $(g_{n_{\alpha'}}(\mathbf{x}, \theta_\alpha), g_{n_{\alpha'}+1}(\mathbf{x}, \theta_\alpha))$.

» » 15e » » *au lieu de* de ces points $\mathrm{T}^{-n_{\alpha'}}(\theta_{\alpha'})\ \mathrm{T}^{n_{\alpha'}}(\theta_\alpha)$,
lire de ces points par $\mathrm{T}^{-n_{\alpha'}}(\theta_{\alpha'})\ \mathrm{T}^{n_{\alpha'}}(\theta_\alpha)$.

» » note (1), *supprimer* $[\mathbf{x}, g_{n_{\alpha'}} + n_{\alpha'-1}(\mathbf{x}, \theta_\alpha)]$.

» 398, 9e ligne en remontant, *au lieu de* $g_{(l+1)n_\alpha-1)}$, *lire* $g_{(l+1)n_\alpha-1}$.

» 429, 13e » en descendant, *au lieu de* $\dfrac{g^{2,0}[g_l(x, \theta_{\alpha+1}), \theta_{\alpha+1}]}{lg^{1,0}[g_l(x, \theta_{\alpha+1}), \theta_{\alpha+1}]}$,

lire $\dfrac{g^{2,0}[g_l(x, \theta_{\alpha+1}), \theta_{\alpha+1}]}{g^{1,0}[g_l(x, \theta_{\alpha+1}), \theta_{\alpha+1}]}$.

Sur les fonctions holomorphes admettant des valeurs exceptionnelles,
par M. King-Lai Hiong,
(*Annales de l'École Normale Supérieure*, t. **70**, 1953, p. 149.)

Page 153, 24e ligne, *supprimer* $|a_\nu| \leqq r$ et

» 154, 10e » *au lieu de* $|a_1|$, *lire* e

» 156, 14e » *au lieu de* $n(r, o) = n(R, o)$, *lire* $\lambda n(r, o) \geqq n(R, o)$

» 165, dernière ligne, *au lieu de* et $T(r, F)$, *lire* et $T(r, f)$

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME SOIXANTE-DIXIÈME.

Pages.

Nouvelles applications du calcul fonctionnel à la mécanique, par M. *Henri Pailloux*. 1

Théorèmes taubériens pour les séries multiples de Dirichlet et les intégrales multiples de Laplace, par M. *Hubert Delange*. 51

Sur un ensemble fermé d'entiers algébriques, par MM. *J. Dufresnoy* et *Ch. Pisot*... 105

Sur quelques propriétés frontières des fonctions holomorphes définies par certains produits dans le cercle-unité, par MM. *F. Bagenrihl*, *P. Erdös* et *W. Seidel*..... 135

Sur les fonctions holomorphes admettant des valeurs exceptionnelles, par M. *King-Lai Hiong*. 149

Extensions algébriques infinies de P. F corps, par M. *Paul Jaffard*. 181

Sur l'approximation des nombres complexes par les nombres des corps imaginaires quadratiques dénués d'idéaux non principaux, particulièrement lorsque vaut l'algorithme d'Euclide, par M. *Georges Poitou*. 199

Convergence de la répartition empirique vers la répartition théorique, par M. *R. Fortet* et M^lle^ *E. Mourier*. 267

Sur les courbes définies par les équations différentielles dans l'espace Am dimensions, par M. *Taro Ura*. 287

Demi-groupes inversifs et demi-groupes réunions de demi-groupes simples, par M. *R. Croisot*. 361

Algèbres unitaires et espaces d'Ambrose, par *R. Pallu de La Barrière*. 381

Errata. 403

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
Quai des Grands-Augustins, 55.

143154-54

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ